BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Bevezetés az algebrába 2

BMETE91AM37

Mátrixfüggvények

H607 – 2018-05-02

Wettl Ferenc
ALGEBRA TANSZÉK

Diagonalizálható mátrixok függvényei

m Ha $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ és D diagonális, továbbá D főátlóbeli elemei benne vannak a hatványsor konvergenciatartományában, akkor

$$f(\mathsf{D}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathsf{D}^k = \operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k d_1^k, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} a_k d_n^k\right) = \operatorname{diag}(f(d_1), \dots, f(d_n))$$

Eszerint például bármely diagonalizálható A mátrixra értelmezhető az e^{A} hatvány, nevezetesen

$$\mathrm{e}^{\mathsf{A}} = \mathsf{I} + \mathsf{A} + \frac{\mathsf{A}^2}{2!} + \dots + \frac{\mathsf{A}^n}{n!} + \dots$$

Hasonlóképp definiálható az $\ln(\mathsf{I} + \mathsf{A})$ mátrixfüggvény is. Fölhasználva a

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \qquad |x| < 1$$

hatványsort kapjuk, hogy

$$\ln(\mathsf{I} + \mathsf{A}) = \mathsf{A} - \frac{\mathsf{A}^2}{2} + \frac{\mathsf{A}^3}{3} - \frac{\mathsf{A}^4}{4} + \dots,$$

ahol $\varrho(\mathsf{A}) < 1$.

- m Egy hatványsorba fejthető függvénynek egy diagonális mátrixban – és így bármely diagonalizálható mátrixban – fölvett értékét a függvénynek csak a sajátértékekben való viselkedése befolyásolja.
- m A Cayley–Hamilton-tétel szerint minden mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét, így egy n-edrendű mátrix minden hatványa legföljebb $n-1$-edik hatványok lineáris kombinációjával helyettesíthető, azaz a függvény értéke egy polinomba való helyettesítéssel is kiszámolható.

Á Legyen az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix Jordan-felbontása $\mathbf{A} = \mathbf{CJC}^{-1}$ és $p \in \mathbb{C}[x]$ egy tetszőleges polinom. Ekkor

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{C}p(\mathbf{J})\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\begin{bmatrix} p(\mathbf{J}_1) & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & p(\mathbf{J}_2) & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & p(\mathbf{J}_k) \end{bmatrix}\mathbf{C}^{-1},$$

m Tegyük fel, hogy az f függvény λ körül Taylor-sorba fejthető, azaz

$$f(x) = f(\lambda) + f'(\lambda)(x-\lambda) + \ldots + \frac{f^{(m)}(\lambda)}{m!}(x-\lambda)^m + \ldots$$

és legyen $\mathsf{J} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ egy Jordan-blokk, azaz

$$\mathsf{J} = \lambda\mathsf{I} + \mathsf{N} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

\- Mivel $\mathsf{N}^n = \mathsf{O}$, fenn kell álljon az

$$f(\mathsf{J}) = f(\lambda\mathsf{I} + \mathsf{N}) = f(\lambda)\mathsf{I} + f'(\lambda)\mathsf{N} + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!}\mathsf{N}^{n-1} \qquad (1)$$

összefüggés – ha egyáltalán van értelme az $f(\mathsf{J})$ kifejezésnek. Tehát az f függvénynek csak a Jordan-mátrix rendjénél kisebb rendű deriváltjai játszanak szerepet a függvényértékben.

Mátrixfüggvény a Jordan-alakból

Spektrumon definiált függvény

D Legyen az **A** mátrix spektruma $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$, a λ_i sajátértékhez tartozó legnagyobb Jordan-blokk rendjét jelölje m_i. Azt mondjuk, hogy f definiálva van az **A** spektrumán, ha az

$$f^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 0, 1, \ldots, m_i - 1, \; i = 1, \ldots, s$$

értékek léteznek. Azt mondjuk, hogy ezek az értékek az f értékei az **A** spektrumán.

m Minden függvény, mely **C** minden pontjában akárhányszor differenciálható, tetszőleges mátrixra értelmezve van annak spektrumán. Így minden polinom értelmezve van minden mátrix spektrumán, ami összhangban lesz azzal, hogy minden négyzetes mátrixnak bármely polinomfüggvénye értelmezve van.

m Ha μ az **A** mátrix minimálpolinomja, akkor μ értelmezve van **A** spektrumán, és μ értékei **A** spektrumán mind nullák. Ez egyből következik a minimálpolinom előállításából és a fenti definícióból.

Mátrixfüggvény a Jordan-alakból

D Legyen $\mathsf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ Jordan-felbontása $\mathsf{A} = \mathsf{C}\mathsf{J}\mathsf{C}^{-1}$, ahol $\mathsf{J} = \operatorname{diag}(\mathsf{J}_1, \dots, \mathsf{J}_k)$ a Jordan-féle normálalakja, és n_i jelöli a J_i blokk rendjét. Ekkor

$$f(\mathsf{A}) = \mathsf{C} f(\mathsf{J})\mathsf{C}^{-1} = \mathsf{C}\operatorname{diag}(f(\mathsf{J}_1), \dots, f(\mathsf{J}_k))\mathsf{C}^{-1},$$

ahol

$$f(\mathsf{J}_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} & \dots & \frac{f^{(n_i-2)}(\lambda_i)}{(n_i-2)!} & \frac{f^{(n_i-1)}(\lambda_i)}{(n_i-1)!} \\ 0 & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \dots & \dots & \frac{f^{(n_i-2)}(\lambda_i)}{(n_i-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f'(\lambda_i) & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & f(\lambda_i) \end{bmatrix} \tag{2}$$

(itt k a független sajátvektorok maximális száma)

- Egyszerű képletbehelyettesítéssel $f(x) = x^3$ esetén

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} f(2) & f'(2) \\ 0 & f(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

- Az $f(x) = \mathrm{e}^x$ függvény esetén, ha

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ akkor } \mathrm{e}^{\mathsf{A}} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^2 & \frac{\mathrm{e}^2}{2} \\ 0 & \mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^2 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^2 \end{bmatrix} = \mathrm{e}^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Általában a λ-hoz tartozó Jordan-blokkra

$$\mathsf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \text{ esetén } \mathrm{e}^{\mathsf{J}} = \mathrm{e}^{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \frac{1}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{1}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

P Legyen

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg az e^{A} mátrixot!

M A karakterisztikus polinomja $x^3 + 10x^2 + 32x + 32 = (x+2)(x+4)^2$,

$$\mathsf{J} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{P}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{e}^{\mathsf{A}} = \mathsf{P}\mathrm{e}^{\mathsf{J}}\mathsf{P}^{-1} = \frac{1}{2\mathrm{e}^4} \begin{bmatrix} \mathrm{e}^2+1 & 2\mathrm{e}^2-2 & \mathrm{e}^2-1 \\ \mathrm{e}^2-1 & 2\mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^2-1 \\ 1-\mathrm{e}^2 & 2-2\mathrm{e}^2 & 3-\mathrm{e}^2 \end{bmatrix}$$

P Határozzuk meg az $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ mátrix Jordan-féle normálalakját, J-t, és az A^{100}, e^{J}, $\mathrm{e}^{3\mathsf{A}}$ mátixokat.

M $\chi(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 5)$. A 2-höz tartozó s.v.: $(1, 0, 0)$, a -5-höz tartozó $(-9/7, 0, 1) \rightsquigarrow \mathsf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

A 2-höz tartozó másik általánosított sajátvektor:

$$(\mathsf{A} - 2\mathsf{I})\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1, \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ennek egy megoldása $\mathbf{x}_2 = (0, \frac{1}{3}, 0) \rightsquigarrow$

$$\mathsf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9/7 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathsf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9/7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Mivel $(x^{100})' = 100x^{99}$, $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$, $(\mathrm{e}^{3x})' = 3\mathrm{e}^{3x}$, ezért

$$\mathsf{J}^{100} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 100 \cdot 2^{99} & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{e}^{\mathsf{J}} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^2 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-5} \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{e}^{3\mathsf{J}} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^6 & 3\mathrm{e}^6 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^6 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-15} \end{bmatrix}.$$

Innen az $\mathsf{A}^{100} = \mathsf{C}\mathsf{J}^{100}\mathsf{C}^{-1}$ és $\mathrm{e}^{3\mathsf{A}} = \mathsf{C}\mathrm{e}^{3\mathsf{J}}\mathsf{C}^{-1}$ felhasználásával

$$\mathsf{A}^{100} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 100 \cdot 3 \cdot 2^{99} & \frac{9}{7}(2^{100} - 5^{100}) \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{e}^{3\mathsf{A}} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^6 & 9\mathrm{e}^6 & \frac{9}{7}(\mathrm{e}^6 - \mathrm{e}^{-15}) \\ 0 & \mathrm{e}^6 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-15} \end{bmatrix}.$$

Mátrixfüggvény Hermite-polinommal

Spektrumon azonos értékeket adó polinomok

Á Tetszőleges p és q polinomokra és $\mathsf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixra $p(\mathsf{A}) = q(\mathsf{A})$, pontosan akkor teljesül, ha p és q értékei A spektrumán azonosak.

B Ha $p(\mathsf{A}) = q(\mathsf{A})$, akkor $h = p - q$ annullálja A-t, így h osztható a minimálpolinommal, így a minimálpolinommal együtt h értékei is nullák az A spektrumán.

Ha p és q értékei A spektrumán azonosak, akkor a $h = p - q$ polinom értékei mind nullák. Az ilyen polinomok alakja $\prod_{i=1}^{s}(x - \lambda_i)^{m_i} g(x)$, azaz $h = \mu g$, tehát h annullálja A-t, így $p(\mathsf{A}) = q(\mathsf{A})$.

D Legyen A minimálpolinomja μ_{A}, és tegyük fel, hogy az f függvény definiálva van A spektrumán. Ekkor $f(\mathsf{A}) := p(\mathsf{A})$, ahol p az a polinom, melynek foka kisebb μ_{A} fokánál, és amely eleget tesz a

$$p^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 0, 1, \ldots, m_i - 1,\ i = 1, \ldots, s \tag{3}$$

feltételeknek, ahol m_i a λ_i sajátértékhez tartozó legnagyobb Jordan-blokk rendjét jelöli.

- A definícióban megadott polinom egyértelműen létezik, ezt nevezzük Hermite-polinomnak, mely explicit módon is megadható:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{s} \left(\left(\sum_{j=0}^{m_i-1} \left(\frac{f(y)}{\prod_{k\neq i} (y-\lambda_k)} \right)^{(j)} (\lambda_i) \, \frac{(x-\lambda_i)^j}{j!} \right) \prod_{j\neq i} (x-\lambda_j)^{m_j} \right).$$

- Ha $\mathbf{A}$-nak minden sajátértéke egyszeres algebrai multiplicitású, azaz $s = n$ és $m_i = 1$ minden i-re, akkor az előző formula az ismert Lagrange-féle interpolációs polinomot adja:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(\lambda_i) \prod_{j\neq i} \frac{x-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j} \right). \tag{4}$$

Ha $\mathbf{A}$-nak egyetlen s.ért. λ, melynek n az algebrai multiplicitása, azaz $s = 1$, $m_1 = n$, akkor f Taylor-polinomját kapjuk:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(\lambda) \frac{(x-\lambda)^j}{j!}.$$

T Adott $\mathbf{A}$ mátrixhoz a fenti definícióban definiált ($\mu_{\mathbf{A}}$-nál kisebb fokú, a (3) feltételeit kielégítő) Hermite-polinom létezik és egyértelmű.

B Ha λ_i indexe (azaz a hozzá tartozó legnagyobb Jordan-blokk rendje) m_i, akkor a keresett polinom ismeretlen együtthatóinak száma = $\deg \mu_{\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^{s} m_i$

- másrészt az egyenletek száma is = $\sum_{i=1}^{s} m_i$
- ($\deg \mu_{\mathbf{A}}$)-ismeretlenes és ugyanennyi egyenletből álló egyenletrendszer egyértelműen megoldható a jobb oldal bármely értékeire $\iff$ a homogén egyértelműen megoldható $\iff$ a triviális az egyetlen megoldása.
- A homogén egyenletrendszer megoldása egyértelmű, mert $\mu_{\mathbf{A}}$-nál kisebb fokú polinomok közt csak a zéruspolinom lehet megoldás, mivel csak az annullálja $\mathbf{A}$-t.

m Az Hermite-polinom ugyan egyértelmű, de nem mindig tudjuk könnyen meghatározni, például ha a mátrixnak csak a sajátértékeit ismerjük, de a legnagyobb Jordan-blokk méretét nem. A korábbiak szerint bármely más polinom is megfelel, mely kielégíti a (3) feltételeket.

P Nézzük az $f(x) = x^3$ függvény helyettesítési értékét a $\mathsf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ mátrixban. Ugyan f polinom, de mivel $\mu_{\mathsf{A}}(x) = (x-2)^2$, azaz a minimálpolinom kisebb fokú, ezért van olyan elsőfokú polinom is, mely A-ban azonos értéket ad. E polinom az $x^3 : \mu_{\mathsf{A}}(x)$ osztás maradéka. Mivel $x^3 = (x-2)^2(x+4) + (12x - 16)$, azaz a maradék $12x - 16$, ezért

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3 = 12 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 16 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

P Keressük az $f(x) = x^3$ fv. $\mathsf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ mátrixhoz tartozó Hermite-féle interpolációs polinomját: $p(x) = ax + b$,

$$\left.\begin{aligned} f(2) = 8 = p(2) = 2a + b \\ f'(2) = 12 = p'(2) = a. \end{aligned}\right. \quad \rightsquigarrow \quad a = 12, b = -16.$$

P $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathrm{e}^{\mathsf{A}} = ?$

M $\mu_{\mathsf{A}}(x) = (x-2)^3 \rightsquigarrow$ Hermite-polinom: $p(x) = ax^2 + bx + c$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{e}^x\big|_2 = \mathrm{e}^2 = p(2) = 4a + 2b + c \\ (\mathrm{e}^x)'\big|_2 = \mathrm{e}^2 = p'(2) = 4a + b \\ (\mathrm{e}^x)''\big|_2 = \mathrm{e}^2 = p''(2) = 2a. \end{aligned}\right. \quad \rightsquigarrow \quad a = \mathrm{e}^2/2, b = -\mathrm{e}^2, c = \mathrm{e}^2 \quad \rightsquigarrow$$

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathsf{A}} &= p(\mathsf{A}) = \frac{\mathrm{e}^2}{2}\mathsf{A}^2 - \mathrm{e}^2\mathsf{A} + \mathrm{e}^2\mathsf{I} \\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{2}\begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \mathrm{e}^2\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \mathrm{e}^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{e}^2\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Exponenciális függvény Hermite-polinommal

P Számítsuk ki az e^{A} mátrixot ha

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

M $\chi_{\mathsf{A}}(x) = (x+2)(x+4)^2$, Jordan-alakja $\operatorname{diag}(-2,-4,-4)$, a minimálpolinom $\mu_{\mathsf{A}}(x) = (x+2)(x+4) = x^2+6x+8$.
olyan elsőfokú $p(x) = ax+b$ alakú polinomot keresünk, melyre

$$\mathrm{e}^{-2} = p(-2) = -2a+b$$

$$\mathrm{e}^{-4} = p(-4) = -4a+b.$$

Innen $a = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-4})$, $b = 2\mathrm{e}^{-2}-\mathrm{e}^{-4}$, így

$$\mathrm{e}^{\mathsf{A}} = a\mathsf{A} + b\mathsf{I} = \frac{1}{2\mathrm{e}^4}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^2+1 & 2\mathrm{e}^2-2 & \mathrm{e}^2-1 \\ \mathrm{e}^2-1 & 2\mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^2-1 \\ 1-\mathrm{e}^2 & 2-2\mathrm{e}^2 & 3-\mathrm{e}^2 \end{bmatrix}.$$

P $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 10 & -4 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathrm{e}^{\mathsf{A}} = ?$

M $\chi(x) = (4-x)^3$, $\mu(x) = (4-x)^2$ (korábbi feladatból)

Keresünk egy $p(x) = ax + b$ polinomot, melyre

$$\left.\begin{aligned} \exp(4) = \mathrm{e}^4 = p(4) = 4a + b \\ \exp'(4) = \mathrm{e}^4 = p'(4) = a \end{aligned}\right. \quad \rightsquigarrow \quad a = \mathrm{e}^4,\ b = -3\mathrm{e}^4$$

\- Tehát

$$\mathrm{e}^{\mathsf{A}} = \mathrm{e}^4\mathsf{A} - 3\mathrm{e}^4\mathsf{I} = \mathrm{e}^4 \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 4 & 7 & -4 \\ 4 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

A definíciók ekvivalenciája

T A mátrixfüggvény kiszámítására adott fenti két definíció ekvivalens.

B A „Hermite"-definíció szerint $f(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A})$ és bármely más polinom is megadja $f(\mathbf{A})$-t, ha kielégíti a (3) feltételeket.

Ha $\mathbf{A} \sim \mathbf{J}$, akkor $f(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A}) = p(\mathbf{CJC}^{-1}) = \mathbf{C}p(\mathbf{J})\mathbf{C}^{-1}$, ezért elég a Jordan-alakokra ellenőrizni az ekvivalenciát.

A „Jordan"-definícióban f-nek épp azok a deriváltjai szerepelnek azokban a sajátértékekben kiértékelve, amelyek a (3) feltételekben is szerepelnek. Így elég csak azt ellenőrizni, hogy egy Jordan-blokk Hermite-polinomja megegyezik-e a „Jordan"-definícióban szereplővel. Ezt a polinom Taylor-polinomjára fölírt (1) képlet igazolja.

Mátrixhatványok konvergenciája

0-hoz konvergálás

T Egy $\mathsf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixra $\lim_{k\to\infty} \mathsf{A}^k = \mathsf{O}$ pontosan akkor teljesül, ha $\rho(\mathsf{A}) < 1$.

B $(\Rightarrow)$ $\mathsf{A} = \mathsf{CJC}^{-1} \rightsquigarrow \mathsf{A}^k = \mathsf{CJ}^k\mathsf{C}^{-1}$

Egy $m \times m$-es Jordan-blokkra

$$\mathsf{J}_\lambda^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \dots & \binom{k}{m-1}\lambda^{k-m+1} \\ 0 & \lambda^k & \dots & \binom{k}{m-2}\lambda^{k-m+2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^k \end{bmatrix}$$

- így $\lim_{k\to\infty} \mathsf{J}^k = \mathsf{O}$ esetén $\lambda^k \to 0 \rightsquigarrow |\lambda| < 1$.
- $(\Leftarrow)$ $|\lambda| < 1$ esetén

$$\left|\binom{k}{i}\lambda^{k-i}\right| \leqslant \frac{k^i|\lambda|^{k-i}}{i!} \to 0$$

Neumann-sor

T Egy $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixra $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ pontosan akkor konvergens, ha $\rho(A) < 1$, és ez esetben $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}$

B $(\Rightarrow)$ $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ konvergens $\rightsquigarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} J_\lambda^k$ konvergens minden Jordan-blokkra $\rightsquigarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k$ konvergens $\rightsquigarrow$ $|\lambda| < 1$.

\- $(\Leftarrow)$ $\rho(A) < 1 \rightsquigarrow \lim_{k\to\infty} A^k = O \rightsquigarrow$

$(I - A)(I + A + A^2 + \dots A^{k-1}) = I - A^k \to I \rightsquigarrow$

$I + A + A^2 + \dots + A^{k-1} + \dots$ konvergens és $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}$.

Konvergens mátrixhatványok

T Az $\mathsf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrixra $\lim\limits_{k\to\infty} \mathsf{A}^k$ pontosan akkor konvergens, ha

$$\begin{cases} \rho(\mathsf{A}) < 1 & \text{vagy, ha} \\ \rho(\mathsf{A}) = 1 & \text{ahol } \lambda = 1 \text{ az egyetlen sajátérték a spektrálkörön,} \\ & \text{és a } \lambda = 1 \text{ geometriai és algebrai multiplicitása azonos.} \end{cases}$$

Konvergencia esetén $\lim\limits_{k\to\infty} \mathsf{A}^k = \mathsf{P}_1$, az $\mathcal{N}(\mathsf{A}-\mathsf{I})$-re az $\mathcal{O}(\mathsf{A}-\mathsf{I})$ mentén való vetítés mátrixa (az 1-hez tartozó spektrálvetítő).

B Ha $\rho(\mathsf{A}) > 1$ a hatványok divergálnak, ha $\rho(\mathsf{A}) < 1$, O-hoz konvergálnak. Marad az $\rho(\mathsf{A}) = 1$ eset.

- Ha a spektrálkörön van 1-től különböző sajátérték, akkor a hozzá tartozó Jordan-blokk hatványainak főátlóiban az $\mathrm{e}^{k\mathrm{i}\varphi}$ hatványok végtelen osszcilláló sorozatot adnak, ami miatt A^k is divergens marad.

- Ha $\lambda = 1$-hez tartozik egy $m > 1$ rendű Jordan-blokk, akkor annak hatványai divergensek:

$$\begin{bmatrix} 1 & \binom{k}{1} & \dots & \binom{k}{m-1} \\ 0 & 1 & \dots & \binom{k}{m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- Marad az az eset, hogy az 1-hez tartozó minden Jordan-blokk 1×1-es ($\mathsf{I}^k \to \mathsf{I}$, tehát konvergens).
- Ekkor, ha az 1 multiplicitása s, akkor

$$\mathsf{A}^k = \mathsf{C}\mathsf{J}^k\mathsf{C}^{-1} = \mathsf{C}\begin{bmatrix} \mathsf{I}_s & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & \mathsf{B}^k \end{bmatrix}\mathsf{C}^{-1} = [\mathsf{X}_1|\mathsf{X}_2]\begin{bmatrix} \mathsf{I}_s & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & \mathsf{B}^k \end{bmatrix}\left[\frac{\mathsf{Y}_1^\mathsf{T}}{\mathsf{Y}_2^\mathsf{T}}\right]$$

$$\xrightarrow{k\to\infty} [\mathsf{X}_1|\mathsf{X}_2]\begin{bmatrix} \mathsf{I}_s & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & \mathsf{O} \end{bmatrix}\left[\frac{\mathsf{Y}_1^\mathsf{T}}{\mathsf{Y}_2^\mathsf{T}}\right] = \mathsf{X}_1\mathsf{Y}_1^\mathsf{T} = \mathsf{P}_1$$