BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Bevezetés az algebrába 2

BMETE91AM37

Vektor- és mátrixnorma

H607 – 2018-05-09

Wettl Ferenc
ALGEBRA TANSZÉK

Norma

Norma

Euklideszi vektornorma és p-norma

D Az $\mathbf{x}$ vektor euklideszi normája vagy más néven abszolút értéke

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x}}, \qquad \text{ha } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{\mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{x}}, \qquad \text{ha } \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n.$$

m Manhattan $(|x| + |y|)$, képméretezés $(\max\{|x|, |y|\})$.

D A $p \geq 1$ valósra az $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ vektor p-normája $\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$, míg ennek határértéke a ∞-norma, azaz $\|\mathbf{x}\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|\mathbf{x}\|_p$.

m 1-norma = rácsnorma = Manhattan-norma

Á ∞-norma = maximum norma, azaz

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|\mathbf{x}\|_p = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} = \max_i |x_i|.$$

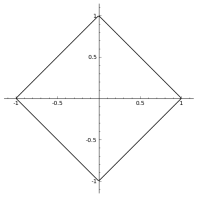
B a legnagyobb abszolút értékű koordináta $x_{\max}$ ($|x_i|/|x_{\max}| \le 1$)

$$1 \le \sum_{i=1}^{n} |x_i/x_{\max}|^p \le n.$$

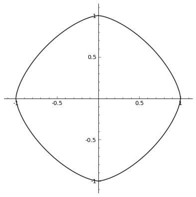
Mindegyik kifejezést $1/p$-edik hatványra emelve, majd $|x_{\max}|$-szal beszorozva kapjuk, hogy

$$|x_{\max}| \le |x_{\max}| \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{x_i}{x_{\max}} \right|^p \right)^{1/p} \le |x_{\max}| n^{1/p},$$

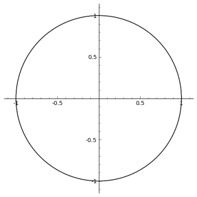
Egységsugarú körök



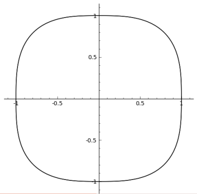
$p = 1$



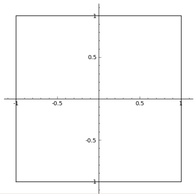
$p = \frac{3}{2}$



$p = 2$

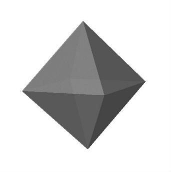


$p = 3$



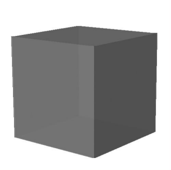
$p = \infty$

Egységsugarú gömbök



$p = 1$

$p = 2$



$p = \infty$

P Számítsuk ki az alábbi vektorok megadott normáit!

1. $\mathbf{x} = (\sqrt{3} - \mathrm{i}, 6\mathrm{i}, 3)$, $\mathbf{y} = (0.1, -0.2, -0.2)$, $p = 1, 2, \infty$;
2. $(1, 2, 2)$, $(2, 3, 6)$, $(1, 4, 8)$, $(4, 4, 7)$, $p = 2$;
3. $(\mathrm{i}, 2, \sqrt{2} - \sqrt{2}\mathrm{i}, -4i)$, $p = 1, 2, \infty$;
4. $(3, 4, 5)$, $(11, 12, 13, 14)$, $p = 3$;
5. $\|(95800, 217519, 414560)\|_4$, $\|(27, 84, 110, 133)\|_5$.

M

1. $\|\mathbf{x}\|_1 = 11$, $\|\mathbf{x}\|_2 = 7$, $\|\mathbf{x}\|_\infty = 6$, $\|\mathbf{y}\|_1 = 0.5$, $\|\mathbf{y}\|_2 = 0.3$, $\|\mathbf{x}\|_\infty = 0.2$.
2. Pitagorászi számnégyesek: a normák 3, 7, 9, 9.
3. 9, 5, 4;
4. 6, 20;
5. e két példa a $p = 4$ és $p = 5$ értékre a legkisebb olyan $p - 1$-dimenziós pozitív egész vektor, melynek p-normája egész: $\|(95800, 217519, 414560)\|_4 = 422481$, $\|(27, 84, 110, 133)\|_5 = 144$. Euler még azt sejtette, hogy ilyen nincs.

Norma

A norma általános fogalma

A norma definíciója

Á Az előző normák alaptulajdonságai:

- $\|\mathbf{x}\| \geq 0$
- $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ($\rightsquigarrow$ a $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ távolságfüggvény szeparálja a pontokat, azaz két különböző pont távolsága sosem 0)
- $\|c\mathbf{x}\| = |c|\|\mathbf{x}\|$ (pozitív homogenitás)
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (háromszögegyenlőtlenség)

D Az $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (vagy $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$) függvény norma, ha $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ($\in \mathbb{C}^n$) vektorra és $\forall\, c \in \mathbb{R}$ ($\in \mathbb{C}$) skalárra

- $f(\mathbf{x}) \geq 0$, és $f(\mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$,
- $f(c\mathbf{x}) = |c| f(\mathbf{x})$,
- $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$.

Néhány tulajdonság

m $\|\mathbf{x}\| = \|-\mathbf{x}\|$ bármely $\|.\|$ normára igaz, hisz $\|-\mathbf{x}\| = |-1|\,\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$.

m háromszögegyenlőtlenség másik alakja: $\|\mathbf{z}-\mathbf{x}\| \geq \Big|\|\mathbf{z}\| - \|\mathbf{x}\|\Big|$

m Minkowski-egyenlőtlenség a háromszögegyenlőtlenség p-normára:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p \leq \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p\,. \tag{1}$$

m A Hölder-egyenlőtlenség a CBS-egyenlőtlenség általánosítása:

$$|\mathbf{x}^{\mathrm{H}}\mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|_p\,\|\mathbf{y}\|_q\,,\ \text{ahol}\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{2}$$

Á Ha $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$ egy norma, és A egy egy-egy értelmű lineáris leképezés, akkor az $\mathbf{x} \mapsto \|A\mathbf{x}\|$ leképezés is norma.

Á Minden norma folytonos függvény.

B háromszög-egyenlőtlenségből

Norma

Vektornormák ekvivalenciája

m $\max_i\{|x_i|\} \leq \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$, azaz

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1 .$$

m Másrészt

$$\|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_2 , \ \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_\infty \text{ és } \|\mathbf{x}\|_1 \leq n\,\|\mathbf{x}\|_\infty .$$

D A $\|.\|_a$ és $\|.\|_b$ normák ekvivalensek, ha van olyan c és d pozitív valós szám, hogy $\|.\|_a \leq c\,\|.\|_b$ és $\|.\|_b \leq d\,\|.\|_a$.

m Az 1-, 2- és ∞-normák ekvivalensek

T A $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) téren értelmezett bármely két norma ekvivalens.

m A biz. ötlete: elég az $\|.\|_1$-normával való ekvivalenciát bizonyítani, azaz hogy $\exists c, d\, \forall\, \mathbf{x}$: $c\|\mathbf{x}\|_a \leqslant \|\mathbf{x}\|_1 \leqslant d\|\mathbf{x}\|_a$ A bal $\leqslant$ a háromszögegyenlőtlenségből, a jobb a Bolzano – Weierstrass-tételből adódik. Csak véges dimenziós terekben igaz a tétel, itt tehát a konvergenciakérdésekhez bármelyik norma jó.

Egyenlő távolságra lévő pontok

F Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}^n$-ben az euklideszi metrikában mérve legföljebb $n+1$ olyan pont van, melyek páronkénti távolsága azonos.

M Van $n+1$ ilyen pont: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ közül bármely kettő távolsága $\|\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j\| = \sqrt{2}$, másrészt e vektorok végpontjai benne vannak az $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1} = 1$ hipersíkban, ami n-dimenziós.

- Nincs több: Tfh $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ és $\|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|$ azonos minden $i \neq j$-re. Feltehető, hogy $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ (különben az egyik vektort kivonjuk mindegyikből), és hogy minden távolság $\sqrt{2}$ (különben minden vektort egy megfelelő skalárral szorzunk).

- Ekkor minden $i > 0$-ra $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = 2$, $i \neq j$, $j > 0$-ra $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 1$, ui.

$$2 = \|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|^2 = (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) = \|\mathbf{v}_i\|^2 + \|\mathbf{v}_j\|^2 - 2\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 4 - 2\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j.$$

- Tekintsük az $\mathbf{A} = [\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2|\dots|\mathbf{v}_k]_{n\times k}$ mátrixot. Ekkor

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{bmatrix}_{k\times k}$$

- $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ invertálható, ugyanis

$$|\mathbf{A}^T\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k+1 & k+1 & \dots & k+1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (k+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix} = (k+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = k+1 \neq 0.$$

- $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ invertálható $\rightsquigarrow$ $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = k \rightsquigarrow k \leqslant n \rightsquigarrow k+1 \leqslant n+1$.

F $|\mathsf{A}| = \begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \dots & a \end{vmatrix} =?$

M $\mathsf{A} = b\mathsf{J} + (a-b)\mathsf{I} = p(\mathsf{J})$, ahol $p(x) = bx + a - b$.

$$\mathsf{J} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{bmatrix} \rightsquigarrow \mathsf{A} = p(\mathsf{J}) \sim b \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{bmatrix} + (a-b)\mathsf{I} =$$

$$\begin{bmatrix} a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a-b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a-b+nb \end{bmatrix} \rightsquigarrow |\mathsf{A}| = (a-b)^{n-1}(a-b+nb)$$

F Adjunk meg $\mathbb{R}^n$-ben

(a) $2n$ pontot, amelyek az összegmetrikára és

(b) 2^n pontot, amelyek a maximummetrikára

nézve páronként egyenlő távolságra vannak egymástól.

Mátrixnorma

Mátrixnorma

Vektornorma mátrixokon

D Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mátrix Frobenius-normája

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\|\mathbf{A}_{i*}\|_2^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\|\mathbf{A}_{*j}\|_2^2}.$$

T Frobenius-norma ekvivalens alakjai:

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\operatorname{trace}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i^2}.$$

B $[\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}]_{jj} = \|\mathbf{A}_{*j}\|_2^2$
nyom = sajátértékek összege

Á Bármely $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ vektorra és $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mátrixra $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 \le \|\mathbf{A}\|_F \|\mathbf{x}\|_2$.

B Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenségből:

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}|\mathbf{A}_{i*}\mathbf{x}|^2 \le \sum_{i=1}^{n}\|\mathbf{A}_{i*}\|_2^2\|\mathbf{x}\|_2^2 = \|\mathbf{A}\|_F^2\|\mathbf{x}\|_2^2 .$$

Mátrixnorma

A mátrixnorma általános fogalma

D $\|.\| : \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ mátrixnorma, ha

(1) $\|\mathbf{A}\| \geq 0$, és $\|\mathbf{A}\| = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{A} = \mathbf{O}$,

(2) $\|c\mathbf{A}\| = |c|\,\|\mathbf{A}\|$,

(3) $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$,

(4) $\|\mathbf{AC}\| \leq \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{C}\|$.

D $\|.\|$ egy tetszőleges vektornorma. Ekkor az

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{Ax}\|$$

egyenlőséggel definiált függvényt a vektornorma által indukált mátrixnormának nevezzük.

m Jelölés: $\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1} \|\mathbf{Ax}\|_p$

m Ha lineáris leképezésre értelmezzük, operátornormáról beszélünk.

m A normák ekvivalenciájából $\rightsquigarrow$ bármely normában az egységgömb korlátos és zárt $\rightsquigarrow$ a $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ függvénynek van maximuma és minimuma

Á Ekvivalens alakok: $\|\mathbf{A}\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|\neq 0} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\|\mathbf{x}\|\neq 0} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|}$.

Á A Frobenius-norma mátrixnorma

B (1), (2), (3) igaz, mert $\|.\|_F$ a $\mathbb{K}^{n\times n}$-ben = $\|.\|_2$ a $\mathbb{K}^{n^2}$-ben.

(4) korábban biz.: $\|\mathbf{Ax}\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|_F \|\mathbf{x}\|_2 \rightsquigarrow \|\mathbf{AB}\|_F^2 = \|\mathbf{A}[\mathbf{b}_1|\dots|\mathbf{b}_n]\|_F^2 = \|[\mathbf{Ab}_1|\dots|\mathbf{Ab}_n]\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \|\mathbf{Ab}_i\|_2^2 \leqslant \|\mathbf{A}\|_F^2 \sum \|\mathbf{b}_i\|_2^2 = \|\mathbf{A}\|_F^2 \|\mathbf{B}\|_F^2$

Á Az indukált norma mátrixnorma.

B (1): $\mathbf{A} \neq \mathbf{O} \rightsquigarrow \exists\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} : \mathbf{Ax} \neq \mathbf{0} \rightsquigarrow \dfrac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|} > 0$

- (2): $\max\{\|c\mathbf{Ax}\| : \|\mathbf{x}\| = 1\} = \max\{|c|\,\|\mathbf{Ax}\| : \|\mathbf{x}\| = 1\} = |c| \max\{\|\mathbf{Ax}\| : \|\mathbf{x}\| = 1\}$

- (3): $\forall\ \|\mathbf{x}\| = 1 : \|(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{x}\| = \|\mathbf{Ax}+\mathbf{Bx}\| \leqslant \|\mathbf{Ax}\| + \|\mathbf{Bx}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$

- (4): $\forall\ \|\mathbf{x}\| = 1 : \|(\mathbf{AB})\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{Bx})\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{Bx}\| \leqslant \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|\,\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\|$

Mátrixnorma

Az 1-, 2- és ∞-norma mátrixokra

T Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, ekkor

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \text{legnagyobb abszolút oszlopösszeg}, \tag{3}$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| = \text{legnagyobb abszolút sorösszeg}, \tag{4}$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \left\|\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\right\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \max_{\|\mathbf{y}\|_2=1} |\mathbf{y}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}\mathbf{x}| = \sigma_1, \tag{5}$$

Ha az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertálható, akkor

$$\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \frac{1}{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2} = \frac{1}{\min\limits_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2} = \frac{1}{\sigma_n}, \tag{6}$$

ahol σ_n az $\mathbf{A}$ legkisebb (pozitív) szinguláris értéke.

m Az 1-, a ∞- és a 2-normára szokásos másik elnevezés: oszlopnorma, sornorma és spektrálnorma.

B $p = 1$: ha $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$, akkor

$$\|\mathbf{Ax}\|_1 = \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \le \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

$$\le \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j| \right) \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

E max elérhető, ha a k-adik oszl.össz. a max $\|\mathbf{Ae}_k\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$

- $p = \infty$: ha $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$, akkor

$$\|\mathbf{Ax}\|_\infty = \max_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \le \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \le \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Ez a maximum el is érhető: ha a k-adik sor a max, akkor az

$$\mathbf{x} = \left(\frac{\overline{a_{k1}}}{|a_{k1}|}, \frac{\overline{a_{k2}}}{|a_{k2}|}, \dots, \frac{\overline{a_{kn}}}{|a_{kn}|} \right)$$

vektorra $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$ és $\|\mathbf{Ax}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

- $p = 2$: A CBS-egyenlőtlenség szerint $|\mathbf{y}^H \mathbf{A}\mathbf{x}| \leq \|\mathbf{y}\|_2 \, \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2$, így

$$\max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \max_{\|\mathbf{y}\|_2=1} |\mathbf{y}^H \mathbf{A}\mathbf{x}| \leq \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{A}\|_2 \,.$$

Legyen $\mathbf{x}_0$ az a vektor, melyben $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2$ a max

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}_0\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{A}\|_2 \,, \quad \mathbf{y}_0 = \frac{\mathbf{A}\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{A}\mathbf{x}_0\|_2} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{A}\|_2}.$$

$$\mathbf{y}_0^H \mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \frac{\mathbf{x}_0^H \mathbf{A}^H \mathbf{A}\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{A}\|_2} = \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}_0\|_2^2}{\|\mathbf{A}\|_2} = \frac{\|\mathbf{A}\|_2^2}{\|\mathbf{A}\|_2} = \|\mathbf{A}\|_2 \,.$$

- Az $\|\mathsf{A}\|_2 = \sigma_1$ igazolásához a következő maximumot keressük:

$$\|\mathsf{A}\|_2^2 = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|_2^2}{\|\mathbf{x}\|_2^2} = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}^H\mathsf{A}^H\mathsf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^H\mathbf{x}}.$$

  Legyenek $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ a jobb szinguláris vektorok, ekkor bármely $\mathbf{x} = \sum_j c_j\mathbf{v}_j \neq \mathbf{0}$ vektorra

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{v}_1^H\mathsf{A}^H\mathsf{A}\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1^H\mathbf{v}_1},\ \lambda_1 - \frac{\mathbf{x}^H\mathsf{A}^H\mathsf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^H\mathbf{x}} = \lambda_1 - \frac{\sum_j \lambda_j c_j^2}{\sum_j c_j^2} = \frac{\sum_j(\lambda_1-\lambda_j)c_j^2}{\sum_j c_j^2} \geq 0,$$

  tehát $\|\mathsf{A}\|_2^2 = \lambda_1$, azaz $\|\mathsf{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_1} = \sigma_1$.

- $$\frac{1}{\min\limits_{\|\mathbf{x}\|_2=1}\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|_2} = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1}\frac{1}{\|\mathsf{A}\mathbf{x}\|_2} = \max_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}}\frac{1}{\left\|\mathsf{A}\frac{\mathsf{A}^{-1}\mathbf{y}}{\|\mathsf{A}^{-1}\mathbf{y}\|_2}\right\|_2} = \max_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}}\frac{\|\mathsf{A}^{-1}\mathbf{y}\|_2}{\|\mathbf{y}\|_2}$$
$$= \left\|\mathsf{A}^{-1}\right\|_2.$$

- A^{-1} szinguláris értékei az A szinguláris értékeinek reciprokai $\rightsquigarrow$ A^{-1} legnagyobb sz.ért. az A legkisebb sz.értékének reciproka.

P Számítsuk ki a Frobenius-, 1-, 2- és ∞-normát!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

M $\|A\|_F = 5$, $\|A\|_1 = 6$, $\|A\|_2 = 5$, $\|A\|_\infty = 6$

$\|B\|_F = 5$, $\|B\|_1 = 7$, $\|B\|_2 = 5$, $\|B\|_\infty = 4$

$\|C\|_F = \sqrt{13}$, $\|C\|_1 = 4$, $\|C\|_2 = 3$, $\|C\|_\infty = 4$

P Számítsuk ki a Frobenius-, 1-, 2- és ∞-normát!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

M $\|A\|_F = 9$, $\|A\|_1 = 8$, $\|A\|_2 = 8$, $\|A\|_\infty = 8$.

$\|B\|_F = 3\sqrt{3}$, $\|B\|_1 = 5$, $\|B\|_2 = 3$, $\|B\|_\infty = 5$.

$\|C\|_F = 3\sqrt{3}$, $\|C\|_1 = 5$, $\|C\|_2 = 5$, $\|C\|_\infty = 5$.

- F A Frobenius-norma nem indukált norma.
- \- Ötlet: $\mathsf{A} = \mathsf{I}$
- F Minden önadjungált A mátrixra $\|\mathsf{A}\|_1 = \|\mathsf{A}\|_\infty$
- F Minden unitér A mátrixra $\|\mathsf{A}\|_F = \sqrt{n}$, $\|\mathsf{A}\|_2 = 1$, $1 \leqslant \|\mathsf{A}\|_1, \|\mathsf{A}\|_\infty \leqslant \sqrt{n}$
- \- Számtani közép $\leq$ négyzetes közép
- F Minden normális A mátrixra $\|\mathsf{A}\|_2 = \rho(\mathsf{A})$
- F Igazoljuk, hogy tetszőleges mátrixnormára

$$\rho(\mathsf{A}) \leq \|\mathsf{A}\|,$$

  ahol $\rho(\mathsf{A})$ az A spektrálsugara.
- \- Ötlet: L! $(\lambda, \mathbf{x})$ sajátpár, vizsgáljuk az $\left\|\mathsf{A}\mathbf{x}\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\right\|$ mátrixnormát!

Alkalmazások

Eckart–Young-tétel

T Kis rangú approximáció tétele – Eckart–Young-tétel $\mathbf{A}$ r-rangú, k-adik szinguláris értéke σ_k, jobb és bal szinguláris vektora $\mathbf{v}_k$, illetve $\mathbf{u}_k$. Legyen

$$\mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T.$$

Ekkor $\mathbf{A}_k$ az $\mathbf{A}$ mátrix legjobb legföljebb k-rangú közelítése, azaz

$$\min_{r(\mathbf{B})\le k} \|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|_F = \|\mathbf{A}-\mathbf{A}_k\|_F = \sqrt{\sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i^2},$$

$$\min_{r(\mathbf{B})\le k} \|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|_2 = \|\mathbf{A}-\mathbf{A}_k\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

B 2-normára: $\mathrm{r}(\mathbf{B}) \leqslant k$, így $\dim \mathcal{N}(\mathbf{B}) \geqslant n-k$.

Legyen $\mathcal{V} = \mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{k+1})$ a $k+1$ legnagyobb szing.ért.hez tartozó jobb szinguláris vektorok által kifeszített altér.

Ha $k \geqslant r$, akkor kész vagyunk, $\mathbf{A}$ legjobb közelítése $\mathbf{A}$ és $\sigma_{k+1} = 0$.

Feltehető $r > k \rightsquigarrow \dim \mathcal{N}(\mathbf{B}) + \dim \mathcal{V} \geqslant (n-k) + (k+1) > n \rightsquigarrow$ $\mathcal{N}(\mathbf{B}) \cap \mathcal{V} \neq \{\mathbf{0}\}$

$\mathbf{w} \in \mathcal{N}(\mathbf{B}) \cap \mathcal{V}$, $\|\mathbf{w}\|_2 = 1$. Ekkor

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|_2^2 \geqslant \|(\mathbf{A}-\mathbf{B})\mathbf{w}\|_2^2 &= \|\mathbf{A}\mathbf{w}\|_2^2 \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i^2 |\mathbf{v}_i^T \mathbf{w}|^2 \geqslant \sigma_{k+1}^2 \sum_{i=1}^{k+1} |\mathbf{v}_i^T \mathbf{w}|^2 = \sigma_{k+1}^2
\end{aligned}
$$

Másrészt $\|\mathbf{A}-\mathbf{A}_k\|_2 = \sigma_{k+1}$, így $\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|_2 \geqslant \|\mathbf{A}-\mathbf{A}_k\|_2$.

P Adjunk 2- illetve Frobenius-normában legjobb 1-rangú közelítést az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ mátrixra! 1-normában is ez van hozzá a legközelebb?

M $\chi_{\mathbf{A}}(x) = x^2 - x - 6$, sajátpárok $(3, (1, 2))$, $(-2, (-2, 1)) \rightsquigarrow$

SVD: $\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$

legjobb közelítés:

$\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$

az eltérés: $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_F = \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_2 = \sigma_2 = 2$

- másrészt $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} -\frac{8}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \right\|_1 = \frac{12}{5}$
- 1-normában van jobb közelítés, pl.

$$\left\| \mathbf{A} - \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \right\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} -\frac{8}{5} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\|_1 = \frac{21}{10}$$