E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 2 **2. vizsga – gyakorlat** **2018-06-06**

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első feladat nyolc egyszerű kérdését kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 110 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

E1. Az $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrixok közül melyik az, amelyik hasonló az $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixhoz?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

E2. Mi a $4x_1^2+4x_1x_2+x_2^2$ kvadratikus alak mátrixa és jellege?

E3. Legyen $\mathbf{a} = (1, i, 1+i)$ és $\mathbf{b} = (1-i, 3-i, 0)$. Mi a $\mathbf{b}$ vektor merőleges vetülete az $\mathbf{a}$ vektorra?

E4. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix 1- és 2-normáját!

E5. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ olyan szimmetrikus mátrix $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben, amelynek sajátvektora a $(-2, 3)$ vektor. Adjunk meg olyan $\mathbf{P}$ mátrixot, amelyre $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ biztosan diagonális!

E6. A $c \in \mathbb{C}$ milyen értékeire normális az $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ c & 1 \end{bmatrix}$ mátrix?

E7. Adjunk minél jobb felső becslést az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix spektrálsugarára a Gersgorin-körök alapján!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1+i & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

E8. Egy egészelemű négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix minimálpolinomja $x^2 + c$. Mennyi lehet c értéke, ha $\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k$ konvergens?

---

1. Írjuk fel az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x, y) = (x + y, -x, 2x - y)$$

lineáris leképezés mátrixát a standard bázisban, és a $\mathcal{B} = \{(1, -1), (2, 1)\}$, $\mathcal{C} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (2, 0, 3)\}$ bázispárban.

2. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix minimálpolinomja $(x + 1)^2(x - 1)$. Adjuk meg a legkisebb fokú olyan $p(x)$ polinomot, amelyre $p(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{100}$.

3. Adjuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix SVD-felbontását, és az ezt (2-normában) legjobban közelítő egy rangú mátrixot!

4. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix Jordan-féle normálalakját, és írjuk fel a Jordan-mátrix 9. hatványát!

5. Givens-forgatásokkal határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 15 \\ 0 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontásának **R** mátrixát (a **Q**-t nem kell kiszámolni)!

6. Diagonalizáljuk az $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus alak mátrixát, és adjuk meg a diagonális alakhoz tartozó bázist!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Az n ágú csillaggráfnak $n+1$ csúcsa és n éle van, az n él egy közös csúcsból indul ki. Lássuk be, hogy $\sqrt{n}$ sajátértéke ennek a gráfnak! Írjuk fel a szomszédsági mátrixot, és határozzuk meg a teljes spektrumot!

8. Tegyük fel, hogy a 8×8-as **A** mátrixra **A** hatványainak rangja $5, 3, 3, \ldots$, míg $\mathbf{A} + \mathbf{I}$ hatványainak a rangja $6, 5, 5, \ldots$. Mi az **A** mátrix Jordan-normálalakja, karakterisztikus polinomja és minimálpolinomja?