1	2-8	9-12	13-	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Bevezetés az algebrába 2 **1. vizsga – elmélet** **2018-05-30**

A tesztkérdésekre 20, a definíciók, tételek precíz megfogalmazására 10, a bizonyítások tömör, világos, korrekt leírására 10 pont kapható. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc. Segédeszköz nem használható!

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(6 pont)*

a) Ha az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix unitéren diagonalizálható, akkor önadjungált. H

b) Ha egy valós mátrix diagonalizálható, akkor van Schur-felbontása is. I

c) Egy valós kvadratikus alak egyetlen valós bilineáris függvényből kapható meg. H

d) $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix pozitív definit $\iff$ $\det A > 0$ és $\operatorname{trace} A > 0$. I

e) Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ mátrix minimálpolinomjának csak racionális gyökei vannak. H

f) Ha egy $\mathbf{A}$ unitér mátrixra az $\{\mathbf{A}^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ sorozat konvergens, akkor $\mathbf{A} = \mathbf{I}$. I

2. Párosítsuk az (NL): nem lineáris, (I): izomorfizmus, (NI): lineáris, de nem injektív, (NS): lineáris, de nem szürjektív tulajdonságokat az alábbi négy függvénnyel:

1. $\mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R},\ \mathbf{A} \mapsto \operatorname{trace} \mathbf{A}$
2. $\mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R},\ \mathbf{A} \mapsto \det \mathbf{A}$
3. $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x],\ p(x) \mapsto xp(x)$
4. $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x],\ p(x) \mapsto (xp(x))'$ *(2 pont)*

1NI, 2NL, 3NS, 4I

3. Ha $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ egy f lineáris transzformáció mátrixa a $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ bázisban, akkor mi az f mátrixának első oszlopa a $\mathcal{B}' = \{-\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1\}$ bázisban? *(2 pont)*

$\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

4. Mi a diagonális alakja az $\mathbb{R}^3$-öt az $x-y-z=0$ síkra merőlegesen vetítő transzformációnak, és milyen bázisban kapjuk ezt a mátrixot? *(2 pont)*

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, pl. $\{(1,1,0),(1,0,1),(1,-1,-1)\}$

5. Mit mondhatunk az önadjungált, illetve ferdén önadjungált mátrixok sajátértékeiről? *(2 pont)*

Az önadjungáltaké valósak,
a ferdén önadjungáltaké tisztán képzetesek.

6. Adjunk meg egy olyan mátrixot, amely kongruens az $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$-gyel, és hasonló a $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$-hoz! *(2 pont)*

pl. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

7. Mik az $\mathbf{A}$ mátrix legjobb 2 rangú közelítésének a szinguláris értékei, ha $\mathbf{A}$ szinguláris értékei 3, 2 és 1?

3, 2

8. Adjuk meg annak a mátrixnak a karakterisztikus és minimálpolinomját, amelynek a sajátértékei 0 és -1, és a 0-hoz tartozó Jordan-blokkok 2 és 3, a -1-hez tartozók pedig 1, 1, 2 méretűek! *(2 pont)*

kar. pol.: $-x^5(x+1)^4$,
min. pol.: $x^3(x+1)^2$

9. Mi egy sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása? *(2 pont)*

ld. 3. diasor, 24. o.

10. Mi egy mátrix indukált normája? *(2 pont)*

ld. 9. diasor, 14. o.

11. Mondjuk ki a valós pozitív definit mátrixok két különböző, mátrixfelbontással való jellemzését! *(3 pont)*

ld. 5. diasor, 32. o.

12. Mondjuk ki az Hermite-féle interpolációs tételt! *(3 pont)*

Különbözőképpen szerepelt a két előadáson:
WF: 8. diasor, 14. oldal tétele a 12. oldalon szereplő definícióval együtt
LE: Általánosan, polinomokra kimondva:
Legyenek $K \leq \mathbb{C}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ különbözők, $f_{ij} \in K$ ($i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, k_i$, $\sum k_i = m$). Ekkor $\exists! p(x) \in K$, hogy $\deg p(x) \leq m-1$, és $f^{(j)}(\lambda_i) = f_{ij}$ $\forall i, j$.

13. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a mátrix soraihoz tartozó Gersgorin-körökről szóló tételt! *(4 pont)*

ld. 3. diasor, 59. o.: a tétel első állítása és annak bizonyítása

14. Bizonyítsuk be, hogy a sajátalterek összege direkt összeg! *(6 pont)*

ld. 3. diasor, 47-48. o.