BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Bevezetés az algebrába 2

BMETE91AM37

Ortogonális (unitér) hasonlóság

H607 – 2017-03-10

Wettl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK

Triangularizáció

Schur-felbontás

T 1. Valós mátrix valós sajátértékekkel: Minden valós négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix, melynek összes sajátértéke valós, ortogonálisan hasonló egy $\mathbf{T}$ felső háromszögmátrixhoz, azaz van olyan $\mathbf{Q}$ ortogonális mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{QTQ}^\mathsf{T}$.
2. Komplex mátrix: Minden komplex négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix unitéren hasonló egy $\mathbf{T}$ felső háromszögmátrixhoz, azaz van olyan $\mathbf{U}$ unitér mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{UTU}^\mathsf{H}$.

m a főátló elemei a sajátértékek lesznek, ezért valós esetben kikötöttük hogy azok is valósak legyenek.

B (valósra) $n = 1$ trivi. Legyen $(\lambda, \mathbf{u}_1)$ sajátpár, $\mathbf{u}_1$ egységvektor.

\- Kiegészítés ONB-sá: $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$, a $\mathbf{Q}_0 = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \dots\ \mathbf{u}_n]$ ortogonális mátrixszal

$$\mathbf{Q}_0^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^\mathsf{T} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}.$$

- $\mathbf{B} \sim \mathbf{A} \rightsquigarrow$ sajátértékeik azonosak $\rightsquigarrow \mathbf{A}_1$ minden sajátértéke $\mathbf{A}$-nak is sajátértéke.
- teljes indukció $\rightsquigarrow \mathbf{A}_1$-hez létezik olyan $\mathbf{Q}_1$ ortogonális és $\mathbf{T}_1$ felső háromszög mátrix, hogy $\mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{T}_1\mathbf{Q}_1^T$.
- Ekkor a $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0\left[\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{smallmatrix}\right]$ ortogonális mátrixszal:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} &= \left(\mathbf{Q}_0\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}\right)^T \mathbf{A}\left(\mathbf{Q}_0\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}^T \mathbf{Q}_0^T\mathbf{A}\mathbf{Q}_0\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^T\mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1^T\mathbf{A}_1\mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^T\mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

- Ez utóbbi mátrix pedig felsőháromszög-mátrix.

P Diagonalizálható-e az alábbi mátrix? Adjuk meg egy Schur-felbontását!

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 13 & -16 \\ 9 & -11 \end{bmatrix}$$

M Karakterisztikus polinom: $(x-1)^2$

- sajátérték: $\lambda_{1,2} = 1$, sajátaltér: span$((4,3))$.
- ONB: $\{(4/5, 3/5), (-3/5, 4/5)\}$, $\mathsf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$
- Innen $\mathsf{Q}^\mathsf{T}\mathsf{A}\mathsf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & -25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

P Hozzuk ortogonális hasonlósági transzformációval felső háromszögalakra a következő mátrixot!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & -3 \\ 3 & 17 & -6 \\ -12 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

M $\chi_{\mathbf{A}}(x) = -x^3 + 28x^2 - 245x + 686 = (7-x)^2(14-x)$

- $\lambda_{1,2} = 7$, $\mathbf{x}_1 = (2,3,6)$; $\lambda_3 = 14$, $\mathbf{x}_2 = (9,17,13)$
- $\mathbf{x}_1$-et kiegészítjük ONB-sá:

$$\mathbf{Q}_0 = [\mathbf{x}_1|\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_3] = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 3 & -2 & -6 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_0^T\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 = \left[\begin{array}{c|cc} 7 & 0 & -21 \\ \hline 0 & 14 & 0 \\ 0 & 7 & 7 \end{array}\right]$$

tehát

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}.$$

- A 7 sajátértékhez tartozó sajátvektor $(0, 1)$, rá merőleges a $(1, 0)$. Így

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{Q}_1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Innen

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -2 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \text{ és ebből}$$

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 7 & -21 & 0 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

P Számítsuk ki $\mathbf{A}^{20}$ értékét, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

M $\chi(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = (1-x)^3$, sajátértékek: $\lambda_{1,2,3} = 1$, sajátvektorok: $\frac{1}{3}(1, 2, -2)$.

- Kiegészítjük ONB-sá, amiből a következő ortogonális mátrixot kapjuk:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ami már felső háromszög alakú.

- Az $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ jelöléssel $\mathbf{T} = \mathbf{I} + \mathbf{N}$, $\mathbf{N}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{N}^3 = \mathbf{O}$.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}^{20} &= (\mathbf{I} + \mathbf{N})^{20} = \mathbf{I}^{20} + \binom{20}{1}\mathbf{I}^{19}\mathbf{N} + \binom{20}{2}\mathbf{I}^{18}\mathbf{N}^2 + \binom{20}{3}\mathbf{I}^{17}\mathbf{N}^3 + \dots \\
&= \mathbf{I}^{20} + \binom{20}{1}\mathbf{I}^{19}\mathbf{N} + \binom{20}{2}\mathbf{I}^{18}\mathbf{N}^2 \\
&= \mathbf{I} + 20\mathbf{N} + 190\mathbf{N}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 60 & 1710 \\ 0 & 1 & 60 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{A}^{20} = \mathbf{Q}\mathbf{T}^{20}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 421 & 190 & 400 \\ 760 & 341 & 720 \\ -800 & -360 & -759 \end{bmatrix}.
$$

K Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, akkor az altereknek van egy olyan sorozata, melyekre

$$\{\mathbf{0}\} = \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{V}_n = \mathbb{C}^n,$$

melyek mindegyikét $\mathbf{A}$ önmagába képzi, és létezik egy ortonormált $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ bázis, melynek első k vektorára

$$\operatorname{span}(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k) = \mathcal{V}_k$$

minden $k = 1, 2, \ldots, n$ számra.

B A bázis megegyezik azzal a bázissal, melyben a mátrix alakja felső háromszög.

Valós mátrix komplex sajátértéke*

Á $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $(a+\mathrm{i}b, \mathbf{u}+\mathrm{i}\mathbf{v})$ egy sajátpár, ahol $b \neq 0$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor

1. $(\overline{a+\mathrm{i}b}, \overline{\mathbf{u}+\mathrm{i}\mathbf{v}}) = (a-\mathrm{i}b, \mathbf{u}-\mathrm{i}\mathbf{v})$ szintén sajátpár,
2. $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ lineárisan függetlenek (különben $\mathcal{V}_{a+\mathrm{i}b} = \mathcal{V}_{a-\mathrm{i}b}$ lenne),
3. A hasonló egy $\left[\begin{array}{cc|c} a & b & \dots \\ -b & a & \dots \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathsf{A}_1 \end{array}\right]$ alakú mátrixhoz.

B $(a+\mathrm{i}b, \mathbf{u}+\mathrm{i}\mathbf{v})$ sajátpár $\rightsquigarrow$

$\mathsf{A}(\mathbf{u}+\mathrm{i}\mathbf{v}) = (a+\mathrm{i}b)(\mathbf{u}+\mathrm{i}\mathbf{v}) = a\mathbf{u} - b\mathbf{v} + \mathrm{i}(b\mathbf{u}+a\mathbf{v})$

$\rightsquigarrow \mathsf{A}(\mathbf{u}-\mathrm{i}\mathbf{v}) = a\mathbf{u} - b\mathbf{v} - \mathrm{i}(b\mathbf{u}+a\mathbf{v}) = (a-\mathrm{i}b)(\mathbf{u}-\mathrm{i}\mathbf{v})$

$\rightsquigarrow (a-\mathrm{i}b, \mathbf{u}-\mathrm{i}\mathbf{v})$ is sajátpár.

$\rightsquigarrow \mathsf{A}\mathbf{u} = a\mathbf{u} - b\mathbf{v}$, $\mathsf{A}\mathbf{v} = b\mathbf{u} + a\mathbf{v}$,

$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ftlenek, bázissá kiegészítve invertálható mátrixot kapunk:

$$\mathsf{A}\,[\mathbf{u}|\mathbf{v}|\dots] = [\mathbf{u}|\mathbf{v}|\dots]\left[\begin{array}{cc|c} a & b & \dots \\ -b & a & \dots \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathsf{A}_1 \end{array}\right]$$

Valós Schur-felbontás 1. változat*

T L! $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. $\exists\, \mathsf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix, és egy olyan

$$\mathsf{T} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \Lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Lambda_k \end{bmatrix}, \tag{1}$$

alakú felső blokkháromszögmátrix, hogy $\mathsf{A} = \mathsf{C}\mathsf{T}\mathsf{C}^{-1}$, ahol Λ_j ($j = 1, \dots, k$) alakja vagy

- $[\lambda]$, ahol λ az A valós sajátértéke, vagy
- $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right]$, ahol $a \pm b\mathrm{i}$ az A két nem valós sajátértéke.

B Teljes indukcióval: ha λ valós sajátérték, akkor $\mathsf{A} \sim \left[\begin{smallmatrix} \lambda & \ast \\ \mathbf{0} & \mathsf{A}_1 \end{smallmatrix}\right]$

ha $\lambda = a \pm \mathrm{i}b$ komplex sajátérték, akkor $\mathsf{A} \sim \begin{bmatrix} a & b & * \\ -b & a & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathsf{A}_1 \end{bmatrix}$

Valós Schur-felbontás 2. változat*

T L! $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. $\exists\ Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonális és egy T felső blokkháromszögmátrix, hogy $A = QTQ^T$, és T minden diagonális eleme vagy az A egy valós sajátértékét tartalmazó 1×1-es mátrix, vagy egy olyan 2×2-es mátrix, melynek két nem valós sajátértéke egymás komplex konjugáltja.

B $C = QR$ QR-felbontása.

- $\rightsquigarrow R^{-1}Q^TAQR = T$, azaz $Q^TAQ = RTR^{-1}$.
- Blokkosítsuk R-et a T főátlójának blokkméretei szerint:

$$Q^TAQ = R\begin{bmatrix}\Lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \Lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Lambda_k\end{bmatrix}R^{-1} = \begin{bmatrix}R_1\Lambda_1R_1^{-1} & * & \dots & * \\ 0 & R_2\Lambda_2R_2^{-1} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R_k\Lambda_kR_k^{-1}\end{bmatrix}.$$

- $\Lambda_j \sim R_j\Lambda_jR_j^{-1}$

P Határozzuk meg a $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -6 & -2 \\ 8 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ mátrix (1) alakú felbontását!

M Karakterisztikus polinom: $x^3 - 3x^2 + 7x - 5$, sajátértékek $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm 2\mathrm{i}$.

sajátvektorok: $\mathbf{x}_1 = (1, -4, 10)$, $\mathbf{x}_{2,3} = (5, -2 \pm 6\mathrm{i}, -4 \mp 3\mathrm{i})$

a $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -2 & 6 & -4 \\ -4 & -3 & 10 \end{bmatrix}$ jelöléssel $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

m E $\mathbf{C}$ mátrix nem ortogonális vektorokból áll, nem tehető ortogonálissá.

Unitér diagonalizálhatóság

Unitér diagonalizálhatóság

D Az $\mathbf{A}$ mátrix unitéren diagonalizálható, ha találunk egy $\mathbf{U}$ unitér és egy Λ diagonális mátrixot, melyre $\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{U} = \Lambda$ (illetve $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^{\mathsf{H}}$).

T (Komplex spektráltétel) Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható unitéren, ha normális.

m A hasonlóság unitér mátrixának oszlopvektorai adják azt az ONB-t, melyben a mátrix alakja diagonális.

B $(\Rightarrow)$ $\forall z \in \mathbb{C}: \ \bar{z}z = z\bar{z} \rightsquigarrow$ minden komplex diagonális mátrix normális, így $\Lambda^{\mathsf{H}}\Lambda = \Lambda\Lambda^{\mathsf{H}}$. $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^{\mathsf{H}} \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A} &= (\mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}}(\mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^{\mathsf{H}}) = \mathbf{U}\Lambda^{\mathsf{H}}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^{\mathsf{H}} = \mathbf{U}\Lambda^{\mathsf{H}}\Lambda\mathbf{U}^{\mathsf{H}} \\ &= \mathbf{U}\Lambda\Lambda^{\mathsf{H}}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}\Lambda^{\mathsf{H}}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} = (\mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^{\mathsf{H}})(\mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}. \end{aligned}$$

Unitér diagonalizálhatóság

$(\Leftarrow)$ Schur-felbontás: $\mathsf{A} = \mathsf{U}\mathsf{T}\mathsf{U}^{\mathsf{H}}$ (U unitér, T felsőháromszög-mátrix). A normális $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \mathsf{T}^{\mathsf{H}}\mathsf{T} &= (\mathsf{U}^{\mathsf{H}}\mathsf{A}\mathsf{U})^{\mathsf{H}}(\mathsf{U}^{\mathsf{H}}\mathsf{A}\mathsf{U}) = \mathsf{U}^{\mathsf{H}}\mathsf{A}^{\mathsf{H}}\mathsf{U}\mathsf{U}^{\mathsf{H}}\mathsf{A}\mathsf{U} = \mathsf{U}^{\mathsf{H}}\mathsf{A}^{\mathsf{H}}\mathsf{A}\mathsf{U} \\ &= \mathsf{U}^{\mathsf{H}}\mathsf{A}\mathsf{A}^{\mathsf{H}}\mathsf{U} = \mathsf{U}^{\mathsf{H}}\mathsf{A}\mathsf{U}\mathsf{U}^{\mathsf{H}}\mathsf{A}^{\mathsf{H}}\mathsf{U} = (\mathsf{U}^{\mathsf{H}}\mathsf{A}\mathsf{U})(\mathsf{U}^{\mathsf{H}}\mathsf{A}\mathsf{U})^{\mathsf{H}} = \mathsf{T}\mathsf{T}^{\mathsf{H}}. \end{aligned}$$

- A T mátrix alakja

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix},$$

$\rightsquigarrow$ $[\mathsf{T}^{\mathsf{H}}\mathsf{T}]_{11} = |t_{11}|^2$, $[\mathsf{T}\mathsf{T}^{\mathsf{H}}]_{11} = |t_{11}|^2 + |t_{12}|^2 + \dots + |t_{1n}|^2$, $\rightsquigarrow$
$t_{12} = \dots = t_{1n} = 0$,
hasonlóan $[\mathsf{T}^{\mathsf{H}}\mathsf{T}]_{22}$ és $[\mathsf{T}\mathsf{T}^{\mathsf{H}}]_{22}$-ből $t_{23} = \dots = t_{2n} = 0$, stb.
$\rightsquigarrow$ T diagonális.

Következmények

Á Minden ferdén szimmetrikus, önadjungált, ferdén önadjungált, unitér mátrix unitéren diagonalizálható!

Á Egy unitéren diagonalizálható mátrix pontosan akkor

1. önadjungált, ha diagonális alakjában minden elem valós.
2. ferdén önadjungált, ha diag. alakjában minden imaginárius.
3. unitér, ha diag. alakjában minden elem abszolút értéke 1.

B $\mathsf{A} = \mathsf{U}\Lambda\mathsf{U}^\mathsf{H} \rightsquigarrow \mathsf{A}^\mathsf{H} = \mathsf{U}\Lambda^\mathsf{H}\mathsf{U}^\mathsf{H}$. A $(\Rightarrow)$ irányt már tudjuk, a $(\Leftarrow)$ bizonyítása:

1. $\mathsf{A}^\mathsf{H} = \mathsf{U}\Lambda^\mathsf{H}\mathsf{U}^\mathsf{H} = \mathsf{U}\Lambda\mathsf{U}^\mathsf{H} = \mathsf{A}$
2. $\mathsf{A}^\mathsf{H} = \mathsf{U}\Lambda^\mathsf{H}\mathsf{U}^\mathsf{H} = \mathsf{U}(-\Lambda)\mathsf{U}^\mathsf{H} = -\mathsf{A}$
3. mivel $z\bar{z} = |z|^2 = 1$, így $z^{-1} = \bar{z}$, ezért $\Lambda^{-1} = \Lambda^\mathsf{H} \rightsquigarrow$ $\mathsf{A}\mathsf{A}^\mathsf{H} = \mathsf{U}\Lambda\mathsf{U}^\mathsf{H}\mathsf{U}\Lambda^\mathsf{H}\mathsf{U}^\mathsf{H} = \mathsf{I}$.

Következmények

T (Főtengelytétel) Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor önadjungált, ha van olyan $\mathbf{U}$ unitér mátrix, hogy $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$ valós diagonális.

T (Valós főtengelytétel) Az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható ortogonálisan, ha szimmetrikus.

B Ha $\mathbf{A}$ ortogonálisan diagonalizálható, akkor $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^\mathsf{T}$, Λ diagonális és $\Lambda = \Lambda^\mathsf{T}$, így $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{Q}\Lambda^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{A}$.
Ha szimmetrikus, akkor sajátértékei valósak, így a Schur-tétel szerint $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}$, ekkor $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{Q}\mathbf{T}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}$, de $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\mathsf{T}$ következtében $\mathbf{T} = \mathbf{T}^\mathsf{T}$, akkor viszont $\mathbf{T}$ csak diagonális lehet.

K Két önadjungált (két ferdén önadjungált/két unitér) mátrix pontosan akkor hasonló (unitéren), ha sajátértékeik azonosak.

B Ha $\mathbf{P}$ permutációmátrix ($p_{\pi(i)i} = 1$), ahol π permutáció, akkor $\mathbf{P}^\mathsf{T}\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\mathbf{P} = \operatorname{diag}(\lambda_{\pi(1)}, \lambda_{\pi(2)}, \ldots, \lambda_{\pi(n)})$.

P Hozzuk unitér mátrixszal való konjugálással felső háromszögalakra a

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrixot!

M $\lambda = 0$ láthatóan sajátérték, a sajátvektor $\mathbf{x} = (1, 0, -1)$. Kiegészítjük $\mathbb{R}^3$ bázisává, ortogonalizáljuk, majd normáljuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{C}$$

$$\mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$\begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} & -4 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, ami már háromszög alakú.

Valós normális mátrixok*

Valós normális mátrixok blokkdiagonalizálhatósága

T Legyen $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. A pontosan akkor normális, ha van olyan $\mathsf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonális mátrix, hogy

$$\mathsf{Q}^\mathsf{T}\mathsf{A}\mathsf{Q} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \mathsf{O} & \dots & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & \Lambda_2 & \dots & \mathsf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{O} & \mathsf{O} & \dots & \Lambda_k \end{bmatrix}, \tag{2}$$

ahol Λ_i $(i = 1, 2, \dots, k)$ vagy 1×1-es, vagy 2×2-es valós mátrix, utóbbi esetben az alakja

$$\begin{bmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{bmatrix}.$$

L Mutassuk meg, hogy ha A blokkdiagonális, az átlóban négyzetes mátrixokkal, akkor A pontosan akkor normális, ha minden diagonális blokkja normális.

B $\operatorname{diag}(\mathsf{A}_1, \dots, \mathsf{A}_k) \operatorname{diag}(\mathsf{A}_1, \dots, \mathsf{A}_k)^\mathsf{T} = \operatorname{diag}(\mathsf{A}_1, \dots, \mathsf{A}_k)^\mathsf{T} \operatorname{diag}(\mathsf{A}_1, \dots, \mathsf{A}_k) \iff \operatorname{diag}(\mathsf{A}_1\mathsf{A}_1^\mathsf{T}, \dots, \mathsf{A}_k\mathsf{A}_k^\mathsf{T}) = \operatorname{diag}(\mathsf{A}_1^\mathsf{T}\mathsf{A}_1, \dots, \mathsf{A}_k^\mathsf{T}\mathsf{A}_k)$.

L Tegyük fel, hogy az $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^2$ mátrix normális, és két sajátértéke nem valós. Ekkor $c = -b \neq 0$ és $d = a$.

B $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]^\mathsf{T}\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]^\mathsf{T}$ pontosan akkor igaz, ha $b^2 = c^2$ és $ab + cd = ac + bd$. $c = b$ nem lehet, mert akkor a mátrix szimmetrikus lenne, és annak valósak a sajátértékei, így $c = -b \neq 0$. Innen $ab - bd = -ab + bd$, azaz $a = d$.

B ($\Leftarrow$) Ha egy mátrix (2) alakú, akkor normális (ellenőrizzük), így normális a hozzá ortogonálisan hasonló **A** is.

($\Rightarrow$) Tegyük fel, hogy **A** valós normális. Mivel valós, ezért ortogonálisan hasonló egy blokk felsőháromszög-mátrixhoz, melynek diagonális blokkjai 1×1-es vagy 2×2-es méretűek.

Mivel normális, a két szorzat összevetéséből adódik, hogy a diagonális blokkok fölötti elemek mindegyike 0, tehát a mátrix blokkdiagonális.

Blokkdiagonális mátrix pontosan akkor normális, ha minden diagonális blokkja normális. Egy 1×1-es valós mátrix egyetlen eleme a sajátértéke. Egy 2×2-es normális mátrix alakja $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^2$, ahol $b \neq 0$.

Ortogonálisan blokkdiagonalizálható mátrixok

K $\mathbf{A}$ pontosan akkor szimmetrikus, ha ortogonálisan hasonló egy diagonális mátrixhoz. A diagonális elemek $\mathbf{A}$ sajátértékei. Két szimmetrikus mátrix pontosan akkor hasonló ortogonálisan egymáshoz, ha azonosak a sajátértékeik.

K $\mathbf{A}$ pontosan akkor ferdén szimmetrikus, ha ortogonálisan hasonló egy olyan blokkdiagonális mátrixhoz, melynek diagonális blokkjai $[0]$ vagy $\left[\begin{smallmatrix} 0 & b_j \\ -b_j & 0 \end{smallmatrix}\right]$ alakúak, ahol utóbbi mátrix a $\pm \mathrm{i} b_j$ sajátértékekhez tartozik. Két ferdén szimmetrikus mátrix pontosan akkor hasonló ortogonálisan egymáshoz, ha azonosak a sajátértékeik.

K $\mathbf{A}$ pontosan akkor ortogonális, ha ortogonálisan hasonló egy olyan blokkdiagonális mátrixhoz, melynek diagonális blokkjai $[1]$, $[-1]$ vagy $\left[\begin{smallmatrix} \cos\varphi_j & \sin\varphi_j \\ -\sin\varphi_j & \cos\varphi_j \end{smallmatrix}\right]$ alakúak. Sajátértékei ± 1, $\cos\varphi_j \pm \mathrm{i}\sin\varphi_j$. Két ortogonális mátrix pontosan akkor hasonló ortogonálisan, ha sajátértékei azonosak.