1	2-8	9-12	13-	Σ

NÉV ______________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 2 **1. vizsga – elmélet** **2018-05-30**

A tesztkérdésekre 20, a definíciók, tételek precíz megfogalmazására 10, a bizonyítások tömör, világos, korrekt leírására 10 pont kapható. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc. Segédeszköz nem használható!

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(6 pont)*

a) Ha az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix unitéren diagonalizálható, akkor önadjungált.

b) Ha egy valós mátrix diagonalizálható, akkor van Schur-felbontása is.

c) Egy valós kvadratikus alak egyetlen valós bilineáris függvényből kapható meg.

d) $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix pozitív definit $\iff$ $\det A > 0$ és $\operatorname{trace} A > 0$.

e) Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ mátrix minimálpolinomjának csak racionális gyökei vannak.

f) Ha egy $\mathbf{A}$ unitér mátrixra az $\{\mathbf{A}^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ sorozat konvergens, akkor $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

2. Párosítsuk az (NL): nem lineáris, (I): izomorfizmus, (NI): lineáris, de nem injektív, (NS): lineáris, de nem szürjektív tulajdonságokat az alábbi négy függvénnyel:

1. $\mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R},\ \mathbf{A} \mapsto \operatorname{trace} \mathbf{A}$
2. $\mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R},\ \mathbf{A} \mapsto \det \mathbf{A}$
3. $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x],\ p(x) \mapsto xp(x)$
4. $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x],\ p(x) \mapsto (xp(x))'$ *(2 pont)*

3. Ha $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ egy f lineáris transzformáció mátrixa a $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ bázisban, akkor mi az f mátrixának első oszlopa a $\mathcal{B}' = \{-\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1\}$ bázisban? *(2 pont)*

4. Mi a diagonális alakja az $\mathbb{R}^3$-öt az $x-y-z=0$ síkra merőlegesen vetítő transzformációnak, és milyen bázisban kapjuk ezt a mátrixot? *(2 pont)*

5. Mit mondhatunk az önadjungált, illetve ferdén önadjungált mátrixok sajátértékeiről? *(2 pont)*

6. Adjunk meg egy olyan mátrixot, amely kongruens az $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$-gyel, és hasonló a $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$-hoz! *(2 pont)*

7. Mik az $\mathbf{A}$ mátrix legjobb 2 rangú közelítésének a szinguláris értékei, ha $\mathbf{A}$ szinguláris értékei 3, 2 és 1?

8. Adjuk meg annak a mátrixnak a karakterisztikus és minimálpolinomját, amelynek a sajátértékei 0 és -1, és a 0-hoz tartozó Jordan-blokkok 2 és 3, a -1-hez tartozók pedig 1, 1, 2 méretűek! *(2 pont)*

9. Mi egy sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása? *(2 pont)*

10. Mi egy mátrix indukált normája? *(2 pont)*

11. Mondjuk ki a valós pozitív definit mátrixok két különböző, mátrixfelbontással való jellemzését! *(3 pont)*

12. Mondjuk ki az Hermite-féle interpolációs tételt! *(3 pont)*

13. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a mátrix soraihoz tartozó Gersgorin-körökről szóló tételt! *(4 pont)*

14. Bizonyítsuk be, hogy a sajátalterek összege direkt összeg! *(6 pont)*