BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Bevezetés az algebrába 2

BMETE91AM37

Alkalmazások

H607 – 2018-05-14

Wettl Ferenc
ALGEBRA TANSZÉK

Kombinatorika

Kombinatorika

Fisher-egyenlőtlenség

D Tekintsük a v-elemű P halmaz részhalmazainak egy halmazát. E részhalmazokat blokkoknak nevezzük, míg P elemeit pontoknak. Azt mondjuk, hogy e blokkok 2-struktúrát alkotnak, ha P bármely két pontja pontosan $\lambda > 0$ számú blokkban van, és van legalább egy nem triviális blokk a rendszerben, azaz amelynek legalább 2 pontja van, de nem tartalmazza P összes pontját.

T Fisher-egyenlőtlenség: Bármely 2-struktúra blokkjainak száma legalább annyi, mint pontjaié, azaz $b \geqslant v$.

B Jelöljék a 2-struktúra pontjait az 1-től v-ig terjedő egészek, a j-edik blokkot B_j $(j = 1, 2, \ldots, b)$. Illeszkedési mátrixa M, ahol

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i \in B_j, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$$\mathsf{A} = \mathsf{M}\mathsf{M}^\top = \begin{bmatrix} r_1 & \lambda & \ldots & \lambda \\ \lambda & r_2 & \ldots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \ldots & r_v \end{bmatrix} = \lambda \mathsf{J}_v + \operatorname{diag}(r_1 - \lambda, r_2 - \lambda, \ldots, r_v - \lambda),$$

ahol J_v a csupa 1-esből álló $v \times v$-es mátrix, és r_i az i pont foka.

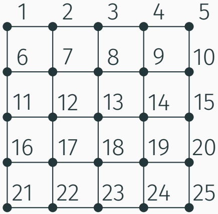
- A J_v pozitív szemidefinit, ugyanis szimmetrikus és ha $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^v$ tetszőleges, akkor $\mathbf{x}^\top \mathsf{J}_v \mathbf{x} = \sum_{i,j} x_i x_j = (\sum_i x_i)^2 \geqslant 0$.
- $\operatorname{diag}(r_1 - \lambda, r_2 - \lambda, \ldots, r_v - \lambda)$ poz.def, mert $r_i > \lambda$. ($r_i = \lambda$ esetén $\forall j \neq i$ pontra az i-t tartalmazó blokkok tartalmaznák j-t is, vagyis nem létezne nem triviális blokk.)
- Pozitív definit + pozitív szemidefinit = pozitív definit $\rightsquigarrow$ A invertálható, rangja v $\rightsquigarrow$ $\mathsf{M}_{v \times b}$ rangja v $\rightsquigarrow$ $b \geqslant v$.

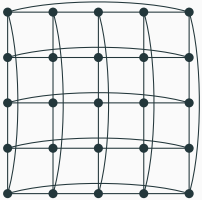
Kombinatorika

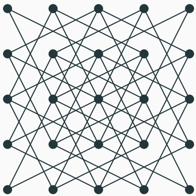
Lámpácskás játék

m lámpák egyúttal kapcsolók is, megnyomásukra megváltozik a saját és bizonyos „szomszédaik” állapota is.

- „XL25” 1983, Mérő László, „Lights Out!” 90-es évek
- „Button Madness”, a szomszédság a határon átnyúlik (tórusz),
- „Gamze”, ahol a lámpák rombuszalakban vannak elhelyezve,
- „Lights Out 2000”, a lámpáknak három állapotuk van (kikapcsolt, piros, zöld),
- „Lights Out Cube”, a lámpák egy $3 \times 3 \times 3$-as kocka oldalain vannak,
- „Orbix”, ahol a lámpák egy dodekaéder csúcsaira vannak helyezve,
- „Merlin”, 70-es évek 3×3-as táblán







Illeszkedési mátrix

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix}
1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1&1
\end{bmatrix}$$

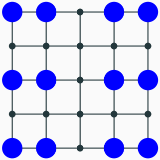
- Egy gomb páros sokszori megnyomása olyan, mintha egyszer sem nyomtuk volna meg, míg páratlan sokszori megnyomása egy nyomással ekvivalens. Eszerint a nyomások számát modulo 2 számolhatjuk, vagyis $\mathbb{F}_2$ elemeivel.
- Másrészt a fenti mátrix is tekinthető $\mathbb{F}_2$ fölöttinek, melynek i-edik oszlopa azt adja meg, hogy az i jelű gomb megnyomására mely lámpák állapota változik meg.
- Jelölje $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^{25}$ azt a vektort, melynek x_i koordinátája 1, ha az i gombot páratlan sokszor nyomtuk meg, és 0, ha páros sokszor. $\mathbf{Ax}$ azt a vektort adja eredményül, melynek i-edik koordinátája akkor 1, ha az i gomb állapota az $\mathbf{x}$ vektor szerinti gombok megnyomása után megváltozik, és akkor 0, ha nem.
- Ha kezdetben a lámpák állapotát egy $\mathbf{b}$ vektor írja le ($b_i = 1$, ha az i lámpa ég, $b_i = 0$, ha nem), akkor e lámpák pontosan akkor kapcsolhatók le, ha van olyan $\mathbf{x}$ vektor, melyre $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

- Ha minden lámpa ég, akkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{1}$ egyenletet kell megoldani:

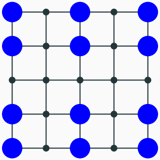
$$
\mathsf{R} = \mathsf{rref}(\mathsf{A}) = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

- A nem invertálható $\rightsquigarrow$ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nem oldható meg minden $\mathbf{b}$ vektorra!
- $r(\mathsf{A}) = 23$, $\dim(\mathcal{N}(\mathsf{A})) = 25 - 23 = 2$, négy vektora: $\mathbf{0}$, $\mathbf{u} = 1101100000110110000011011$, $\mathbf{v} = 1010110101000001010110101$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} = 0111010101110111010101110$.

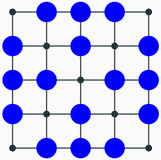
- Ezek tehát azok a minták, melyek gombjainak megnyomása nem változtatja meg a a lámpák állapotát:



az $\mathbf{u}$ vektor

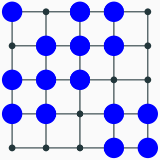


a $\mathbf{v}$ vektor

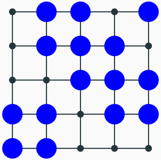


az $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ vektor

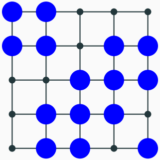
- Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{1}$ megoldásai egyikéhez a nulltér fenti elemeit hozzáadva megkapjuk az összes megoldást:



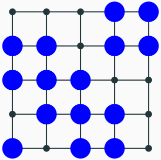
$\mathbf{x}$



$\mathbf{x} + \mathbf{u}$



$\mathbf{x} + \mathbf{v}$



$\mathbf{x} + \mathbf{u} + \mathbf{v}$

F Jellemezzük a meg nem oldható konfigurációkat!

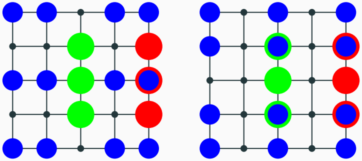
M A megoldhatók az $\mathbf{A}$ oszlopterében vannak, azon kívül a nem megoldhatók.

$\mathbf{A} = \mathbf{A}^\mathsf{T} \rightsquigarrow \mathcal{O}(\mathbf{A}) = \mathcal{S}(\mathbf{A})$ és $\mathcal{N}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{O}(\mathbf{A}) \rightsquigarrow$

$\mathbf{b} \in \mathcal{O}(\mathbf{A}) \iff \mathbf{b} \perp \mathcal{N}(\mathbf{A}) \iff \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 0$ (ahol $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ és $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ a nulltér három nemzérus vektora) $\mathbf{b} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} = 0 \rightsquigarrow$

$\mathbf{b} \notin \mathcal{O}(\mathbf{A}) \iff \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} = 1$ vagy $\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} = 1 \iff$ ha a $\mathbf{b}$ minta pontosan akkor nem kapcsolható le, ha az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ legalább egyikét páratlan sok pontban metszi.

\- Például az alábbi zöld minta lekapcsolható, a piros nem:



Kombinatorika

Gráfok

Á Egy egyszerű G gráf adjacencia (szomszédsági) mátrixát jelölje $\mathbf{A}_G$. Ekkor

1. $\operatorname{trace}(\mathbf{A}_G) = 0$
2. $\mathbf{A}_G$ szimmetrikus 2×2-es minorainak összege = $-|E(G)|$
3. $\mathbf{A}_G$ szimmetrikus 3×3-as minorainak összege = $2 \times$ háromszögek száma.
4. Ha $d(i, j) = k$ (a két pont távolsága G-ben), akkor $\mathbf{I}$, $\mathbf{A}_G$,..., $\mathbf{A}_G^k$ lineárisan függetlenek.

B

1. A főátlóban 0-k vannak.
2. Az i-edik és j-edik sorok kereszteződésében lévő ilyen minor pontosan akkor nem a zérusmátrix, ha i és j indexű pontok össze vannak kötve G-ben, ekkor viszont a minor $|[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}]| = -1$.
3. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$

T Ha G egyszerű, akkor A_G sajátértékeire

$$\sum_i \lambda_i^k$$

a k-hosszú zárt séták számát adja ($k \in \mathbb{N}^+$).

B $k = 1$: nincs hurokél $\rightsquigarrow$

$$\sum_i \lambda_i = \operatorname{trace}(\mathsf{A}_G) = 0.$$

$k = 2$: nincs többszörös él $\rightsquigarrow$ A_G^2 főátlójában a pontok fokai vannak, és minden élen két 2-hosszú zárt séta tehető:

$$\sum_i \lambda_i^2 = \operatorname{trace} \mathsf{A}_G^2 = \sum_{j=1}^{v} d_j = 2|E(G)|,$$

$k > 2$: hasonlóan $\operatorname{trace} \mathsf{A}_G^k$ a zárt k-hosszú séták száma.

Páros gráfok spektruma

T A G gráf pontosan akkor páros, ha spektruma szimmetrikus az origóra.

B (G gráf $\Rightarrow$ szimmetrikus a spektrum): G páros gráf $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A}_G$ blokkmátrix alakja

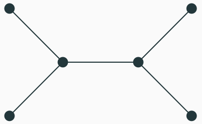
$$\mathbf{A}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^\mathsf{T} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ ha $(\lambda, (\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ sajátpár, akkor $(-\lambda, (\mathbf{u}, -\mathbf{v}))$ is, ui.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^\mathsf{T} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}\mathbf{v} \\ \mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{u} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^\mathsf{T} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ -\mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}\mathbf{v} \\ \mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{u} \end{bmatrix} = -\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ -\mathbf{v}. \end{bmatrix}$$

- (szimmetrikus a spektrum $\Rightarrow$ G páros): szimmetrikus a spektrum $\rightsquigarrow \sum_{i=1}^{s} \lambda_i^{2k+1} = 0 \rightsquigarrow$ a páratlan körök száma 0 $\rightsquigarrow$ G páros.

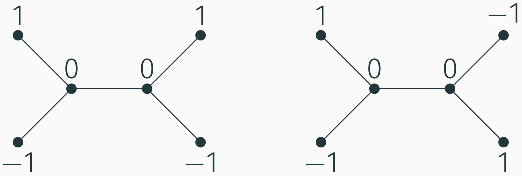
P Határozzuk meg az alábbi G gráf spektrumát csak a gráf alapján, az adjacenciamátrix felírása nélkül:



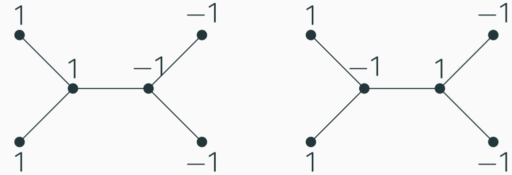
M $A_G\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ jelentése: minden csúcsra írunk egy x_i súlyt úgy, hogy az x_i súlynak az i-edik csúcs szomszédaira írt súlyok összege épp a λ-szorosa legyen ($\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_6)$).

- Vegyük észre, hogy e gráf páros, így spektruma szimmetrikus.
- Próbálkozzunk a levelekre 1-et vagy -1-et írni, hisz a sajátvektor egy konstanssal beszorozható.
- Lehet-e λ a $0, 1, 2$ számok valamelyike?

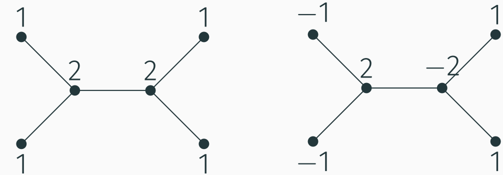
- $\lambda = 0$:



- $\lambda = \pm 1$:



- $\lambda = \pm 2$:



Hibajavító kódok

Hibajelző és hibajavító kódok

D Hamming-távolság: $d_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\{i : x_i \neq y_i\}|$

P $d_H(01001110, 01101100) = 2$

m ez metrika

Alappéldák: egyszerű hibajelző és hibajavító kódok

- **Ismétlő kód:** a kódábécé tetszőleges, és a kód álljon azokból az n-hosszú kódszavakból, melyek minden koordinátája azonos. E kód legföljebb $n-1$ hibát jelez, és $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ hibát javít.
- **Paritásellenőrző kód:** $(n-1)$-hosszú $\mathbf{b}$ bitvektorhoz még egy bitet csatolunk, melynek értéke 1, ha $\mathbf{b}$-ben páratlan sok bit egyenlő 1-gyel, egyébként 0, akkor olyan n-hosszú vektort kapunk, melyben páros sok 1-es van.

  A paritásellenőrző kód 1-hibajelző, de jelez minden olyan hibát, melyben páratlan sok koordináta változik meg.
- **Nullösszegű kód:** $\mathbb{Z}_m^n$ összes olyan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ vektorából álló kód, melyekre $v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 0$, azaz melyekre $\mathbf{1} \cdot \mathbf{v} = 0$.

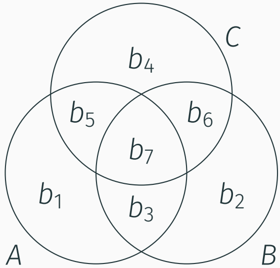
Hamming-kód

D Bináris $[7,4,3]_2$ Hamming-kód (7-hosszú kódszavak, egy 4-hosszú üzenethez három paritásbitet ad, és bármely két kódszó távolsága ≥ 3, binűris): A kódolandó üzenet $b_3b_5b_6b_7$, a kód $\mathbf{b} = b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7$, a b_1, b_2, b_4 paritásbitekre fennállnak:

$$b_1 + b_3 + b_5 + b_7 = 0$$

$$b_2 + b_3 + b_6 + b_7 = 0$$

$$b_4 + b_5 + b_6 + b_7 = 0$$



Á A kód $\mathbb{F}_2^7$ 16 vektorából áll, 2-hibajelző, és 1-hibajavító. $\mathbb{F}_2^7$ minden vektora vagy kódvektor, vagy egyetlen koordináta megváltoztatásával azzá tehető!

Á A fenti Hamming-kód perfekt, azaz a kódszavak köré emelt (Hamming-távolságban mérve) 1-sugarú gömbök hézagtalanul és átfedés nélkül lefedik az $\mathbb{F}_2^7$ teret.

HF 7 halálraítélt körben ül, mindegyikük fején egy véletlenül kiválasztott piros vagy fekete sapka. Mindenki látja a többiek sapkáját, de a sajátját senki. Semmi módon nem kommunikálhatnak egymással. Egy idő után egyszerre mindegyiküknek tippelnie kell a saját sapkája színére. Három válasz lehetséges: „nem tudom”, „fekete”, „piros”. Ha senki nem találja el, vagy csak egy is akad, aki téved, mind meghalnak, egyébként mind megmenekülnek. Javasoljunk olyan eljárást, amivel a legnagyobb eséllyel menekülhetnek?

Titokmegosztás

Küszöbséma interpolációs polinommal (Shamir)

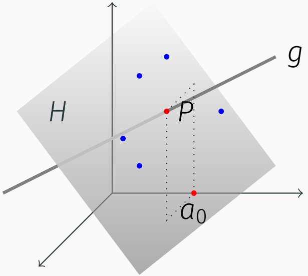
n ember közül bármely k föl tudja fedni a titkot: (n, k) küszöbséma.

Interpolációs polinommal: korábban vettük

Geometriai konstrukció (Blakley)

K a t-dimenziós $\mathcal{V} = \mathbb{F}_q^t$ tér egy véletlen $P = (a_0, \ldots, a_{t-1})$ pontjának első koordinátája a titok. Publikálva van egy ezen a ponton átmenő g egyenes, mely nem merőleges az $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ vektorra, így pontjainak első koordinátái végigfutnak $\mathbb{F}_q$ elemein.

\- A résztvevők megkapják egy P-n átmenő, de $\mathbf{e}_1$-re nem merőleges és g-t nem tartalmazó H (affin) hipersík egy-egy általános helyzetű pontját. Így bármely t résztvevő egyértelműen föl tudja írni H egyenletét, és a g-vel való metszéspontját.



Tetszőleges részhalmazokra (Brickel)

K titok: $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_t) \in \mathbb{F}_q^{t+1}$ vektort első koordinátája, az $a_0 \in \mathbb{F}_q$

A p_i résztvevőhöz rendel egy $\mathbf{v}_i \in \mathbb{F}_q^{t+1}$ vektort, publikálja.

résztitok: $s_i = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{a} \in \mathbb{F}_q$

T Jelölje $T \subseteq P$ a résztvevők egy halmazát. A T-be tartozó résztvevők pontosan akkor tudják meghatározni a_0-t, ha az $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ vektor benne van a T-beli résztvevők vektorai által kifeszített altérben. Ha $\mathbf{e}_1$ nincs ebben az altérben, a T-beli résztvevők semmit nem tudnak meg a titokról.

B A $\mathbf{V}$ mátrix sorai a T-beliek vektorai, és $\mathbf{s}$ koordinátái a T-beliek résztitkai.

TFH $\mathbf{e}_1 \in \mathcal{S}(\mathbf{V}) \rightsquigarrow$ létezik olyan $\mathbf{w}$ vektor, hogy $\mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{V} = \mathbf{e}_1^\mathsf{T}$, így $\mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{V}\mathbf{a} = a_0$. Mivel a konstrukció szerint $\mathbf{V}\mathbf{a} = \mathbf{s}$, ezért $\mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{s} = a_0$, hisz $\mathbf{w}$ a T-beli résztvevők által meghatározható.

TFH $\mathbf{e}_1 \notin \mathcal{S}(\mathbf{V})$. $\mathbf{V} = [\mathbf{u}_0|\mathbf{u}_1|\dots|\mathbf{u}_t]$. Ha $\mathbf{u}_0 \notin \operatorname{span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_t)$, akkor van olyan $\mathbf{d}$ vektor, hogy $\mathbf{d} \cdot \mathbf{u}_i = 0$, ha $i = 1, 2, \dots, t$, és $\mathbf{d} \cdot \mathbf{u}_0 = 1$.

$\rightsquigarrow \mathbf{d}^\mathsf{T}\mathbf{V} = \mathbf{e}_1$, ellentmondás $\rightsquigarrow \mathbf{u}_0 \in \operatorname{span}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_t)$, így van olyan $\mathbf{w}$ vektor, hogy $\mathbf{V}\mathbf{w} = \mathbf{0}$, de $w_0 \neq 0$. Az ugyan igaz, hogy $\mathbf{s} = \mathbf{V}\mathbf{a}$, de tetszőleges $c \in \mathbb{F}_q$ konstansra $\mathbf{s} = \mathbf{V}\mathbf{a} = \mathbf{V}(\mathbf{a} + c\mathbf{w})$ is teljesül. Így bármely c_0-hoz található olyan $\mathbf{c} = (c_0, c_1 \dots, c_t)$ vektor, hogy $\mathbf{s} = \mathbf{V}\mathbf{c}$. Így a T-beli résztvevők semmit nem tudhatnak a_0-ról.

Differenciaegyenlet-rendszerek

Fibonacci-sorozat explicit alakja

P A Fibonacci-sorozat $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987,...) explicit alakja:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

M Keressünk a rekurzív képletre $F_n = \lambda^n$ alakú megoldást!
$\lambda^{n+1} = \lambda^n + \lambda^{n-1} \rightsquigarrow \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \rightsquigarrow \lambda_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
Az $(1, \lambda_i, \lambda_i^2, \dots)$ sorozatok lin. ftlenek, ui. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{vmatrix} \neq 0$

- Lineáris kombinációik mind megoldások: $c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
- A kezdeti feltételek ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$) kielégítéséhez megoldandó

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1\frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2\frac{1-\sqrt{5}}{2} &= 1 \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad c_1 = -c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Állandó együtthatós homogén lineáris differenciaegyenlet

D d-edrendű állandó együtthatós homogén lineáris differenciaegyenlet (d-edrendű rekurzív sorozat):

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \ldots + a_d x_{n-d}, \tag{DAE}$$

ahol $a_1, a_2, \ldots, a_d$ és a kezdeti feltételül szolgáló $x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}$ adott konstansok, $x_d, x_{d+1}, \ldots$ ismeretlenek.

Á Ha $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ és $(y_0, y_1, y_2, \ldots)$ megoldásai egy (állandó együtthatós) homogén lineáris differenciaegyenletnek, akkor tetszőleges $c, d \in \mathbb{R}$ konstansokra $(cx_0 + dy_0, cx_1 + dy_1, \ldots)$ is.

D A DAE karakterisztikus polinomja $\chi(t) = t^d - a_1 t^{d-1} - a_2 t^{d-2} - \ldots - a_d$, gyökei a sajátértékek.

\- E definíció eredetét hamarosan megvilágítjuk.

Differenciaegyenlet-rendszerek

Differenciaegyenlet-rendszerek megoldása

Differenciaegyenletrendszer (DAER)

D Elsőrendű lineáris differenciaegyenlet-rendszer:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n \qquad \text{homogén}$$

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{b}_n \qquad \text{inhomogén}$$

ahol $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$... ismert vektorok, $\mathbf{x}_n$ ismeretlen, ha $n > 0$.

T Az elsőrendű lineáris differenciaegyenlet-rendszer megoldása

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{x}_0, \qquad \text{(homogén)}$$

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{A}^{n-1-i}\mathbf{b}_i, \qquad \text{(inhomogén)}$$

ahol $n > 0$.

B Behelyettesítés ✓. A rekurzióból következik a mo. egyértelműsége.

F Milyen $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixra igaz, hogy az $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n + \mathbf{b}$ sorozat minden $\mathbf{b}, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ vektorra konvergens? Mi a határérték?

M A tétel szerint $\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{x}_0 + (\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^{n-1})\mathbf{b}$: ekkor $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ esetén $\forall\, \mathbf{b}$-re konv $\iff$ $\mathbf{I} + \mathbf{A} + \ldots + \mathbf{A}^{n-1}$ konv $\iff$ $\rho(\mathbf{A}) < 1$

\- $\rightsquigarrow \lim_{n\to\infty} \mathbf{A}^n = \mathbf{O}$, $\lim_{n\to\infty} \mathbf{I} + \mathbf{A} + \ldots + \mathbf{A}^{n-1} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \rightsquigarrow$ $\mathbf{x}_n \to \mathbf{O}\mathbf{x}_0 + (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$, ami *nem függ* $\mathbf{x}_0$-tól.

P Konvergens-e az $\mathbf{x}_n = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}_{n-1} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ sorozat? Mi a határértéke?

M $\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} - \lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \dfrac{1}{3}\lambda - \dfrac{1}{3}$

$\chi(-1) > 0$, $\chi(0) < 0$, $\chi(1) > 0 \rightsquigarrow \rho(\mathbf{A}) < 1 \rightsquigarrow$ a sorozat konvergens!

\- $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$

m Minden állandó együtthatós d-edrendű homogén lineáris differenciaegyenlet átírható elsőrendű homogén lineáris differenciaegyenlet-rendszerré (DAER): ha $x_n - a_1 x_{n-1} - \ldots - a_d x_{n-d} = 0$ $(x_d - a_1 x_{d-1} - \ldots - a_d x_0 = 0)$, akkor

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{d-1} \\ x_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ a_d & a_{d-1} & \ldots & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{d-2} \\ x_{d-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \text{ ill.}$$

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+d-1} \\ x_{n+d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ a_d & a_{d-1} & \ldots & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_{n+d-2} \\ x_{n+d-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n,$$

ahol $\mathbf{x}_n = (x_n, \ldots, x_{n+d-1})$, és $\mathbf{A}$ a $\chi(t)$ kísérő mátrixának transzponáltja, melynek sajátértékei épp a DAE sajátértékei, és melyre $\mu(t) = \pm\chi(t)$, így minden s.ért.-hez egy J-blokk tartozik.

Differenciaegyenlet-rendszerek

Differenciaegyenlet megoldása

T DAE összes megoldása:

1. Ha λ sajátértéke a (DAE) DAE-nek, akkor az $x_n = \lambda^n$ sorozat egy megoldás.
2. Ha a (DAE) spektruma $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$, ahol a λ_i algebrai multiplicitása a_i, akkor a (DAE) összes megoldása előáll
$$x_n = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{a_i - 1} c_{ij} n^j \lambda_i^n$$
alakban. A c_{ij} együtthatók megkaphatók a kezdeti feltételekből.
3. Speciálisan, ha a (DAE) sajátértékei mind különbözőek, akkor az összes megoldás előáll
$$x_n = \sum_{i=1}^{d} c_i \lambda_i^n$$
alakban.

B 1. $\chi(\lambda) = 0 \rightsquigarrow \lambda^d = a_1\lambda^{d-1} + a_2\lambda^{d-2} + \ldots + a_d \rightsquigarrow$
$\lambda^n = a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_d\lambda^{n-d} \rightsquigarrow \lambda^n$ megoldás.

- 2. $\mathbf{x}_n = \mathbf{A}\mathbf{x}_{n-1} \rightsquigarrow \mathbf{x}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{x}_0 \rightsquigarrow \mathbf{x}_n = \mathbf{C}\mathbf{J}^n\mathbf{C}^{-1}\mathbf{x}_0$.
- $\mathbf{J}^n$ egy a algebrai multiplicitású λ-hoz tartozó diagonális blokkja

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}_{a\times a}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & \binom{n}{1}\lambda^{n-1} & \dots & \\ 0 & \lambda^n & \dots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^n \end{bmatrix}.$$

- E blokk minden eleme a λ^n, $n\lambda^n$, $n^2\lambda^n$, ..., $n^{a-1}\lambda^n$ elemek konstans (n-től független!) együtthatókkal vett lineáris kombinációja (pl. $\binom{n}{1}\lambda^{n-1} = (\frac{1}{\lambda})n\lambda^n$, $\binom{n}{2}\lambda^{n-2} = \frac{n^2-n}{2}\lambda^{n-2} = (\frac{1}{2\lambda^2})n^2\lambda^n - (\frac{1}{2\lambda^2})n\lambda^n$,...)
$\rightsquigarrow \mathbf{C}\mathbf{J}^n\mathbf{C}^{-1}$ minden eleme a λ_i^n, $n\lambda_i^n$, $n^2\lambda_i^n$, ..., $n^{a_i-1}\lambda_i^n$ elemek lineáris kombinációja, ahol a_i a λ_i multiplicitása.
- 3. következik az előzőből, hisz ekkor $a_i = 1$ minden $i = 1, 2, \ldots, d$-re.

P $x_n = 5x_{n-1} - 8x_{n-2} + 4x_{n-3}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.

M $\chi(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 \rightsquigarrow$

Összes megoldás: $x_n = c_1 1^n + c_2 2^n + c_3 n 2^n$.

Kezdeti feltételekből: $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 1$,

\- $x_n = 1 - 2^n + n2^n$, (0, 1, 5, 17, 49, 129,...)

P $x_n = -2x_{n-1} - 5x_{n-2}$, $x_0 = x_1 = 1$.

M $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 5 = (\lambda + 1 - 2\mathrm{i})(\lambda + 1 + 2\mathrm{i}) \rightsquigarrow$

Összes megoldás: $x_n = c_1(-1 + 2\mathrm{i})^n + c_2(-1 - 2\mathrm{i})^n$.

Kezdeti feltételekből: $c_1 = (1 - \mathrm{i})/2$, $c_2 = (1 + \mathrm{i})/2$,

\- $x_n = \frac{1 - \mathrm{i}}{2}(-1 + 2\mathrm{i})^n + \frac{1 + \mathrm{i}}{2}(-1 - 2\mathrm{i})^n$, $(1, 1, -7, 9, 17, -79, \ldots)$

P Konvergens-e az $x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n - \frac{1}{4}x_{n-1} + 1$ sorozat? Mi a határértéke?

M $$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} - x \end{vmatrix} = x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \rightsquigarrow$$

$\rho(\mathsf{A}) < 1 \rightsquigarrow$ a sorozat konvergens.

tudjuk hogy konv: tfh $x_n \to a \rightsquigarrow x_{n-1} \to a$, $x_{n+1} \to a$ és

$x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n - \frac{1}{4}x_{n-1} + 1 \rightsquigarrow a = \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}a + 1 \rightsquigarrow a = 1.$

m Természetesen számolhatunk a mátrixinverzzel, de az itt több számolást igényel. Ellenőrzésül:

$$(\mathsf{I} - \mathsf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

Differenciaegyenlet-rendszerek

Differenciaegyenletek alkalmazásai

P Számítsuk ki az alábbi n-edrendű determináns értékét:

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

M $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$, ugyanis az első sor szerint kifejtve

$$D_n = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(n-1)} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 & & & 0 \\ 0 & 2 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(n-1)} - \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(n-2)}$$

- $D_1 = 2$, $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$

  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 \rightsquigarrow \lambda = 1$

  A két független megoldás $(1, 1, 1, 1, \dots)$, $(0, 1, 2, 3, \dots)$
- D_1: $c_1 + c_2 = 2$, D_2: $c_1 + 2c_2 = 3 \rightsquigarrow c_1 = c_2 = 1$
- $\rightsquigarrow D_n = n + 1.$

P Számítsuk ki az alábbi integrál értékét, ha $a \in \mathbb{R}$ konstans, $a \neq k\pi$:

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\cos nx - \cos na}{\cos x - \cos a}\,\mathrm{d}x$$

M $I_0 = 0$, $I_1 = \pi$, $I_{n+1} - (2\cos a)I_n + I_{n-1} = 0$, ugyanis

$$\int_0^\pi \frac{\cos nx \cos x - \sin nx \sin x - \cos na \cos a + \sin na \sin a}{\cos x - \cos a}$$

$$- 2\cos a \frac{\cos nx - \cos na}{\cos x - \cos a}$$

$$+ \frac{\cos nx \cos x + \sin nx \sin x - \cos na \cos a - \sin na \sin a}{\cos x - \cos a}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^\pi 2\cos nx\,\mathrm{d}x = 0, \text{ mert } n > 0.$$

- $\lambda^2 - (2\cos a)\lambda + 1 = 0 \rightsquigarrow \lambda_{1,2} = \dfrac{2\cos a \pm \sqrt{4\cos^2 a - 4}}{2} = \mathrm{e}^{\pm a\mathrm{i}}$

  az alapmegoldások: $(1, \mathrm{e}^{a\mathrm{i}}, \mathrm{e}^{2a\mathrm{i}}, \mathrm{e}^{3a\mathrm{i}}, \dots)$, $(1, \mathrm{e}^{-a\mathrm{i}}, \mathrm{e}^{-2a\mathrm{i}}, \mathrm{e}^{-3a\mathrm{i}}, \dots)$.

  $c_1 + c_2 = 0$, $c_1\mathrm{e}^{a\mathrm{i}} + c_2\mathrm{e}^{-a\mathrm{i}} = \pi \rightsquigarrow$

  $c_1(2\mathrm{i}\sin a) = \pi \rightsquigarrow c_1 = \dfrac{\pi}{2\mathrm{i}\sin a}$

- $I_n = \dfrac{\pi}{2\mathrm{i}\sin a}(\cos na + \mathrm{i}\sin na) - \dfrac{\pi}{2\mathrm{i}\sin a}(\cos na - \mathrm{i}\sin na) = \pi\dfrac{\sin na}{\sin a}$