



BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM



Bevezetés az algebraba 2

BMETE91AM37



Jordan-féle normálalak

H607 - 2018-04-20



Wetl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK

Mátrixok polinomjai

Mátrixok polinomjai = mátrixpolinomok

Á $\forall p \in \mathbb{F}[x], \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{F}^{n \times n}, \mathbf{A} \sim \mathbf{B} \Rightarrow p(\mathbf{A}) \sim p(\mathbf{B})$.

B $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} \rightsquigarrow \mathbf{B}^k = (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C})(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}) \dots (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}) = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{C} \rightsquigarrow$

$$p(\mathbf{B}) = \sum_{k=1}^n p_k \mathbf{B}^k = \sum_{k=1}^n p_k \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}^k \mathbf{C} = \mathbf{C}^{-1} \left(\sum_{k=1}^n p_k \mathbf{A}^k \right) \mathbf{C} = \mathbf{C}^{-1} p(\mathbf{A}) \mathbf{C}.$$

K Ha \mathbf{A} diagonalizálható, azaz $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$,

akkor $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}, \mathbf{A}^k = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C} \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) \mathbf{C}^{-1} \rightsquigarrow$

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{C} p(\mathbf{\Lambda}) \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p(\lambda_n) \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-1},$$

K Ha \mathbf{A} diagonalizálható, a spektruma $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, akkor a spektrálfelbontásból $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{P}_i \rightsquigarrow p(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^m p(\lambda_i) \mathbf{P}_i$

Á $\forall \mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n} \exists 0 \neq p \in \mathbb{F}[x]: p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

B $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^{n^2} \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $\dim \mathbb{F}^{n \times n} = n^2$, ezért lineárisan összefüggők \rightsquigarrow valamely lineáris kombinációjuk \mathbf{O} :

$$c_{n^2} \mathbf{A}^{n^2} + \dots + c_1 \mathbf{A} + c_0 \mathbf{I} = p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}.$$

Á Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ diagonalizálható és $p(x) = \prod_{i=1}^m (\lambda_i - x)$, akkor $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

B A λ sajátértékre $p(\lambda) = 0$, így

$$\begin{aligned} p(\mathbf{A}) &= \mathbf{C} p(\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)) \mathbf{C}^{-1} \\ &= \mathbf{C} \text{diag}(p(\lambda_1), p(\lambda_2), \dots, p(\lambda_n)) \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{O}. \end{aligned}$$

K Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ diagonalizálható, akkor $\chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

B $p \mid \chi_{\mathbf{A}} \rightsquigarrow \chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

Polinommátrixok = mátrixegyütthatós polinomok

$$\text{Á} \quad \text{Az } \mathbf{A}(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{F}[x]^{n \times n} \text{ polinommátrix}$$

felbontható $\mathbf{A}_k x^k + \mathbf{A}_{k-1} x^{k-1} + \dots + \mathbf{A}_1 x + \mathbf{A}_0$ alakba ($k \in \mathbb{N}$ az a_{ij} fokainak maximuma).

$$\text{azaz } \mathbb{F}[x]^{n \times n} = \mathbb{F}^{n \times n}[x]$$

- m A mátrixszorzás nem kommutatív, így ez egy nem kommutatív gyűrű fölötti polinomgyűrű. (Úgy tekintjük, hogy x fölcserélhető a gyűrű elemeivel, így e polinomok szorozhatók és kanonikus alakra hozhatók).

$$\text{P} \quad \begin{bmatrix} x^2 & x+1 \\ x^2-1 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Cayley–Hamilton-tétel

T Ha \mathbf{A} egy tetszőleges négyzetes mátrix, melynek karakterisztikus polinomja $\chi_{\mathbf{A}}$, akkor $\chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

B $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$. Az \mathbf{A} karakterisztikus polinomja így

$$\det \mathbf{B} = \chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + p_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + p_1 \lambda + p_0.$$

\mathbf{B} bármely eleméhez tartozó előjeles aldetermináns λ egy legfőbb $n - 1$ -edfokú polinomja, így léteznek olyan konstans elemű $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_{n-1}$ mátrixok, hogy

$$\text{adj } \mathbf{B} = \lambda^{n-1} \mathbf{C}_{n-1} + \dots + \lambda \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_0.$$

$$\det(\mathbf{B}) \mathbf{I} = \mathbf{B} \text{adj}(\mathbf{B}) \rightsquigarrow$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \text{adj } \mathbf{B} &= (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \mathbf{C}_k \right) \\ &= \mathbf{A} \mathbf{C}_0 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k (\mathbf{A} \mathbf{C}_k - \mathbf{C}_{k-1}) \right) - \lambda^n \mathbf{C}_{n-1}. \end{aligned}$$

Együtthatóösszehasonlítás:

$\det(\mathbf{B})\mathbf{I}$	$\mathbf{B} \operatorname{adj} \mathbf{B}$
$(-1)^n \mathbf{I} = -\mathbf{C}_{n-1}$	$\cdot \mathbf{A}^n$
$p_{n-1} \mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{C}_{n-1} - \mathbf{C}_{n-2}$	$\cdot \mathbf{A}^{n-1}$
\vdots	\vdots
$p_2 \mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1$	$\cdot \mathbf{A}^2$
$p_1 \mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0$	$\cdot \mathbf{A}$
$p_0 \mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{C}_0.$	

A beszorzás után kapott egyenlőségeket összeadva

$$(-1)^n \mathbf{A}^n + p_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \dots + p_1 \mathbf{A} + p_0 \mathbf{I} = \mathbf{O}.$$

K \forall invertálható $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ mátrixhoz $\exists q \in \mathbb{F}[x]_n$ (legf. $n - 1$ -edfokú):
 $\mathbf{A}^{-1} = q(\mathbf{A})$.

Minimálpolinom

- D $\forall \mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$. **Minimálpolinomnak** nevezünk egy olyan minimális fokszámú $\mu_{\mathbf{A}}$ főpolinomot (1 főegyütthatójú), melyre $\mu_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.
- D Azt mondjuk, hogy a p polinom az \mathbf{A} mátrix **annullátora**, vagy hogy **annullálja** azt, ha $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$. A minimálpolinom tehát egy legkisebb fokú annullátor főpolinom.
- m A nullpolinom nem lehet minimálpolinom, mert nem 1 a főegyütthatója. Az 1 nem lehet minimálpolinom, mert bármely mátrix behelyettesítése után \mathbf{I} lesz (nem \mathbf{O}).
- m Az egységmátrixra $\mu(x) = x - 1$.
- m $\mathbf{A} \sim \mathbf{B} \Rightarrow \mu_{\mathbf{A}} = \mu_{\mathbf{B}}$ (ugyanis $p(\mathbf{B}) = \mathbf{C}^{-1}p(\mathbf{A})\mathbf{C}$, így minden p polinomra $p(\mathbf{A})$ és $p(\mathbf{B})$ egyszerre \mathbf{O} , illetve egyszerre nem.)
- D (A minimálpolinom invariáns a mátrixok hasonlóságára, így) egy véges dimenziós $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ vektortéren értelmezett $L : \mathcal{V}_{\mathbb{F}} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ **lineáris transzformáció minimálpolinomján** azt a minimális fokszámú μ_L főpolinomot értjük, melyre $\mu_L(L) = \mathbf{O}$.
- m $\mu_L =$ bármely bázisban fölírt \mathbf{M} mátrixának $\mu_{\mathbf{M}}$ min.pol.-jával.

Minimálpolinom tulajdonságai

T $\forall \mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

1. \mathbf{A} -nak pontosan egy $\mu_{\mathbf{A}}$ minimálpolinomja van.
2. Bármely p polinomra $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O} \iff \mu_{\mathbf{A}} \mid p$.
3. $\mu_{\mathbf{A}} \mid \chi_{\mathbf{A}}$
4. \mathbf{A} minden sajátértéke gyöke $\mu_{\mathbf{A}}$ -nak.

B 1. \exists annullátor $\rightsquigarrow \exists$ főpolinom annullátor

Tfh p és q két különböző minimális fokszámú főpolinom, melyekre

$$p(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A}) = \mathbf{O} \rightsquigarrow (p - q)(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A}) - q(\mathbf{A}) = \mathbf{O} \rightsquigarrow p = q.$$

$$2. \mu_{\mathbf{A}} \mid p \rightsquigarrow p = \mu_{\mathbf{A}} q \text{ vmilyen } q \text{ pol.-ra} \rightsquigarrow p(\mathbf{A}) = \mu_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})q(\mathbf{A}) = \mathbf{O}.$$

$p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$ és $p = \mu_{\mathbf{A}} q + r$, ahol r foka kisebb, mint $\mu_{\mathbf{A}}$ foka, másrészt $\mathbf{O} = p(\mathbf{A}) = \mu_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})q(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A}) \rightsquigarrow r(\mathbf{A}) = \mathbf{O} \rightsquigarrow r = 0$.

3. az előzőekből

$$4. (\lambda, \mathbf{x}) \text{ sajátpár} \rightsquigarrow \mathbf{A}^k \mathbf{x} = \lambda^k \mathbf{x} \ (k \in \mathbb{N}_0) \rightsquigarrow \forall p \text{-re } p(\mathbf{A}) \mathbf{x} = p(\lambda) \mathbf{x}.$$

$$\mu_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) \mathbf{x} = \mu_{\mathbf{A}}(\lambda) \mathbf{x}, \text{ de } \mu_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}, \text{ és } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \text{ ezért } \mu_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0.$$

- m Ha $\chi_A(x) = (-1)^n \prod_i (x - \lambda_i)^{a_i}$, akkor a 3.-beli oszthatóság miatt $\mu_A(x) = \prod_i (x - \lambda_i)^{m_i}$, ahol $1 \leq m_i \leq a_i$, és a_i a λ_i algebrai multiplicitása.
- m Ha \mathbf{A} nilpotens, ahol $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, de $\mathbf{A}^{k-1} \neq \mathbf{O}$, akkor $\mu_A(x) = x^k$, ugyanis x^k annullátor, így a minimálpolinom csak valamely osztója lehet. Az osztói viszont mind x^m alakúak, ahol $m \leq k$, de azok $m < k$ esetén nem annullátorok.
- Á \mathbf{A} pontosan akkor diagonalizálható, ha minimálpolinomja különböző lineáris tényezők szorzata (egyelőre az egyik irányt tudjuk bizonyítani).

Példák minimálpolinomra

P Határozzuk meg a χ_A , μ_A , χ_B és μ_B polinomokat!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

M $\chi_A(x) = \mu_A(x) = x^6$, $\chi_B(x) = x^6$, $\mu_B(x) = x^3$.

Példák minimálpolinomra

P

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

M $\chi_{\mathbf{A}}(x) = \chi_{\mathbf{B}}(x) = (x-1)^4$ Minimálpolinom lehet $(x-1)^k$, ahol $k \leq 4$. Mivel

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

és $\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} + \mathbf{I} = \mathbf{O}$, de $\mathbf{A} - \mathbf{I} \neq \mathbf{O}$, ezért $\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x-1)^2$.

$\mathbf{B}^2 - 2\mathbf{B} + \mathbf{I} = \mathbf{O}$, de $\mathbf{B} - \mathbf{I} \neq \mathbf{O}$, ezért $\mu_{\mathbf{B}}(x) = (x-1)^2$.

Példák minimálpolinomra

P Írjuk föl a következő mátrix minimálpolinomját!

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

M Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ekkor $\chi_{\mathbf{A}}(x) = x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2)$,

$\chi_{\mathbf{B}}(x) = x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$, így

$\chi_{\mathbf{M}}(x) = (x - 4)(x + 1)(x - 5)(x + 2)$, de mivel nincsenek többszörös gyökök, ez egyúttal a minimálpolinom is.

Frobenius kísérő mátrix

Á Bármely $\chi(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0 \in \mathbb{F}[x]$ polinomhoz létezik olyan $\mathbf{C} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ mátrix, melynek χ (vagy $-\chi$) a karakterisztikus polinomja. Egy ilyen mátrix a

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

mátrix.

D E mátrixot a polinom **kísérő mátrixának** nevezzük.

- B A karakterisztikus polinomot adó determinánsban alulról minden sor x -szeresét a fölötte lévőhöz adva kapjuk, hogy

$$\chi_C(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & -x & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} - x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\chi(x) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & ? \\ 0 & 1 & \dots & 0 & ? \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} - x \end{vmatrix}$$

Így $\chi_C(x)$ előjelszorozót nem számítva megegyezik a megadott $\chi(x)$ polinommal.

- Á A kísérő mátrix minimálpolinomja megegyezik karakterisztikus polinomjával (egy -1 szorzó erejéig).
- B Tetszőleges, de nem csupa zérus c_j konstansokra

$$\left(\sum_{j=0}^{n-1} c_j \mathbf{C}^j \right) \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix},$$

azaz nincs n -nél alacsonyabb fokú annullátor, tehát $\mu(\mathbf{C}) = (-1)^n \chi(\mathbf{C})$.

Hasonlóság erejéig hány van?

P Hasonlóság erejéig hány olyan 2×2 -es valós/komplex \mathbf{A} mátrix van, melyre $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}$?

M $\mu_{\mathbf{A}}(x) \mid x^3 - 1$

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$: $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ és $\deg \mu_{\mathbf{A}} \leq \deg \chi_{\mathbf{A}} = 2$:

1. $\mu_{\mathbf{A}}(x) = x - 1$: $\mathbf{A} - \mathbf{I} = \mathbf{O} \rightsquigarrow \mathbf{A} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ✓

2. $\mu_{\mathbf{A}}(x) = x^2 + x + 1$: gyökei nem valósak \rightsquigarrow tetszőleges $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ vektorra \mathbf{v} és $\mathbf{A}\mathbf{v}$ függetlenek. E bázisban a mátrixa $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, ui.:

$$\mathbf{v} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{v} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}\mathbf{v} \mapsto \mathbf{A}^2\mathbf{v} = (-\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{v} = -\mathbf{v} - \mathbf{A}\mathbf{v} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Tehát hasonlóság erejéig 2 ilyen mátrix van (utóbbira végtelen sok lehetőséggel, ha más bázisban írjuk fel).

- $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$: $x^3 - 1 = (x - 1)(x - \varepsilon)(x - \varepsilon^2)$, ahol $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ a primitív 3. egységgyök.

1. $\deg \mu_{\mathbf{A}} = 1$: $\mathbf{A} = \mathbf{I}$, $\varepsilon \mathbf{I}$ vagy $\varepsilon^2 \mathbf{I}$

2. $\deg \mu_{\mathbf{A}} = 2 \rightsquigarrow \mu_{\mathbf{A}} = \chi_{\mathbf{A}}$ és $\chi_{\mathbf{A}}$ minden gyöke egyszeres $\rightsquigarrow \mathbf{A}$ diagonalizálható és diagonális elemei $1, \varepsilon, \varepsilon^2$ közül kettő.

- Tehát hasonlóság erejéig 6 ilyen mátrix van:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{bmatrix}$$

utóbbira $\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbb{C}$ fölött.

F (Freud–Gyarmati: Számelmélet 1.6.28) n rozmár ül egy kerek asztal körül, mindegyik előtt egy érme. Mindegyik megnézi a jobb szomszédja előtti érmét. Ha az fej, vezényszóra megfordítja a sajátját! Ezt addig folytatják, míg van változás. Milyen n -re igaz, hogy a játék bármely kezdeti állapot esetén véget ér?

M $\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n$, $x_i = 0$, ha írás, $x_i = 1$, ha fej.

- Pozitív körüljárás szerint indexelve egy lépés egy lineáris $\mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{F}_2^n$ trafót ad, melynek mátrixa is felírható:

$$\begin{array}{l} x_1 \leftarrow x_1 + x_2 \\ x_2 \leftarrow x_2 + x_3 \\ \vdots \\ x_n \leftarrow x_n + x_1 \end{array} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- A k -adik lépés eredménye $\mathbf{A}^k \mathbf{x}$.

$$\forall \mathbf{x} \text{-re véget ér} \iff \forall \mathbf{x} \exists k : \mathbf{A}^k \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\iff \forall i \exists k_i : \mathbf{A}^{k_i} \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$$

$$\iff \exists k \forall i : \mathbf{A}^k \mathbf{e}_i = \mathbf{0} \quad (k = \max k_i)$$

$$\iff \exists k : \mathbf{A}^k = \mathbf{0}$$

$$\iff \exists k : \mu_{\mathbf{A}}(x) \mid x^k \quad (\text{minden sajátérték } 0)$$

$$\iff \chi_{\mathbf{A}}(x) = (-x)^n = x^n \quad (\mathbb{F}_2 \text{-ben vagyunk})$$

$$\chi_{\mathbf{A}}(x) = |\mathbf{A} - x\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1-x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 1-x \end{vmatrix} =$$
$$(1-x)(1-x)^{n-1} + (-1)^{n-1} \cdot 1 = (x+1)^n + 1$$

- Milyen n -re lesz $(x + 1)^n + 1 = x^n$, azaz $(x + 1)^n = x^n + 1$?
- Ha $n = 2^a$, akkor $(x + 1)^{2^a} = (x^2 + 1)^{2^{a-1}} = \dots = x^{2^a} + 1$.
- Ha $n = 2^a m$, $m > 1$, $2 \nmid m$, akkor
 $(1 + x)^{2^a m} = (1 + x^{2^a})^m = 1 + mx^{2^a} + \dots + x^{2^a m} \neq x^{2^a m} + 1$.
- Tehát pontosan a 2-hatvány n -ekre ér mindig véget a játék.

Invariáns alterek

Invariáns alterek definíciója

- D** Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ altér az $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lineáris transzformáció (illetve az L valamely bázisbeli \mathbf{L} mátrixának) **invariáns altere**, ha minden $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ vektorra $L\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ ($\mathbf{Lx} \in \mathcal{U}$).
- T** Az $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ altér pontosan akkor invariáns altér az L lineáris transzformációra nézve, ha \mathcal{U} egy $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ bázisának minden vektorára $L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$ ($i = 1, \dots, k$).
- B** (\Rightarrow) \mathcal{U} invariáns altér $\rightsquigarrow \mathcal{U}$ minden vektorának képe \mathcal{U} -ban van $\rightsquigarrow L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$ ($i = 1, \dots, k$).
- $(\Leftarrow) \forall \mathbf{u}_i : L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$
- $\text{! } \mathbf{x} \in \mathcal{U} : \mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \dots + x_k\mathbf{u}_k \rightsquigarrow$

$$L\mathbf{x} = x_1L\mathbf{u}_1 + x_2L\mathbf{u}_2 + \dots + x_kL\mathbf{u}_k \in \mathcal{U},$$

P Tekintsük az $L : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Lx}$ mátrixleképezést, ahol

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Mutassuk meg, hogy az $\mathcal{U} = \text{span}((1, -1, 2, -1), (1, 2, -1, 2))$ altér invariáns altere az L lineáris transzformációnak.

M $L\mathbf{u} = (1, -2, 3, -2)$, $L\mathbf{v} = (1, 1, 0, 1)$

Elég megmutatni, hogy az $[\mathbf{u} \mid \mathbf{v} \mid L\mathbf{u} \mid L\mathbf{v}]$ rangja 2.

- (még megmutathatjuk azt is, hogy e vektorok és képeik közt mi a lineáris kapcsolat:

$$\text{rref}([\mathbf{u} \mid \mathbf{v} \mid L\mathbf{u} \mid L\mathbf{v}]) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix},$$

azaz $L\mathbf{u} = \frac{4}{3}\mathbf{u} - \frac{1}{3}\mathbf{v}$, $L\mathbf{v} = \frac{1}{3}\mathbf{u} + \frac{2}{3}\mathbf{v}$.)

- F Igazoljuk, hogy ha \mathbf{A} és \mathbf{B} felcserélhetőek, akkor \mathbf{A} minden sajátaltère \mathbf{B} -nek invariáns altère!
- M Ha $\mathcal{V}_\lambda = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$ és $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_\lambda$, akkor
 $\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{v}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{v} = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{B}\lambda\mathbf{v} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{v} \rightsquigarrow \mathbf{B}\mathbf{v} \in \mathcal{V}_\lambda$
- F Az \mathbf{A} lin.trafó minden polinomjának magtere és képtere \mathbf{A} -invariáns (a négyzetes \mathbf{A} mátrix minden polinomjának nulltere és oszloptere \mathbf{A} -invariáns).
- M ! $p \in \mathbb{F}[x]$, $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$. Ha $\mathbf{v} \in \mathcal{N}(p(\mathbf{A})) \rightsquigarrow p(\mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{0} \rightsquigarrow$
 $p(\mathbf{A})(\mathbf{A}\mathbf{v}) = p(\mathbf{A})\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{A}p(\mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{0} = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{A}\mathbf{v} \in \mathcal{N}(p(\mathbf{A}))$
- Ha $\mathbf{v} \in \mathcal{O}(p(\mathbf{A})) \rightsquigarrow \exists \mathbf{u} : \mathbf{v} = p(\mathbf{A})\mathbf{u} \rightsquigarrow$
 $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{A}p(\mathbf{A})\mathbf{u} = p(\mathbf{A})\mathbf{A}\mathbf{u} \in \mathcal{O}(p(\mathbf{A}))$

Blokkháromszög mátrixok

T Blokkháromszög mátrix és az invariáns altér: $L!$ az $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lintrafónak \mathcal{U} invariáns altere. Ekkor L mátrixa

$$L = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & * \\ \mathbf{0} & * \end{bmatrix}$$

a \mathcal{V} minden olyan bázisában, mely elöl tartalmazza \mathcal{U} bázisát.

P Az

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixban az $\mathcal{U} = \text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \leq \mathbb{R}^4$ tér invariáns altere.

B! $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ az \mathcal{U} , $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \dots, \mathbf{u}_n\}$ a \mathcal{V} bázisa. Mivel
 $L\mathbf{u}_i = u_{i1}\mathbf{u}_1 + \dots + u_{ir}\mathbf{u}_r + 0\mathbf{u}_{r+1} + \dots + 0\mathbf{u}_n \quad (i = 1, 2, \dots, r)$,
 ezért a mátrix alakja

$$L = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & \dots & u_{r1} & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{1r} & u_{2r} & \dots & u_{rr} & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & * & \dots & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & * \\ \mathbf{0} & * \end{bmatrix}.$$

Blokkdiagonális mátrixok

T Blokkdiagonális mátrixok és az invariáns alterek: $L!$ az $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lin trafó két invariáns altere \mathcal{U} és \mathcal{W} . Ha $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, akkor L mátrixa

$$L = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{W} \end{bmatrix}$$

a \mathcal{V} minden olyan bázisában, mely az \mathcal{U} és \mathcal{W} bázisainak uniója.

m Általánosítás: ha $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_r$ a \mathcal{V} vektortér invariáns alterei, és $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_r$, akkor L mátrixa blokkdiagonális alakú minden olyan bázisban, mely az alterek bázisainak egyesítése.

$$\begin{matrix} \mathbf{m} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \Rightarrow & \begin{matrix} \mathcal{U}_1 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}, \\ \mathcal{U}_2 = \{\mathbf{e}_4\}, \\ \mathcal{U}_3 = \{\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6\} \\ \mathcal{V} = \mathbb{R}^6 = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \mathcal{U}_3 \end{matrix} \end{matrix}$$

B) $L!$ $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ és $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-r}\}$ az \mathcal{U} és \mathcal{W} egy-egy bázisa. Mivel $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, ezért egyesítésük a \mathcal{V} egy bázisát adja. L e bázisra vonatkozó mátrixa a bázisvektorok képvektoraiból alkotott mátrix:

$$L\mathbf{u}_i = u_{i1}\mathbf{u}_1 + \dots + u_{ir}\mathbf{u}_r + 0\mathbf{w}_1 + \dots + 0\mathbf{w}_{n-r}$$

$$L\mathbf{w}_j = 0\mathbf{u}_1 + \dots + 0\mathbf{u}_r + w_{j,r+1}\mathbf{w}_1 + \dots + w_{j,n}\mathbf{w}_{n-r}$$

ahol $i = 1, \dots, r, j = r + 1, \dots, n$. Így a mátrix alakja

$$L = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & \dots & u_{r1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{1r} & u_{2r} & \dots & u_{rr} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & w_{r+1,r+1} & w_{r+2,r+1} & \dots & w_{n,r+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & w_{r+1,n} & w_{r+2,n} & \dots & w_{n,n} \end{bmatrix},$$

Minimálpolinom relatív tényezőkre bontása

T $!$ $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $\mu_A(x) = f(x)g(x)$, ahol $f, g \in \mathbb{F}[x]$ relatív prím főpolinomok. Ekkor

$$A \sim \begin{bmatrix} F & O \\ O & G \end{bmatrix},$$

ahol $\mu_F = f$, $\mu_G = g$.

B $!$ $A : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$, $!$ $\mathcal{V} = \mathbb{F}^n$, $\mathcal{U} = \text{Im } g(A)$, $\mathcal{W} = \text{Im } f(A)$.

Belátjuk, hogy $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$.

- $\mathcal{U} \subseteq \text{Ker } f(A)$, $\mathcal{W} \subseteq \text{Ker } g(A)$: $f(A)(g(A)\mathbf{v}) = \mu_A(A)\mathbf{v} = O\mathbf{v} = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathcal{U} \subseteq \text{Ker } f(A)$ (a másik ugyanígy)
- \mathcal{U} és \mathcal{W} A -invariáns: $A(g(A)\mathbf{v}) = g(A)(A\mathbf{v}) \in \text{Im } g(A)$ (a m.u.í)
- $\mathcal{U} + \mathcal{W} = \mathcal{V}$: $1 = a(x)f(x) + b(x)g(x) \rightsquigarrow \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \mathbf{v} = I\mathbf{v} = a(A)f(A)\mathbf{v} + b(A)g(A)\mathbf{v} \in \mathcal{W} + \mathcal{U} = \mathcal{U} + \mathcal{W}$.
- $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\} = \mathcal{O}$: $\mathbf{v} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W} \rightsquigarrow \mathbf{v} \in \text{Ker } f(A) \cap \text{Ker } g(A) \rightsquigarrow \mathbf{v} = I\mathbf{v} = a(A)f(A)\mathbf{v} + b(A)g(A)\mathbf{v} = a(A)\mathbf{0} + b(A)\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

- Tehát $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$ és megfelelő bázisban A mátrixa $\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{G} \end{bmatrix}$.
- A megfelelő bázist jelölje $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\mathcal{U}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{W}}$. Ekkor \mathbf{F} az $A|_{\mathcal{U}}$ mátrixa $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ -ban, \mathbf{G} az $A|_{\mathcal{W}}$ mátrixa $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ -ben.
- $\mathcal{U} \subseteq \text{Ker } f(A)$, $\mathcal{W} \subseteq \text{Ker } g(A) \rightsquigarrow$
 $f(A)(\mathcal{U}) = \mathcal{O}$, $g(A)(\mathcal{W}) = \mathcal{O} \rightsquigarrow$
 $f(\mathbf{F}) = \mathbf{O}$, $f(\mathbf{G}) = \mathbf{O} \rightsquigarrow$

$$\mu_{\mathbf{F}} \mid f, \mu_{\mathbf{G}} \mid g.$$

- Ha valamelyik valódi osztó lenne, akkor a $\nu = \mu_{\mathbf{F}}\mu_{\mathbf{G}}$ polinomra

$$\nu(\mathbf{A}) \sim \nu \left(\begin{bmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \nu(\mathbf{F}) & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \nu(\mathbf{G}) \end{bmatrix} = \mathbf{O} \quad \text{lenne.}$$

- Tehát $\mu_{\mathbf{F}} = f$, $\mu_{\mathbf{G}} = g$.

K Ha $\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x - \lambda_1)^{b_1} \dots (x - \lambda_r)^{b_r}$, ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ különböző sajátértékek, akkor \mathbf{A} hasonló egy olyan blokkdiagonális $\text{diag}(\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_r)$ mátrixhoz, ahol $\mu_{\mathbf{B}_i} = (x - \lambda_i)^{b_i}$ ($i = 1, 2, \dots, r$).

Általánosított sajátvektorok

Általánosított sajátvektorok és a Jordan-blokk

$$m \text{ Az } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_1 = 4\mathbf{e}_1$$

mátrix hatása a standard bázison: $\mathbf{A}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$$

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$$

Átrendezés után: $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1$

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2$$

- $\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$ hatásának diagramja: $\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_1 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_2 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_3$
- Eszerint \mathbf{e}_1 sajátvektor, és \mathbf{A} -nak más sajátvektora nincs, viszont

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2 \mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}.$$

Általánosított sajátvektor

- D Az $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektort a négyzetes \mathbf{A} mátrix λ sajátértékéhez tartozó **általánosított sajátvektorának** nevezzük, ha valamilyen k természetes számra $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
 $k = 1$ esetén \mathbf{x} sajátvektor. Az általánosított sajátvektorokból álló \mathbf{x}_i ($i = 1, 2, \dots, k$) sorozatot **Jordan-láncnak** nevezzük, ha $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1}$ és $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$.
Egy tér **diszjunkt Jordan-láncokból** álló bázisát **Jordan-bázisnak** nevezzük.
- m A Jordan-lánc definíciója korrekt: ha \mathbf{x}_k általánosított sajátvektor, melyre $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$, de $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-1} \mathbf{x}_k \neq \mathbf{0}$, akkor minden $i < k$ esetén $\mathbf{x}_{k-i} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^i \mathbf{x}_k$ ($i = 1, \dots, k-1$) vektorok is általánosított sajátvektorok. Ez abból következik, hogy

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-i} \mathbf{x}_{k-i} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-i} (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^i \mathbf{x}_k = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$$

Jordan-lánc és Jordan-bázis konstrukciója

P Keressünk egy Jordan-bázist! Tudjuk, hogy $\chi_A(x) = (4 - x)^3$.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

M A sajátaltér 1-dimenziós, melyet az $\mathbf{x} = (1, -1, 1)$ vektor feszít ki.

- $(A - 4I)^3 = \mathbf{0}$, de $(A - 4I)^2 \neq \mathbf{0} \rightsquigarrow \exists \mathbf{x}_3 : (A - 4I)^2 \mathbf{x}_3 \neq \mathbf{0}$

-

$$(A - 4I)^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$\rightsquigarrow (A - 4I)^2(x, y, z) = (-x + z, x - z, -x + z) \rightsquigarrow x \neq z$, pl $(1, 0, 0)$

$$\mathbf{0} \xleftarrow{A-4I} \mathbf{x}_1 = (-1, 1, -1) \xleftarrow{A-4I} \mathbf{x}_2 = (2, -1, 2) \xleftarrow{A-4I} \mathbf{x}_3 = (1, 0, 0)$$

- A alakja az $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ bázisban

$$J = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

ugyanis $A\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2 + 4\mathbf{x}_3$, $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + 4\mathbf{x}_2$, $A\mathbf{x}_1 = 4\mathbf{x}_1$, aminek mátrixszorzat alakja:

$$A[\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_3] = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_3] \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\rightsquigarrow X^{-1}AX = J$, ahol $X = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_3]$ (X az $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{X}$ áttérés mátrixa!)

- Konkrétan: $J = X^{-1}AX =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

P $C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 10 & -4 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \chi_C(x) = (4 - x)^3.$

M Sajátaltér: $\text{span}((1, 0, 1), (0, 2, 3))$

$(C - 4I)^2 = O$ (legfölbbebb kettő hosszú láncra számíthatunk),

$\exists x_2 : (C - 4I)x_2 \neq O$

-
$$C - 4I = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & -4 \\ 4 & 6 & -4 \end{bmatrix},$$

\rightsquigarrow pl. $x_2 = (1, 0, 0)$ megfelel.

- $x_1 = (C - 4I)x_2 = (-2, 4, 4)$ (a sajátaltérben van, de különbözik a kapott sajátvektoroktól: $x_1 = (-2, 4, 4) = -2(1, 0, 1) + 2(0, 2, 3)$.)
- y_1 legyen független x_1 -től:

$$O \xleftarrow{C-4I} x_1 = (-2, 4, 4) \xleftarrow{C-4I} x_2 = (1, 0, 0)$$

$$O \xleftarrow{C-4I} y_1 = (1, 0, 1)$$

- C alakja az $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1\}$ bázisban

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

- $J = X^{-1}AX =$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & -4 \\ 4 & 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- D Azt a négyzetes mátrixot, melynek főátlójában azonos λ értékek, fölötté 1-esek, egyebütt 0-k állnak, **Jordan-blokknak** nevezzük:

$$J_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (1)$$

- m Egy Jordan-blokknak a standard bázis minden vektora általánosított sajátvektora, ugyanis $i > 1$ esetén $J_\lambda \mathbf{e}_i = \lambda \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i-1}$, azaz $(J_\lambda - \lambda I) \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{i-1}$, és így e vektorok egyetlen Jordan-láncot alkotnak: $\mathbf{0} \xleftarrow{J_\lambda - \lambda I} \mathbf{e}_1 \xleftarrow{J_\lambda - \lambda I} \mathbf{e}_2 \xleftarrow{J_\lambda - \lambda I} \dots \xleftarrow{J_\lambda - \lambda I} \mathbf{e}_n$
- m Sőt, ha egy mátrix Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrix, akkor a standard bázis diszjunkt Jordan-láncokból áll.

Jordan-féle normálalak

Jordan-tétel

T Tfh $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$, és $\chi_{\mathbf{A}}(x)$ lineáris tényezők szorzatára bomlik \mathbb{F} fölött (azaz minden gyöke \mathbb{F} -beli). Ekkor \mathbf{A} hasonló egy ún.

Jordan-mátrixhoz, mely Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrix, azaz $\exists \mathbf{C} : \mathbf{J} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ alakja

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{J}_k \end{bmatrix} \quad (2)$$

ahol k az \mathbf{A} független sajátvektorainak maximális száma, és \mathbf{J}_i az i -edik **sajátvektorhoz** tartozó Jordan-blokk.

m Algebrailag zárt \mathbb{F} test esetén minden $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ mátrix hasonló egy Jordan-mátrixhoz, és minden lineáris $A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ trafóhoz van olyan bázis, melyben mátrixa Jordan-mátrix.

- D Az $A = CJC^{-1}$ alakú felbontását az **A Jordan-felbontásának** nev.
- K Minden $\mathbb{C}^{n \times n}$ -beli mátrixhoz és minden $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ lineáris transzformációhoz van olyan bázis, melyben mátrixa Jordan-normálalakú.
- m A különböző Jordan-blokkok különböző sajátvektorokhoz tartoznak, de egy sajátérték több Jordan-blokkban is szerepelhet.
- m A tétel hasonlóságról szól, így lineáris transzformációkra is megfogalmazható:
- T **(Jordan-tétel másik alakja)** L! \mathcal{V} véges dimenziós \mathbb{F} fölötti vektortér, $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lineáris transzformáció és χ_A minden gyöke legyen \mathbb{F} -beli. Ekkor \mathcal{V} -nek van Jordan-bázisa.
- D E bázisban A mátrixa Jordan-mátrix, melyet az **A Jordan-féle normálalakjának** nevezünk. Ez egyúttal normálalakja az A bármely más bázisban felírt A mátrixának is.

P Hány nem hasonlító normálalak létezik, ha $\chi(\lambda) = (1 - \lambda)^4$.

M

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jordan-tétel bizonyítása

B $L!$ \mathcal{V} vektortér és $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lin. trafó.

Megmutatjuk, hogy ha van maximum k független sajátvektor, akkor található k Jordan-lánc is, melyek vektorai a tér bázisát adják.

1 Teljes indukció: $n = 1$ ✓, tfh minden n -nél kisebb dimenzióra igaz

2 (λ, \mathbf{x}) sajátpár, $\mathcal{N}_\lambda := \text{Ker}(A - \lambda I)$ a sajátaltér, dimenziója r ,
 $\mathcal{U}_\lambda := \text{Im}(A - \lambda I)$.

$$r > 0 \rightsquigarrow \dim(\mathcal{U}_\lambda) = n - r < n$$

3 \mathcal{U}_λ invariáns altere A -nak, azaz $A(\mathcal{U}_\lambda) \subseteq \mathcal{U}_\lambda$,

ugyanis \mathcal{U}_λ elemei $(A - \lambda I)\mathbf{v}$ alakúak ($\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ tetszőleges),

$$A(A - \lambda I)\mathbf{v} = (A^2 - \lambda A)\mathbf{v} = (A - \lambda I)(A\mathbf{v}) \in \mathcal{U}_\lambda.$$

- 4 Az indukciós feltevés szerint A -nak az \mathcal{U}_λ -ra való megszorításához léteznek Jordan-lánckokból álló bázis:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbf{0} & \xleftarrow{A-\lambda_1 I} & \mathbf{x}_1^1 & \xleftarrow{A-\lambda_1 I} & \dots & \xleftarrow{A-\lambda_1 I} & \mathbf{x}_{S_1}^1 \\
 \mathbf{0} & \xleftarrow{A-\lambda_2 I} & \mathbf{x}_1^2 & \xleftarrow{A-\lambda_2 I} & \dots & \xleftarrow{A-\lambda_2 I} & \mathbf{x}_{S_2}^2 \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \mathbf{0} & \xleftarrow{A-\lambda_p I} & \mathbf{x}_1^p & \xleftarrow{A-\lambda_p I} & \dots & \xleftarrow{A-\lambda_p I} & \mathbf{x}_{S_p}^p
 \end{array}$$

- 5 $\mathcal{Q} = \mathcal{U}_\lambda \cap \mathcal{N}_\lambda$, $q = \dim(\mathcal{U}_\lambda \cap \mathcal{N}_\lambda)$

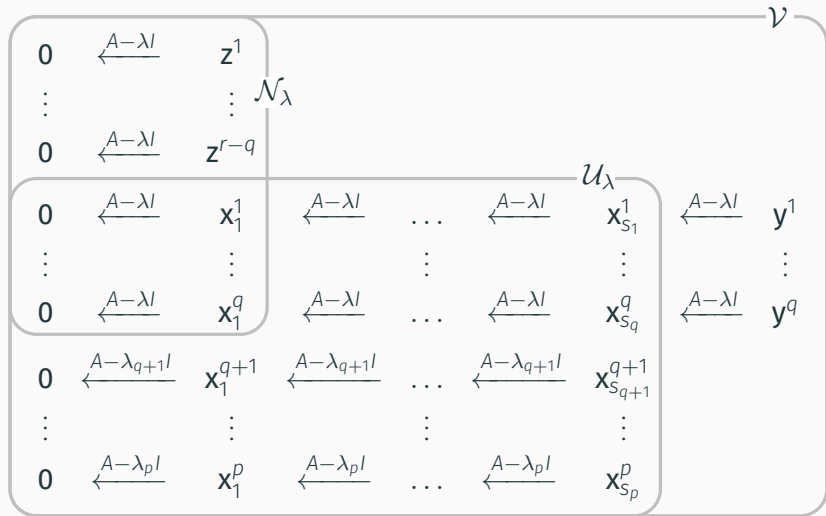
$q = 0$ ($\mathcal{U}_\lambda \cap \mathcal{N}_\lambda = \{\mathbf{0}\}$) $\rightsquigarrow \mathcal{U}_\lambda$ és \mathcal{N}_λ kiegészítő alterek $\rightsquigarrow \mathcal{U}_\lambda$

J-bázisa $\cup \mathcal{N}_\lambda$ egy bázisa = tér egy Jordan-bázisa

$q > 0$. \mathcal{N}_λ elemei az A sajátvektorai: \mathcal{Q} egy bázisa $\mathbf{x}_1^1, \mathbf{x}_1^2, \dots, \mathbf{x}_1^q$.

Láncaik végén $\mathbf{x}_{S_k}^k \in \mathcal{U}_\lambda \rightsquigarrow \exists \mathbf{y}_k: (A - \lambda I)\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_{S_k}^k$ ($k = 1, 2, \dots, q$).

6 $\dim(\mathcal{N}_\lambda) = r$, $\dim(\mathcal{Q}) = q \rightsquigarrow \mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{r-q}$ sajátvektorokból:



- 7 \mathbf{x} -vektorok száma $n - r$, \mathbf{y} -vektorok száma q , \mathbf{z} -vektorok száma $r - q$, $(n - r) + q + (r - q) = n$.
- 8 Belátjuk, hogy függetlenek.
- A konstrukcióból \rightsquigarrow : \mathbf{x} - és \mathbf{z} -vektorok mind függetlenek.
 - Az $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^q$ vektorok lineárisan függetlenek, hisz $A - \lambda I$ általi képvекtoraik (az $\mathbf{x}_{s_i}^i$ vektorok) függetlenek.
 - Az $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^q$ vektorok nem-triviális lineáris kombinációi nem eshetnek \mathcal{N}_λ -ba, mert azt $A - \lambda I$ a $\mathbf{0}$ -ba viszi, így az \mathbf{y} -vektorok függetlenek a \mathbf{z} -vektoroktól.
 - Az $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^q$ vektorok nem-triviális \mathbf{y} lineáris kombinációja nem eshet \mathcal{U}_λ -ba sem, mert $(A - \lambda I)\mathbf{y}$ egyrészt a λ -hoz tartozó Jordán-láncok végső vektorainak lineáris kombinációja, azaz $(A - \lambda I)\mathbf{y} = \sum_i c_i \mathbf{x}_{s_i}^i$, másrészt $\mathbf{y} \in \mathcal{U}_\lambda$, $\mathbf{y} = \sum_i d_i \mathbf{x}_{k_i}^i$, ahol $k_i \leq s_i$, így $(A - \lambda I)\mathbf{y} = \sum_i d_i \mathbf{x}_{k_i-1}^i$, $k_i - 1 < s_i$. E két különböző lineáris kombináció ellentmondás.

A Jordan-alak egyértelműsége

$J - \lambda I$ hatványainak rangja

- L
1. Egy $k \times k$ -as Jordan-blokk hatványai rangjának sorozata
 $\lambda = 0$ esetén: $k, k - 1, k - 2, \dots, 2, 1, 0$; $\lambda \neq 0$ esetén: k, k, \dots, k .
 2. Egy J Jordan-mátrixra $d_k := r((J - \lambda I)^{k-1}) - r((J - \lambda I)^k)$
= a λ -hoz tartozó **legalább k -adrendű** Jordan-blokkok száma
= a λ -hoz tartozó **legalább k -hosszú** Jordan-láncok száma
 3. Egy J Jordan-mátrixra $n_k = d_k - d_{k+1}$
= a λ -hoz tartozó **k -adrendű** Jordan-blokkok száma
= λ -hoz tartozó **k -hosszú** Jordan-láncok száma
 4. A legnagyobb λ -blokk mérete $s \iff s$ az a legkisebb kitevő,
melyre $r((J - \lambda I)^s) = r((J - \lambda I)^{s+1})$.
- B
1. $\lambda = 0$ ✓; $\lambda \neq 0$ esetén a blokk invertálható ✓
 2. A k -nál kisebb rendű blokkok rangja e hatványokban 0,
minden más blokkban eggyel csökken
 4. ha van s -nél hosszabb lánc, a rang csökken s -ről $s + 1$ -re

- T** Egy mátrix Jordan-normálalakja a Jordan-blokkok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.
- B** Elég belátni, hogy bármely két hasonló mátrix Jordan-alakjának meghatározó adatai a hasonlóságra nézve invariánsak.
- A Jordan-blokkok, és így a Jordan-láncok száma megegyezik a független sajátvektorok maximális számával – ez invariáns.
 - A λ -hoz tartozó $k \times k$ -as blokkok száma Jordan-mátrix esetén csak a $J - \lambda I$ hatványainak rangjától függ, ami invariáns.
- K** Az A Jordan-féle normálalakjának meghatározásához elég ismerni $A - \lambda I$ hatványainak rangját minden λ sajátértékre.
- B** ha $A \sim J$, akkor $A - \lambda I \sim J - \lambda I$
 $\rightsquigarrow J - \lambda I$ és $A - \lambda I$ hatványainak rangjai megegyeznek

P Írjuk fel az $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ Jordan-normálalakját, ha minden sajátértéke λ , és az $r_k = r((A - \lambda I)^k)$ rangok

k	0	1	2	3	4
rang	13	8	5	2	0

M (A láncok száma 5, mert $13 - r(A - \lambda I) = 5$). d_k és n_k :

k	0	1	2	3	4
r_k	13	8	5	2	0
d_k		5	3	3	2
n_k		2	0	1	2

- Tehát a k -hosszú láncok száma: $n_1 = 2, n_3 = 1, n_4 = 2$:

$$\begin{array}{l}
 0 \leftarrow \frac{A-\lambda I}{} \mathbf{x}_1^1 \leftarrow \frac{A-\lambda I}{} \mathbf{x}_2^1 \leftarrow \frac{A-\lambda I}{} \mathbf{x}_3^1 \leftarrow \frac{A-\lambda I}{} \mathbf{x}_4^1 \\
 0 \leftarrow \frac{A-\lambda I}{} \mathbf{x}_1^2 \leftarrow \frac{A-\lambda I}{} \mathbf{x}_2^2 \leftarrow \frac{A-\lambda I}{} \mathbf{x}_3^2 \leftarrow \frac{A-\lambda I}{} \mathbf{x}_4^2 \\
 0 \leftarrow \frac{A-\lambda I}{} \mathbf{x}_1^3 \leftarrow \frac{A-\lambda I}{} \mathbf{x}_2^3 \leftarrow \frac{A-\lambda I}{} \mathbf{x}_3^3 \\
 0 \leftarrow \frac{A-\lambda I}{} \mathbf{x}_1^4 \\
 0 \leftarrow \frac{A-\lambda I}{} \mathbf{x}_1^5
 \end{array}$$

- Tehát az A lineáris leképezés Jordan-mátrixa:

$$\begin{bmatrix}
 \lambda & 1 & & & & & & & \\
 & \lambda & 1 & & & & & & \\
 & & \lambda & 1 & & & & & \\
 & & & \lambda & & & & & \\
 \lambda & 1 & & & & & & & \\
 & \lambda & 1 & & & & & & \\
 & & \lambda & 1 & & & & & \\
 & & & \lambda & & & & & \\
 & & & & \lambda & 1 & & & \\
 & & & & & \lambda & 1 & & \\
 & & & & & & \lambda & & \\
 & & & & & & & \lambda & \\
 & & & & & & & & \lambda
 \end{bmatrix}$$

P $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{10 \times 10}$, λ 10-szeres algebrai multiplicitású sajátérték. Az $r_k = r((\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^k)$ rangok rendre $r_1 = 5$, $r_2 = 2$, $r_3 = 1$, $r_4 = 0$. Írjuk fel a Jordan-normálalakját!

M A blokkok száma, ami megegyezik a Jordan-láncok számával 5, mivel $n - r(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 10 - 5 = 5$.

A leghosszabb lánc hossza 4, mivel $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ legkisebb zérusmátrixot adó hatványa a 4-dik.

Az egyenletrendszer és megoldása, valamint a \mathbf{J} Jordan-mátrix:

k	0	1	2	3	4
r_k	10	5	2	1	0
d_k		5	3	1	1
n_k		2	2	0	1

 $\Rightarrow \mathbf{J} =$

λ	1				
λ	1				
λ	1				
λ					

P $A \in \mathbb{C}^{14 \times 14}$, sajátértékei $\lambda = 3, 2, 1$.

$A - 3I$ hatványainak rangja rendre: 12, 11, 10, 9;

$A - 2I$ hatványainak rangja rendre: 12, 10, 9;

$A - I$ hatványainak rangja rendre: 11, 10.

Írjuk fel a Jordan-normálalakját!

M $n = 14$, a multiplicitások a hatványok alapján $m(3) \geq 5$, $m(2) \geq 5$, $m(1) \geq 4$. Ezek összege 14, így mindenütt egyenlőség áll.

$\lambda = 3$:

k	0	1	2	3	4	
r_k	14	12	11	10	9	$\Rightarrow n_4 = 1$
d_k		2	1	1	1	$n_1 = 1$
n_k		1	0	0	1	

k	0	1	2	3
r_k	14	12	10	9
d_k	2	2	1	
n_k		0	1	1

$$\Rightarrow \begin{matrix} n_3 = 1 \\ n_2 = 1 \end{matrix}$$

k	0	1	2
r_k	14	11	10
d_k	3	1	
n_k		2	1

$$\Rightarrow \begin{matrix} n_2 = 1 \\ n_1 = 2 \end{matrix}$$

- Összefoglalva: $J =$

3	1						
3	1						
3	1						
		3					
			2	1			
			2	1			
				2			
					1	1	
						1	
							1

- m Ha $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-1}$ valamely lépcsős alakja \mathbf{L} , akkor $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k$ lépcsős alakját egyszerűbb az $\mathbf{L}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ -ből számítani, mivel \mathbf{L} kiszámolása csak elemi mátrixokkal való balról szorzást jelent, azaz

$$\mathbf{L}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \mathbf{E}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \mathbf{E}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k.$$

- m Ha m_λ a λ algebrai multiplicitása, és s a legnagyobb λ -blokk rendje, akkor $r((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^s) = n - m_\lambda$.
- m Ha a rangok csökkenése eléri az 1-et, azaz $d_k = 1$, akkor – mivel a d_k sorozat monoton csökkenő – a rangok sorozata 1-esével csökken addig, amíg el nem éri az $n - m_\lambda$ értéket.

P A rangok számítása: Mi a Jordan-normálalakja a köv. mátrixnak, ha $\chi(x) = -(x-1)^4(x+1)$?

$$\begin{bmatrix} -7 & -2 & -8 & 0 & -3 \\ -4 & -1 & -4 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 9 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

M $\lambda = -1$: 1 db 1×1 -es blokk ✓

- $\lambda = 1$: $r(\mathbf{A} - \mathbf{I})$ számítása

$$\begin{bmatrix} -8 & -2 & -8 & 0 & -3 \\ -4 & -2 & -4 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- $\rightsquigarrow r_1 = 3$

- $r((A - I)^2)$ számítása

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & -2 & -8 & 0 & -3 \\ -4 & -2 & -4 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow r_2 = 2 \rightsquigarrow r_3 = 1 (\rightsquigarrow r_4 = 1)$$

Innen a táblázat:

k	0	1	2	3	4
r_k	5	3	2	1	1
d_k	2	1	1	0	
n_k		1	0	1	0

- 1 db 1×1 -es és 1 db 3×3 -as blokk

F Igazoljuk, hogy minden invertálható komplex mátrixnak van négyzetgyöke! Igaz-e ez a szinguláris mátrixokra?

M $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A} \iff (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C})^2 = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$, tehát feltehető, hogy \mathbf{A} Jordan-mátrix, és abból elég blokkonként négyzetgyököt vonni, így tfh $\lambda \neq 0$, $\mu^2 = \lambda$ és

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mu & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \mu & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu \end{bmatrix}.$$

két Jordan-blokk.

- Megmutatjuk, hogy $\mathbf{M}^2 \sim \mathbf{A}$.

$$\mathbf{M}^2 = (\mu\mathbf{I} + \mathbf{N})^2 = \mu^2\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{N} + \mathbf{N}^2 = \lambda\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{N} + \mathbf{N}^2 \rightsquigarrow$$

$\chi_{\mathbf{M}^2}(x) = (\lambda - x)^n \rightsquigarrow r(\mathbf{M}^2 - \lambda\mathbf{I}) = r(2\mu\mathbf{N} + \mathbf{N}^2) = n - 1 \rightsquigarrow$ a sajátaltér 1-dimenziós \rightsquigarrow a J-alak egyetlen Jordan-blokk \rightsquigarrow

$$\exists \mathbf{C} : \mathbf{C}^{-1}\mathbf{M}^2\mathbf{C} = \mathbf{A} \rightsquigarrow (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{C})^2 = \mathbf{A}.$$

Jordan-mátrix és minimálpolinom

T Legyen az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix spektruma $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$.

1. $\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2} \dots (x - \lambda_s)^{m_s}$, ahol m_k a λ_k -hoz tartozó legnagyobb Jordan-blokk mérete.
2. $\mu_{\mathbf{A}} = \chi_{\mathbf{A}} \iff \mathbf{A}$ minden sajátértékének 1 a geometriai multiplicitása.
3. \mathbf{A} diagonalizálható \iff a minimálpolinom különböző lineáris tényezők szorzata: $\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_s)$.

B Hasonló mátrixok minimálpolinomja azonos, elég csak a Jordan normálalakú mátrixokra szorítkozni. $\chi_{\mathbf{A}}(x) = \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{a_i}$.

1. $\mu_{\mathbf{A}}(x) \mid \chi_{\mathbf{A}}(x), x - \lambda_i \mid \mu_{\mathbf{A}}(x) \rightsquigarrow \mu_{\mathbf{A}}(x) = \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{k_i} \quad (1 \leq k_i \leq a_i)$.

$\mu_{\mathbf{A}}(x) = \prod_{i=1}^s (x - \lambda_i)^{m_i}$ annullálja \mathbf{A} -t, hisz $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{m_i}$ annullálja az összes λ_i -hez tartozó Jordan-blokkot $\rightsquigarrow \prod (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{m_i} = \mathbf{O}$.

ha vmely $x - \lambda_i$ tényező m_i -nél alacsonyabb hatványon szerepelne, nem annullálná a λ_i -hez tartozó legnagyobb Jordan-blokkot, így e blokk nem lenne zérus $\mu(\mathbf{A})$ -ban sem $(\prod_{j \neq i} (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}) \neq \mathbf{O})$

2. $\mu_{\mathbf{A}} = \chi_{\mathbf{A}} \iff \mathbf{A}$ minden sajátértékéhez egyetlen Jordan-blokk tartozik \iff minden geometriai multiplicitás 1.

3. \mathbf{A} diagonalizálható \iff minden Jordan-blokkja 1×1 -es \iff a legnagyobb Jordan-blokkok 1×1 -esek.

A Jordan-normálalak felírása a minimálpolinom ismeretében

T $!$ $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, J az A -hoz hasonló Jordan-mátrix,

$$\chi_A(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{a_1} \dots (x - \lambda_s)^{a_s} \text{ és}$$

$\mu_A(x) = (x - \lambda_1)^{b_1} \dots (x - \lambda_s)^{b_s}$, ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ különböző sajátértékek.

1. a_i a J -ben a λ_i -hez tartozó Jordan-blokkok összmérete,
2. b_i a J -ben a λ_i -hez tartozó Jordan-blokkok max mérete,
3. $\dim \mathcal{V}_{\lambda_i}$ a J -ben a λ_i -blokkok száma.

B 1. ✓

2. A minimálpolinom a diagonális blokkok minimálpolinomjainak legkisebb közös többszöröse és egy $m \times m$ -es λ -blokk minimálpolinomja $(x - \lambda)^m$.

3. $J - \lambda_i I$ zérussorait alulra téve lépcsős alakot kapunk, így $\dim \mathcal{V}_{\lambda_i} = \mathbf{0}$ -sorok száma = J -beli λ_i -blokkok száma.

K Ha χ_A minden gyökének ≤ 6 a multiplicitása, akkor a fentiekből meghatározható a Jordan-normálalak.

P $\chi(x) = -(x-2)^5$, $\mu(x) = (x-2)^2$, $\dim \mathcal{V}_2 = 3$

M $5 = 2 + 2 + 1$

P $\chi(x) = -(x-2)^5$, $\mu(x) = (x-2)^3$, $\dim \mathcal{V}_2 = 3$

M $5 = 3 + 1 + 1$

P Határozzuk meg az **A** Jordan-normálalakját és minimálpolinomját!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

M $r(A - I) = 2 \rightsquigarrow \dim \mathcal{V}_1 = 4 - 2 \rightsquigarrow 3 = 2 + 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \mu(x) = (x-1)^2(x-3)$$

Egyszerű következmények

K $L! \mathbb{F}$ algebrailag zárt, $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ vektortér, az $A : \mathcal{V}_{\mathbb{F}} \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ lineáris leképezés spektruma $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$. Ekkor

$$\mathcal{V}_{\mathbb{F}} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_s,$$

ahol \mathcal{U}_i a λ_i -hez tartozó általánosított sajátvektorok A -invariáns altere.

m A tétel analóg módon igaz $\mathcal{V}_{\mathbb{F}} = \mathbb{F}^n$, $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ esetén is.

m A spektrálfelbontás némi módosítással kiterjeszhető nemdiagonalizálható mátrixokra (lin. leképezésekre) is:

K **Spektráltétel általánosítása** \mathbb{F} alg. zárt, $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$, \mathbf{A} spektruma $\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$. Ekkor \mathbf{A} felírható

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^s \mathbf{A} \mathbf{P}_i = \sum_{i=1}^s \mathbf{P}_i \mathbf{A} \mathbf{P}_i$$

alakokban, ahol \mathbf{P}_i a λ_i -hez tartozó spektrális vetítő, ami az $\mathcal{U}_i = \mathcal{N}((\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{m_i})$ -re vetít $\mathcal{O}((\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{m_i})$ mentén.

B Bizonyítjuk, hogy ilyen felbontás létezik (a spektrálfelbontás bizonyítására alapozunk): $\mathbf{A} = \mathbf{C} \mathbf{J} \mathbf{C}^{-1}$ a Jordan-felbontás,

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i, \text{ ahol: } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \dots & \mathbf{X}_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_k \end{bmatrix}.$$

Láttuk, hogy $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_k = \mathbf{I}$, $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{O}$, ha $i \neq j$.

$\mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{I} = \sum_i \mathbf{A} \mathbf{P}_i$, és $\mathbf{A} = \mathbf{I} \mathbf{A} = \sum_i \mathbf{P}_i \mathbf{A} \mathbf{P}_i$, mivel $\mathbf{P}_i \mathbf{A} \mathbf{P}_j = \mathbf{O}$, hisz \mathbf{P}_j az \mathcal{U}_j -re vetít, mely \mathbf{A} -invariáns, és azt az alteret \mathbf{P}_i a $\mathbf{0}$ -ba viszi, ha $i \neq j$.

Valós Jordan-alak

Valós Jordan-alak

T Minden $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix hasonló egy olyan blokkdiagonális mátrixhoz, melynek minden diagonális blokkja vagy valós sajátértékhez tartozó Jordan-blokk, vagy egy komplex $a \pm bi$ sajátértékpárhoz tartozó

$$\left[\begin{array}{cc|cc|ccc|cc} a & b & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a & b & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -b & a & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -b & a \end{array} \right]$$

alakú blokk.

B Valós sajátértékhez tartozó invariáns altérben valós vektorokból is találunk Jordan-láncot, pl. a komplex láncok vektorainak valós része megfelel.

- Legyen $a + bi$ komplex sajátérték t -hosszú Jordan-lánccal:

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1 i, \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2 i, \dots, \mathbf{u}_t + \mathbf{v}_t i,$$

így egyszerre 2 láncot kapunk, mert

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}_j \pm \mathbf{v}_j i) = (a \pm bi)(\mathbf{u}_j \pm \mathbf{v}_j i) + \mathbf{u}_{j-1} \pm \mathbf{v}_{j-1} i, \quad (j = 2, \dots, t)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}_1 \pm \mathbf{v}_1 i) = (a \pm bi)(\mathbf{u}_1 \pm \mathbf{v}_1 i).$$

- $!$ $t = 2$ (a $t = 1$ és a $t > 2$ esetek kezelése hasonló). A valós és imaginárius részek összevetéséből

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_1 = a\mathbf{u}_1 - b\mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = b\mathbf{u}_1 + a\mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_2 = a\mathbf{u}_2 - b\mathbf{v}_2 + \mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_2 = b\mathbf{u}_2 + a\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$$

- Matriks alakban

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{bmatrix}$$

P Mi a $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ komplex és valós Jordan-felbontása?

M $\chi(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 5 = (x - 2 - i)(x - 2 + i)(x - 1)^2$
(kísérő mátrix)

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 9 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Oldjuk meg az $(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1$ egyenletrendszert:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 14 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & -14 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \end{array} \right]$$

- $\rightsquigarrow \mathbf{x}_2 = (5, -4, 1, 0)$ megfelel.

- A komplex sajátértékekhez tartozó sajátvektorok:

$$- \mathbf{A} - (2+i)\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2-i & 0 & 0 & -5 \\ 1 & -2-i & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -2-i & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 4-i \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2-i \\ 0 & 1 & 0 & -5+2i \\ 0 & 0 & 1 & 4-i \end{bmatrix}$$

innen $\mathbf{y}_1 = (-2+i, 5-2i, -4+i, 1)$

- A $2-i$ sajátértékhez tartozó sajátvektort nem kell kiszámolni, mert az nyilván \mathbf{y}_1 konjugáltja lesz, azaz

$\mathbf{y}_2 = (-2-i, 5+2i, -4-i, 1)$

- Összefoglalva:

$$\mathbf{J} = \left[\begin{array}{c|cc} 2+i & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2-i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2+i & -2-i & -5 & 5 \\ 5-2i & 5+2i & 9 & -4 \\ -4+i & -4-i & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Innen a Jordan-felbontás \mathbb{C} -ben: $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}$.

- A valós felbontáshoz tekintsük a sajátvektorok valós és imaginárius részét:

$$\mathbf{u} = (-2, 5, -4, 1), \mathbf{v} = (1, -2, 1, 0).$$

- Ekkor

$$\mathbf{J}_{\mathbb{R}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_{\mathbb{R}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -5 & 5 \\ 5 & -2 & 9 & -4 \\ -4 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- A Jordan-felbontás \mathbb{R} -ben: $\mathbf{A} = \mathbf{C}_{\mathbb{R}} \mathbf{J}_{\mathbb{R}} \mathbf{C}_{\mathbb{R}}^{-1}$.