E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 2 **1. vizsga – gyakorlat** **2018-05-30**

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első feladat nyolc egyszerű kérdését kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 110 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

E1. Mi a $\mathbb{C}^3$-beli $\mathbf{a} = (\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}, 1+\mathrm{i})$ és a $\mathbf{b} = (1, 2\mathrm{i}, 1-\mathrm{i})$ vektorok skalárszorzata és távolsága?

E2. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ mátrix 1- és 2-normáját!

E3. Ha a 7×7-es $\mathbf{A}$ mátrixra $\mathbf{A}^4 = \mathbf{O}$, de $\mathbf{A}^3 \neq \mathbf{O}$, és $\mathbf{A}$-nak van négy független sajátvektora, akkor hogy néz ki az $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakja?

E4. Adjuk meg annak a Householder-tükrözésnek a mátrixát, mely a $\mathbf{x} = (2, 2, 1)$ vektort a $\mathbf{y} = (3, 0, 0)$ vektorba viszi!

E5. Határozzuk meg a $q(x, y) = 3x\bar{x} - 2\mathrm{i}x\bar{y} + 2\mathrm{i}\bar{x}y + 3y\bar{y}$ kvadratikus alak jellegét!

E6. Írjuk fel az $\mathbb{R}^n$ tér egy k-dimenziós alterére való merőleges vetítésének karakterisztikus és minimálpolinomját, ahol $0 < k < n$.

E7. Mi az $x_n = 2x_{n-1} + 3x_{n-2}$ differenciaegyenlet általános megoldása, azaz milyen alakban kaphatjuk meg a rekurzív sorozat tagjait?

E8. Írjuk fel az $e^{\mathbf{J}^3}$ mátrixot, ha $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

---

1. Írjuk fel a

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix spektrálfelbontását, és a vetítőmátrixokat használva bontsuk fel az $(1, 5, 3)$ vektort a mátrix sajátaltereibe eső vektorok összegére!

2. Számítsuk ki Gram–Schmidt-ortogonalizálással az $\mathbf{A}$ mátrix redukált QR-felbontását, és ebből az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer optimális megoldását, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

3. Határozzunk meg a

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrix Schur-felbontását!

4. Számítsuk ki az $\mathbf{A}$ mátrix redukált SVD-felbontását, és pszeudoinverzét, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Legyen $\mathcal{B} = \{(i,1),(1,i)\}$ a $\mathbb{C}^2$ egy bázisa, és

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Írjuk fel az $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2; \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ lineáris transzformáció, és a $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{Ay}$ bilineáris függvény mátrixát a $\mathcal{B}$ bázisban!

6. A 7×7-es $\mathbf{A}$ mátrixra az $\mathbf{A} + \mathbf{I}$ mátrix hatványai magterének dimenziója rendre 2, 4, az $\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$ mátrix esetén 1, 2, 3. Írjuk fel $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakját!

7. Konvergens-e az

$$\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{n-1} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

sorozat? Mi a határértéke?

8. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg azt a legkisebb fokú $p(x)$ polinomot, melyre $p(\mathbf{A}) = (\mathbf{A}^2 - \mathbf{I})^3$, és számítsuk is ki ezt a mátrixot!