E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV _____ **NEPTUNKÓD** _____

Bevezetés az algebrába 2 **2. vizsga – gyakorlat** **2018-06-06**

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első feladat nyolc egyszerű kérdését kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 110 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

E1. Az $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrixok közül melyik az, amelyik hasonló az $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrixhoz?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

B

E2. Mi a $4x_1^2+4x_1x_2+x_2^2$ kvadratikus alak mátrixa és jellege?

a mátrix
$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$
mely pozitív szemidefinit.

E3. Legyen $\mathbf{a} = (1, i, 1+i)$ és $\mathbf{b} = (1-i, 3-i, 0)$. Mi a $\mathbf{b}$ vektor merőleges vetülete az $\mathbf{a}$ vektorra?

$(-i, 1, 1-i)$

E4. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix 1- és 2-normáját!

3 és $\sqrt{5}$

E5. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ olyan szimmetrikus mátrix $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben, amelynek sajátvektora a $(-2, 3)$ vektor. Adjunk meg olyan $\mathbf{P}$ mátrixot, amelyre $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ biztosan diagonális!

például
$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

E6. A $c \in \mathbb{C}$ milyen értékeire normális az $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ c & 1 \end{bmatrix}$ mátrix?

$|c| = 2$

E7. Adjunk minél jobb felső becslést az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix spektrálsugarára a Gersgorin-körök alapján!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1+i & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$1 + \sqrt{2}$

E8. Egy egészelemű négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix minimálpolinomja $x^2 + c$. Mennyi lehet c értéke, ha $\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}^k$ konvergens?

$c = 0$

---

1. Írjuk fel az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x, y) = (x + y, -x, 2x - y)$$

lineáris leképezés mátrixát a standard bázisban, és a $\mathcal{B} = \{(1, -1), (2, 1)\}$, $\mathcal{C} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (2, 0, 3)\}$ bázispárban.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ -1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix minimálpolinomja $(x + 1)^2(x - 1)$. Adjuk meg a legkisebb fokú olyan $p(x)$ polinomot, amelyre $p(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{100}$.

$p(x) = 50x^2 - 49$

3. Adjuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix SVD-felbontását, és az ezt (2-normában) legjobban közelítő egy rangú mátrixot!

$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 12/5 & -6/5 \\ 6/5 & -3/5 \end{bmatrix}$

4. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix Jordan-féle normálalakját, és írjuk fel a Jordan-mátrix 9. hatványát!

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}^9 = \begin{bmatrix} -1 & 9 & -36 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

5. Givens-forgatásokkal határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 15 \\ 0 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontásának $\mathbf{R}$ mátrixát (a $\mathbf{Q}$-t nem kell kiszámolni)!

$\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 13 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, ahol $\mathbf{Q}_1 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, és $\mathbf{Q}_2 = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 13 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 12 \\ 0 & -12 & 5 \end{bmatrix}$.

6. Diagonalizáljuk az $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus alak mátrixát, és adjuk meg a diagonális alakhoz tartozó bázist!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

A diag. alak $\operatorname{diag}(1, -4, 4)$, a hozzá tartozó bázis $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (-2, 1, 0), (-1, 1, 1)\}$

7. Az n ágú csillaggráfnak $n+1$ csúcsa és n éle van, az n él egy közös csúcsból indul ki. Lássuk be, hogy $\sqrt{n}$ sajátértéke ennek a gráfnak! Írjuk fel a szomszédsági mátrixot, és határozzuk meg a teljes spektrumot!

Sajátvektor $\sqrt{n}$-hez az, amikor a középpontba $\sqrt{n}$-et, a többi csúcsba 1-et írunk. A szomszédsági mátrix az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}^\mathsf{T} \\ \mathbf{1} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$ blokkmátrix, amelynek rangja 2, így $\dim V_0 = n - 1$, és $\operatorname{trace} \mathbf{A} = 0$ miatt az $(n + 1)$. sajátérték $-\sqrt{n}$. Így a spektrum: $\pm\sqrt{n}$ és $n - 1$ darab 0.

8. Tegyük fel, hogy a 8×8-as $\mathbf{A}$ mátrixra $\mathbf{A}$ hatványainak rangja $5, 3, 3, \ldots$, míg $\mathbf{A} + \mathbf{I}$ hatványainak a rangja $6, 5, 5, \ldots$. Mi az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-normálalakja, karakterisztikus polinomja és minimálpolinomja?

A Jordan-normálalakban
A 0-blokkok: 2 darab 2×2-es, 1 darab 1×1-es, a -1-blokkok: 1 darab 2×2-es, 1 darab 1×1-es,
karakterisztikus polinom: $x^5(x + 1)^3$,
minimálpolinom: $x^2(x + 1)^2$.