E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 2 **1. vizsga – gyakorlat** **2018-05-30**

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első feladat nyolc egyszerű kérdését kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 110 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

E1. Mi a $\mathbb{C}^3$-beli $\mathbf{a} = (\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}, 1+\mathrm{i})$ és a $\mathbf{b} = (1, 2\mathrm{i}, 1-\mathrm{i})$ vektorok skalárszorzata és távolsága?

$-2+\mathrm{i}$ és 4

E2. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ mátrix 1- és 2-normáját!

7 és 5

E3. Ha a 7×7-es $\mathbf{A}$ mátrixra $\mathbf{A}^4 = \mathbf{O}$, de $\mathbf{A}^3 \neq \mathbf{O}$, és $\mathbf{A}$-nak van négy független sajátvektora, akkor hogy néz ki az $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakja?

egy 4×4-es, három 1×1-es blokk 0 sajátértékkel.

E4. Adjuk meg annak a Householder-tükrözésnek a mátrixát, mely a $\mathbf{x} = (2, 2, 1)$ vektort a $\mathbf{y} = (3, 0, 0)$ vektorba viszi!

Az $\mathbf{a} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ jelöléssel $\mathbf{I} - 2\frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^\mathsf{T}}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

E5. Határozzuk meg a $q(x, y) = 3x\bar{x} - 2\mathrm{i}x\bar{y} + 2\mathrm{i}\bar{x}y + 3y\bar{y}$ kvadratikus alak jellegét!

pozitív definit, mert sajátértékei 1 és 5: ui. $\chi(x) = x^2 - 6x + 5$, mátrixa $\begin{bmatrix} 3 & 2\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} & 3 \end{bmatrix}$

E6. Írjuk fel az $\mathbb{R}^n$ tér egy k-dimenziós alterére való merőleges vetítésének karakterisztikus és minimálpolinomját, ahol $0 < k < n$.

$\chi(x) = x^{n-k}(1-x)^k$, $\mu(x) = x(x-1) = x^2 - x$.

E7. Mi az $x_n = 2x_{n-1} + 3x_{n-2}$ differenciaegyenlet általános megoldása, azaz milyen alakban kaphatjuk meg a rekurzív sorozat tagjait?

$x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) \rightsquigarrow$
$x_n = c_1 3^n + c_2(-1)^n$.

E8. Írjuk fel az $e^{\mathbf{J}^3}$ mátrixot, ha $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Mivel $(e^{x^3})' = 3x^2(e^{x^3})$ ezért
$\begin{bmatrix} e^8 & 12e^8 \\ 0 & e^8 \end{bmatrix}$

---

1. Írjuk fel a

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix spektrálfelbontását, és a vetítőmátrixokat használva bontsuk fel az $(1, 5, 3)$ vektort a mátrix sajátaltereibe eső vektorok összegére!

Sajátpárok:
$(9, (1, 1, 0))$, $(-1, (1, -1, 0))$, $(-1, (0, 0, 1))$,
spektrálfelbontás:

$$9\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(1, 5, 3) = (3, 3, 0) + (-2, 2, 3)$

2. Számítsuk ki Gram–Schmidt-ortogonalizálással az $\mathbf{A}$ mátrix redukált QR-felbontását, és ebből az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer optimális megoldását, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

3. Határozzunk meg a

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrix Schur-felbontását!

Sajátpárok: $(1, \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1))$, $(5, \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)$, az elsőből indulva
$\mathbf{UTU}^{\mathsf{H}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

4. Számítsuk ki az $\mathbf{A}$ mátrix redukált SVD-felbontását, és pszeudoinverzét, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A szing. értékek 4, 2,
$\mathbf{A}^+ = \dfrac{1}{8}\begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

5. Legyen $\mathcal{B} = \{(i, 1), (1, i)\}$ a $\mathbb{C}^2$ egy bázisa, és

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Írjuk fel az $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2; \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ lineáris transzformáció, és a $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{Ay}$ bilineáris függvény mátrixát a $\mathcal{B}$ bázisban!

$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

6. A 7×7-es $\mathbf{A}$ mátrixra az $\mathbf{A} + \mathbf{I}$ mátrix hatványai magterének dimenziója rendre 2, 4, az $\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$ mátrix esetén 1, 2, 3. Írjuk fel $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakját!

A -1 négyszeres, a 3 háromszoros multiplicitású:

$$\left[\begin{array}{rr|rr|rrr} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

7. Konvergens-e az

$$\mathbf{x}_n = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}\mathbf{x}_{n-1} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

sorozat? Mi a határértéke?

$\chi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + \frac{3}{16}$, a sajátértékek $\frac{1}{4}$ és $\frac{3}{4}$, abszolút értékük kisebb 1-nél $\rightsquigarrow \rho(\mathbf{A}) < 1 \rightsquigarrow$ a sorozat konvergens!
$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{4}{3}\left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}.$

8. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg azt a legkisebb fokú $p(x)$ polinomot, melyre $p(\mathbf{A}) = (\mathbf{A}^2 - \mathbf{I})^3$, és számítsuk is ki ezt a mátrixot!

$p(x) = 108x - 189$
$p(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 27 & 108 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$