1	2-8	9-12	13-	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 2 **2. vizsga – elmélet** **2018-06-06**

A tesztkérdésekre 20, a definíciók, tételek precíz megfogalmazására 10, a bizonyítások tömör, világos, korrekt leírására 10 pont kapható. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc. Segédeszköz nem használható!

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(6 pont)*

a) Ha $\mathbf{A}$ önadjungált, akkor $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$. **I**

b) $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \mathcal{V}_3 \iff \mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3$, $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \{\mathbf{0}\}$, $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_3 = \{\mathbf{0}\}$, $\mathcal{V}_2 \cap \mathcal{V}_3 = \{\mathbf{0}\}$. **H**

c) Ha egy 3×3-as valós kvadratikus alak mátrixnak van pozitív, negatív és 0 sajátértéke, akkor van olyan bázis, melyben a kvadratikus alak képlete $2x^2 - 3z^2$. **I**

d) Egyetlen zérusmátrixtól különböző nilpotens mátrix sem diagonalizálható! **I**

e) Minden valós pozitív szemidefinit mátrixnak egyetlen négyzetgyöke van. **H**

f) Lerajzolunk a síkra 20 pontot és 21 olyan görbét, amelyek mindegyike átmegy néhány ponton, de nincs olyan pont, amelyiken mindegyik görbe átmenne. Azt látjuk, hogy bármely két görbe közös pontjainak száma (e 20 pont közül) ugyanannyi. Valaki azt állítja, hogy a Fisher-egyenlőtlenség szerint ez lehetetlen. Igaz vagy hamis ez az állítása? (magyarázat a 3. oldalon) **I**

2. Mi a diagonális alakja az $\mathbb{R}^n$-et az $x_1+x_2+\ldots+x_n = 0$ hipersíkra merőlegesen tükröző transzformációnak? *(2 pont)*

$\operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1, -1)$

3. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olyan mátrix, melynek sajátértékei valósak. Melyik tétel szerint van olyan mátrix és melyik az a mátrix, melynek első k oszlopvektora által generált alteret $\mathcal{V}_k$-val jelölve igaz, hogy $\mathbf{A}$-nak $\mathcal{V}_k$ invariáns altere, és $\{\mathbf{0}\} < \mathcal{V}_1 < \mathcal{V}_2 < \cdots < \mathcal{V}_{n-1} < \mathbb{R}^n$. *(2 pont)*

A Schur-felbontásban szereplő $\mathbf{Q}$ mátrix ilyen, amelyre $\mathbf{A} = \mathbf{QTQ}^\mathsf{T}$, ahol $\mathbf{Q}$ ortogonális, $\mathbf{T}$ felső háromszög, ugyanis $\mathbf{T}$ minden k-ra olyan blokkháromszög-mátrix, melynek bal felső blokkja $k \times k$-as.

4. Mit mondhatunk az ortogonális, az unitér és a normális mátrixok sajátértékeiről? *(2 pont)*

Ortogonális, unitér: $\lambda \in \mathbb{C}$ és $|\lambda| = 1$,
normális: $\lambda \in \mathbb{C}$

5. Soroljuk fel azokat a feltételeket, melyek mellett egy kétváltozós $f : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ függvény szeszkvilineáris! *(2 pont)*

ha bármely $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ és $c \in \mathbb{C}$ esetén

$$b(c\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \bar{c}b(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{v}, \mathbf{w}),$$
$$b(\mathbf{u}, c\mathbf{v} + \mathbf{w}) = cb(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}, \mathbf{w}).$$

6. Legyen $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ a valós $\mathcal{V}$ vektortér egy $\mathcal{W}$ alterének ortonormált bázisa. Ismerjük a $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektor skaláris szorzatát mindegyik fenti vektorral. Írjuk fel a $\mathbf{v}$ vektor $\mathcal{W}$ altérre való merőleges vetületi vektorát! *(2 pont)*

Íme: $\sum_{i=1}^{k} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_i \rangle \mathbf{v}_i$

7. Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei λ és μ. $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakjában a λ-hoz tartozó Jordan-blokkok mérete 5, 4, a μ-höz tartozók mérete 4, 4, 1. Írjuk fel $\mathbf{A}$ karakterisztikus és minimálpolinomját, és μ geometriai multiplicitását! *(2 pont)*

$\chi_{\mathbf{A}}(x) = (\lambda-x)^9(\mu-x)^9$, $\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x-\lambda)^5(x-\mu)^4$, $g_\mu = 3$.

8. Tekintsük *komplex* mátrixokon az alábbi mátrixtulajdonságokat: *(A)* önadjungált, *(B)* ferdén önadjungált, *(C)* unitér, *(D)* normális, továbbá a következőket: *(a)* unitéren diagonalizálható, *(b)* unitéren diagonalizálható egy valós diagonális mátrixszá, *(c)* unitéren diagonalizálható egy valós diagonális mátrix i-szeresévé. *(2 pont)*

Mindegyik nagybetűs tulajdonságot állítsuk párba valamelyik kisbetűssel, és jelezzük a köztük lévő implikáció irányát (azaz $X \Leftrightarrow y$, $X \Rightarrow y$, $X \Leftarrow y$ alakú kapcsolatok listáját kérjük).

$A \Leftrightarrow b$, $B \Leftrightarrow c$, $C \Rightarrow a$, $D \Leftrightarrow a$.

9. Mit jelent az, hogy egy q kvadratikus alak pozitív szemidefinit? *(1 pont)*

$q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pszd ha $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \; q(\mathbf{x}) \geq 0$

10. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Milyen f függvényekre definiáljuk az $f(\mathbf{A})$ mátrixot? *(3 pont)*

Azokra, amelyekre az

$$f^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 0, 1, \ldots, m_i - 1,\; i = 1, \ldots, s$$

értékek léteznek, ahol $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$ és a λ_i-hez tartozó legnagyobb Jordan-blokk rendje m_i.

11. Fogalmazza meg a minimálpolinom legalább három tulajdonságát! *(3 pont)*

Minden mátrixnak pontosan egy minimálpolinomja van;
Bármely p polinomra $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O} \iff \mu_{\mathbf{A}} \mid p$;
$\mu_{\mathbf{A}} \mid \chi_{\mathbf{A}}$;
$\mathbf{A}$ minden sajátértéke gyöke $\mu_{\mathbf{A}}$-nak.

12. Legyen $\mathcal{V}$ egy véges dimenziós euklideszi tér, $A : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ egy lineáris transzformáció. Fogalmazzon meg három állítást, mely ekvivalens azzal, hogy A távolságtartó. *(3 pont)*

A távolságtartó: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$: $|A\mathbf{x} - A\mathbf{y}| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$
A skalárszorzattartó: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$: $\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$
A hossztartó: $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}$: $|A\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$.
A minden ONB-t ONB-ba visz
Bármely $\mathcal{B}$ ONB-ban $\mathbf{A} = [A]_{\mathcal{B}}$ ortogonális mátrix.

13. Legyen $b : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy bilineáris függvény és $q(x) = b(x, x)$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. Bizonyítsuk be, hogy a $b \mapsto q$ leképezés kölcsönösen egyértelmű a szimmetrikus bilineáris függvények és a kvadratikus alakok között. (Igazoljuk a bizonyításhoz szükséges formulát is.) *(5 pont)*

5. prezentáció 60-61. oldal.

14. Bizonyítsuk be, hogy egy $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha $\mathbb{K}^n$-nek létezik $\mathbf{A}$ sajátvektoraiból álló bázisa, ahol $\mathbb{K}$ egy tetszőleges test! *(5 pont)*

3. prezentáció 33. oldal.

A Fisher-egyenlőtlenség szerint egy 2-struktúrában a blokkok száma legalább annyi, mint a csúcsok száma. E feladatban a 2-struktúra csúcsai a görbék, a sík pontjai pedig a blokkok. Minden blokk illeszkedik valahány csúcsra. Itt a sík egy kijelölt pontja úgy tekinthető blokknak, hogy azokra a csúcsokra illeszkedik, amelyeknek megfelelő görbék átmennek rajta. Ez a rajz azért lenne 2-struktúra, mert a feltételek szerint egyik blokk sem illeszkedik minden csúcsra (egyik ponton sem megy át minden görbe), így biztosan van nemtriviális blokk (van olyan pont, amin megy át legalább két görbe, de nem az összes), és bármely két csúcsra ugyanannyi blokk illeszkedik (bármely két görbének ugyanannyi közös pontja van). Így $b = 20$, $v = 21$, azaz $b < v$, ami ellentmond a Fisher-egyenlőtlenségnek.