BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Bevezetés az algebrába 2

BMETE91AM37

Sajátérték, diagonalizálás

H607 – 2018-03-05/03-12

Wettl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér

Jó bázis választása

P Tükrözzük a 3-dimenziós tér vektorait a tér egy megadott síkjára! Válasszunk e lineáris leképezés leírásához egy megfelelő bázist, majd írjuk fel a tükrözés e bázisra vonatkozó mátrixát!

M A sík egy bázisa $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, a rá merőleges altér egy bázisa $\{\mathbf{c}\}$.

A T leképezés hatása e vektorokon: $T\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $T\mathbf{b} = \mathbf{b}$ és $T\mathbf{c} = -\mathbf{c}$.

Az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ bázisban T mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

E bázisban egy tetszőleges (x, y, z) vektor tükörképe $(x, y, -z)$.

Lineáris transzformációk sajátvektorai

D L! $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ vektortér, $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris transzformáció. Amh az $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor az L trafó sajátvektora, ha $L\mathbf{x} \parallel \mathbf{x}$, azaz ha van olyan $\lambda \in \mathbb{F}$ szám, melyre $L\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.
Az ilyen λ számot az L lineáris transzformáció sajátértékének nevezzük.

m Ha $\mathbf{x}$ sajátvektor, akkor minden $c\mathbf{x}$ ($c \neq 0$) is:

$$L(c\mathbf{x}) = cL\mathbf{x} = c\lambda\mathbf{x} = \lambda(c\mathbf{x}),$$

azaz $L(c\mathbf{x}) = \lambda(c\mathbf{x})$.

Á A sajátvektorok alterei: Ha az L lin.trafónak λ egy sajátértéke, akkor a λ-hoz tartozó sajátvektorok a nullvektorral együtt alteret alkotnak, mely megegyezik a $\mathrm{Ker}(L - \lambda I)$ altérrel.

B $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ sv. $\iff L\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \iff L\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff (L - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff$ $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(L - \lambda I)$.

Sajátaltér

D Az L lin.trafó λ sajátértékhez tartozó sajátvektorai és a $\mathbf{0}$ alkotta alteret a λ s.é.-hez tartozó sajátaltérnek nevezzük.

P

1. L! $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ vektortér, I az identikus leképezés. Ekkor a tetszőleges $c \in \mathbb{F}$ számra a cI leképezésnek a $\mathcal{V}$ tér minden nemnulla vektora a c számhoz tartozó sajátvektora.
2. L! $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ a valósok halmazán akárhányszor diffható valós függvények tere és $D : \mathcal{V} \to \mathcal{V}; f \mapsto f'$. D sajátvektora $\mathrm{e}^{\lambda x}$, ami épp a λ sajátértékhez tartozik, mert $(\mathrm{e}^{\lambda x})' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}$.
3. A sík $\alpha \neq k\pi$ szöggel való elforgatásának nincs sajátvektora.

F Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér?

1. a sík vektorainak tükrözése egy egyenesre;
2. a sík vektorainak merőleges vetítése egy egyenesre;
3. a tér vektorainak forgatása egyenes körül $\alpha \neq k\pi$ szöggel;
4. a tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra;
5. a tér vektorainak tükrözése egy síkra.

Mátrixleképezés sajátértéke, sajátvektora, sajátaltere

D L! $\mathbb{F}$ test. Amh a $\lambda \in \mathbb{F}$ szám az $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ mátrix sajátértéke, ha létezik olyan $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor, melyre $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

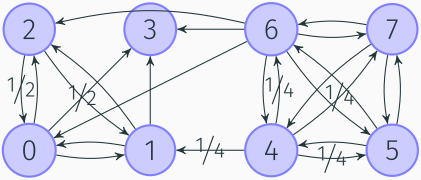
Az ilyen $\mathbf{x}$ vektorokat az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó sajátvektorainak, az általuk a $\mathbf{0}$ vektorral alkotott alteret az $\mathbf{A}$ sajátalterének, a $(\lambda, \mathbf{x})$ párokat az $\mathbf{A}$ sajátpárjainak nevezzük.

$\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ bal sajátvektor, ha $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \lambda\mathbf{y}^\mathsf{T}$, azaz ha $\mathbf{y}$ az $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ sajátvektora.

P $(-1, (2, 1))$ és $(2, (1, 2))$ egy-egy sajátpárja a $\left[\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ mátrixnak, mert

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

? A feladat: rangsoroljuk a dokumentumokat a hivatkozások gráfja alapján aszerint, hogy ha véletlenül bolyongunk a dokumentumok között, akkor az legyen rangban előbb, ahol többször járunk.



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

- Módosítás, hogy minden dokumentumból kiléphessünk:

$$[\mathbf{A}]_{ij} = \begin{cases} 1/k, & \text{ha megy i-ből j-be él és i ki-foka k,} \\ 1/n, & \text{ha i ki-foka 0 és n a csúcsok száma,} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- Módosítás, hogy ne ragadjunk be dokumentumok egy csoportjába:
$$\mathbf{M} = (1-d)\mathbf{A} + d\frac{1}{n}\mathbf{J},$$
ahol $\mathbf{J}$ a csupa 1-esből álló mátrix, n e négyzetes mátrixok rendje, és $d \in (0,1)$.
Empírikus $d \in (0.1, 0.2)$ a jó választás, pl. $d = 0.15$, így $1-d = 0.85$. Ekkor kerekített jegyekkel
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0.019 & 0.302 & 0.302 & 0.302 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 \\ 0.302 & 0.019 & 0.302 & 0.302 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 \\ 0.444 & 0.444 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 \\ 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 \\ 0.019 & 0.231 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.231 & 0.231 & 0.231 \\ 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.302 & 0.019 & 0.302 & 0.302 \\ 0.160 & 0.019 & 0.160 & 0.160 & 0.160 & 0.160 & 0.019 & 0.160 \\ 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.302 & 0.302 & 0.302 & 0.019 \end{bmatrix}$$

- Ha $\mathbf{x}$ a bolyongás kiindulópontjának valószínűségeloszlását megadó vektor, akkor az első lépés után a gráf i pontjában $[\mathbf{x}^\top \mathbf{M}]_i$ valószínűséggel leszünk, az m-edik lépés után $[\mathbf{x}^\top \mathbf{M}^m]_i$ valószínűséggel.

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{x}^\top \mathbf{M}^m = \mathbf{v}^\top.$$

- (A pozitív mátrixok elmélete, Markov-láncok) $\rightsquigarrow$ $\mathbf{v}^\top$ az ún. stacionárius eloszlás, melyre $\mathbf{v}^\top = \mathbf{v}^\top \mathbf{M}$, és amely megadja, hogy egy-egy pontban aszimptotikusan mekkora valószínűséggel vagyunk a bolyongás során.
- $\mathbf{v} = (0.151, 0.157, 0.137, 0.137, 0.106, 0.100, 0.112, 0.100)$.
- Tehát a dokumentumok sorrendje: 1, 0, 2 & 3, 6, 4, 5 & 7 (két holtversennyel).

Sajátértékek

Hogyan találjuk meg a sajátértékeket?

Á λ pontosan akkor sajátértéke $\mathbf{A}$-nak, ha $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

B $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ sv. $\iff$ $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ $\iff$ $\mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$ $\iff$ $\mathbf{x}$ megoldása $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletnek $\iff$ $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ $\iff$ $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

D L! $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$. A $\chi(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ polinomot az $\mathbf{A}$ mátrixhoz tartozó karakterisztikus polinomnak nev.

A $\chi(\lambda) = 0$ egyenletet az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus egyenletének nevezzük.

m Néhol a kar. pol. $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$, ami mindig 1-főegyütthatójú, de a konstans tag nem mindig a determináns.

Karakterisztikus polinom felírása

P Határozzuk meg az

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{C} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

mátrixok karakterisztikus polinomját!

M Minden 2×2-es mátrixra:

$$\begin{aligned} \det(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I}) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} &= (a-\lambda)(d-\lambda) - bc \\ &= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) \\ &= \lambda^2 - \operatorname{trace}(\mathsf{A})\lambda + \det \mathsf{A}. \end{aligned}$$

nyom, determináns!

Karakterisztikus polinom felírása (folyt)

$$\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & b \\ 0 & 1-\lambda & c \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} a-\lambda & b & c \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a-\lambda)\lambda^2 + b\lambda + c \\ &= -\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c. \end{aligned}$$

Háromszögmátrixok sajátértékei

T A háromszögmátrixok és így a diagonális mátrixok sajátértékei megegyeznek a főátló elemeivel.

B A háromszögmátrix $\rightsquigarrow$ $\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I}$ is $\rightsquigarrow$

$$\det(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I}) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\dots(a_{nn} - \lambda) = 0,$$

aminek a gyökei a_{ii} ($i = 1, \dots, n$). Így ezek az A sajátértékei.

Determináns, nyom és a sajátértékek

T Ha az n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei λ_1,..., λ_n, akkor

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$$

$$\operatorname{trace}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

A determináns a konstans tag, a nyom a $(-\lambda)^{n-1}$ együtthatója a karakterisztikus polinomban.

B A karakterisztikus polinom gyöktényezős alakja:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\ldots(\lambda_n - \lambda)$$

$\lambda = 0$ behelyettesítése után kapjuk, hogy $\det(\mathbf{A}) = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$.

- $(-\lambda)^{n-1}$ szorzat a determináns kígyók determinánsainak összegére bontása alapján csak az $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\ldots(a_{nn} - \lambda)$ szorzatból kapható, onnan pedig az épp $\sum_i a_{ii} = \operatorname{trace}(\mathbf{A})$.

Sajátaltér

Sajátértékek és sajátvektorok meghatározása

m Tankönyvi módszer:

1. $\det(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I}) = 0$ gyökeinek meghatározása (sajátértékek)
2. $\forall\ \lambda$: $\mathcal{N}(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I})$ bázisának meghatározása (a nulltér nemzérus vektorai a sajátvektorok)

P

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

M

1. felső háromszögmátrix: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$
2. $\lambda = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \rightsquigarrow t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \; 2x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} (s+t)/2 \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát a két sajátaltér $\text{span}((1,0,0))$ és $\text{span}((1/2,1,0),(1/2,0,1))$.

Karakterisztikus polinom és a racionálisgyök-tétel

P $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

M $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 - 4\lambda^2 - 11\lambda - 6)$

racionálisgyök-tétellel: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ és $\lambda_3 = 6$.

$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$:

$$\mathbf{A} + \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$\lambda_3 = 6$:

$$\mathbf{A} - 6\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & -4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{aligned} x_1 \qquad - \frac{2}{3}x_3 &= 0 \\ x_2 - \frac{2}{3}x_3 &= 0. \end{aligned}$$

$x_3 = 3t$ paraméterválasztással

$$\begin{bmatrix} 2t \\ 2t \\ 3t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

- A sajátalterek: span $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$, span $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$.

P Adjuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ sajátértékeit és sajátaltereit!

M $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 6 & 1 \\ 1 & 8-\lambda & 1 \\ 1 & 6 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 14\lambda^2 - 44\lambda + 40$

- a gyökök $\lambda_{1,2} = 2$, $\lambda_3 = 10$.

$\lambda_{1,2} = 2$:

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -6s - t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

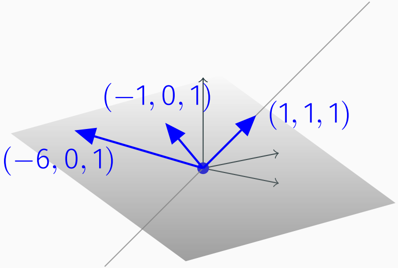
A sajátaltér egy bázisa $\{(-6, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

Sajátaltér meghatározása (folyt)

$\lambda_3 = 10$:

$$\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -7 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & -7 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. E másik sajátaltér bázisa $\{(1, 1, 1)\}$.



2×2-es mátrixok sajátvektorainak szemléltetése

P Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait.

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathsf{C} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathsf{D} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

M

$$|\mathsf{D} - \lambda \mathsf{I}| = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} - \lambda & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$$\lambda_1 = \mathrm{i} : \quad \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} - \mathrm{i} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} - \mathrm{i} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ amiből } \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix},$$

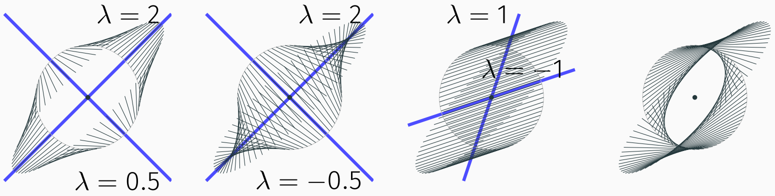
$$\lambda_2 = -\mathrm{i} : \quad \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} + \mathrm{i} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} + \mathrm{i} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ amiből } \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\chi_{\mathsf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1, \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \frac{1}{2}, \qquad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\chi_{\mathsf{B}}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda - 1, \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\chi_{\mathsf{C}}(\lambda) = \lambda^2 - 1, \qquad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\chi_{\mathsf{D}}(\lambda) = \lambda^2 + 1, \qquad \lambda_1 = \mathrm{i},\ \lambda_2 = -\mathrm{i}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix}.$$



Komplex és többszörös sajátértékek

A karakterisztikus egyenlet komplex gyökei

P Határozzuk meg a sajátértékeit és sajátvektorait

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

M A karakterisztikus egyenlet

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \lambda^2 - \lambda + 1 \rightsquigarrow \lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

- $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$:

$$\mathsf{A} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) \mathsf{I} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} i & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} i \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow x - iy = 0.$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} it \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$:

$$\mathbf{A} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow x + iy = 0.$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -it \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Többszörös gyökök: algebrai és a geometriai multiplicitás

D Algebrai multiplicitás: a λ sajátérték multiplicitása a karakterisztikus polinomban.

D Geometriai multiplicitás: a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér dimenziója.

P $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

M $(4-\lambda)^3$, a 4 algebrai multiplicitása 3.

$$\mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A $\lambda = 4$ sajátérték geometriai multiplicitása tehát 1.

Többszörös gyökök: algebrai és a geometriai multiplicitás

P $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $(1-\lambda)^2(2-\lambda)^2$, gyökei 1 és 2

$$\lambda = 1\colon\ \mathsf{B} - \lambda\mathsf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

geometriai multiplicitás = algebrai multiplicitás = 2

$$\lambda = 2\colon\ \mathsf{B} - \lambda\mathsf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

geometriai multiplicitás = 1, algebrai multiplicitás = 2

Speciális mátrixok

Mátrix hatványainak sajátértékei

T $\mathbf{A}$ invertálható $\iff$ a 0 nem sajátértéke.

B $\mathbf{A}$ invertálható $\iff$ $\det(\mathbf{A}) \neq 0 \iff \det(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) \neq 0 \iff$ 0 nem sajátértéke $\mathbf{A}$-nak.

T Ha $(\lambda, \mathbf{x})$ az $\mathbf{A}$ sajátpárja, $n \in \mathbb{Z}$, akkor $(\lambda^n, \mathbf{x})$ az $\mathbf{A}^n$ sajátpárja, amennyiben λ^n és $\mathbf{A}^n$ is értelmezve van.

B $n = 0$: $\lambda^0 = 1$ és $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I} \rightsquigarrow$ minden vektor sv. ✓

$n > 0$: (teljes indukcióval) $n = 1$ ✓

$n = k - 1 \Rightarrow n = k$:

$$\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\lambda^{k-1}\mathbf{x}) = \lambda^{k-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \lambda^{k-1}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^k\mathbf{x}.$$

$\mathbf{A}$ invertálható: $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \rightsquigarrow \frac{1}{\lambda}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$, azaz $\lambda^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$.

$n < 0$: $\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x} \rightsquigarrow \lambda^{-k}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-k}\mathbf{x}$.

Mátrix hatványainak hatása

T Ha $(\lambda_i, \mathbf{x}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ az $\mathbf{A}$ sajátpárjai, $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{x}_i$, akkor $\mathbf{A}^m \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{k} c_i \lambda_i^m \mathbf{x}_i$.

B trivi

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^m \mathbf{v} &= \mathbf{A}^m (c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + c_k \mathbf{x}_k) \\
&= c_1 \mathbf{A}^m \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{A}^m \mathbf{x}_2 + \ldots + c_k \mathbf{A}^m \mathbf{x}_k \\
&= c_1 \lambda_1^m \mathbf{x}_1 + c_2 \lambda_2^m \mathbf{x}_2 + \ldots + c_k \lambda_k^m \mathbf{x}_k.
\end{aligned}$$

K Találunk-e mindig sajátvektorokból álló bázist?

Speciális valós mátrixok sajátértékei

T $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, λ egy tetszőleges sajátértéke

1. $\mathbf{A}$ szimmetrikus $\Rightarrow \lambda$ valós,
2. $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus $\Rightarrow \lambda$ imaginárius,
3. $\mathbf{A}$ ortogonális $\Rightarrow |\lambda| = 1$,
4. $\mathbf{A}$ nilpotens $\iff \lambda = 0$, azaz karakterisztikus polinomja x^n.

B 1., 2.: $\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathsf{H}}\lambda\mathbf{x} = \lambda|\mathbf{x}|^2$.
Vegyük mindkét oldal adjungáltját: $\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} = \bar{\lambda}|\mathbf{x}|^2$.
L! $\lambda = a + ib$. $\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A} \rightsquigarrow \lambda = \bar{\lambda}$, azaz $a + ib = a - ib \rightsquigarrow \Im(\lambda) = 0$.
$\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = -\mathbf{A} \rightsquigarrow a + ib = -a + ib$, azaz $\Re(\lambda) = 0$.
3.: $\mathbf{A}$ ortogonális $\rightsquigarrow |\mathbf{x}| = |\mathbf{A}\mathbf{x}| = |\lambda\mathbf{x}| = |\lambda||\mathbf{x}| \rightsquigarrow |\lambda| = 1$
4.: $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, λ sé. $\rightsquigarrow \lambda^k$ sé. az $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$ mátrixnak $\rightsquigarrow \lambda = 0$.
megfordítás a Cayley–Hamilton-tételből következik (minden mátrix kielégíti karakterisztikus polinomját): ha $x^n = 0$, akkor $\mathbf{A}^n = \mathbf{O}$, vagyis $\mathbf{A}$ nilpotens.

Speciális komplex mátrixok sajátértékei

T L! $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Ekkor

1. $\mathbf{A}$ önadjungált $\Rightarrow \lambda$ valós,
2. $\mathbf{A}$ ferdén önadjungált $\Rightarrow \lambda$ imaginárius,
3. $\mathbf{A}$ unitér $\Rightarrow |\lambda| = 1$,

B mint az előző tételt, csak $^{\mathsf{T}}$ helyett $^{\mathsf{H}}$-val.

m Normális mátrix sajátértéke bármi lehet, mivel minden diagonális mátrix normális.

Á Ha $\mathbf{A}$ normális, $\lambda \neq \mu$ két sajátértéke, akkor $\mathcal{V}_\lambda \perp \mathcal{V}_\mu$.

B $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ normális:
$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})(\mathbf{A}^{\mathsf{H}}-\bar{\lambda}\mathbf{I}) = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}} - \lambda\mathbf{A}^{\mathsf{H}} - \bar{\lambda}\mathbf{A} + |\lambda|^2\mathbf{I} = (\mathbf{A}^{\mathsf{H}}-\bar{\lambda}\mathbf{I})(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$.

- $\mathcal{V}_\mu \leqslant \mathcal{O}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$: ha $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}$, akkor $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = (\mu-\lambda)\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{x} \in \mathcal{O}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$.
- $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}$ normális $\rightsquigarrow$ oszlop- és nulltere merőleges $\rightsquigarrow$ $\mathcal{V}_\mu \leqslant \mathcal{O}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \mathcal{V}_\lambda$, azaz $\mathcal{V}_\mu \perp \mathcal{V}_\lambda$.

Hasonlóság, diagonalizálhatóság

Hasonló mátrixok sajátértékei

T Sajátérékhez kapcsolódó invariánsok Ha $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, akkor $\chi_{\mathbf{A}} = \chi_{\mathbf{B}}$, így sajátértékei, azok algebrai és geometriai multiplicitásai is megegyeznek.

1B A lineáris leképezés sajátértékének definíciójából világos.

2B $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}$:

$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C} - \lambda\mathbf{C}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{C} = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{B}\mathbf{C} - \lambda\mathbf{I}\mathbf{C}) = \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{C}$

$\rightsquigarrow \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} \sim \mathbf{B} - \lambda\mathbf{I} \rightsquigarrow \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})$

$\rightsquigarrow$ megegyeznek sajátértékeik, és azok (algebrai) multiplicitásai

$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} \sim \mathbf{B} - \lambda\mathbf{I} \rightsquigarrow \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})) = \dim(\mathcal{N}(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})) \rightsquigarrow$ a geometriai multiplicitások is megegyeznek.

m Van értelme lineáris transzformáció karakterisztikus polinomjáról, beszélni (véges dimenziós esetben).

m Polinom együtthatói és gyökei közti összefüggések

$$(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)$$
$$= -\lambda^3 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2 - (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)\lambda + \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

m Polinom együtthatói és gyökei közti összefüggések $\rightsquigarrow$ a sajátértékek elemi szimmetrikus polinomjai invariánsak $\rightsquigarrow$ szimmetrikus polinomjai invariánsak!
Elemi szimmetrikus polinomok:

$$e_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \sum_{1 \le i \le n} \lambda_i = \mathrm{trace}(\mathbf{A}),$$
$$e_2(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \sum_{1 \le i < j \le n} \lambda_i \lambda_j,$$
$$e_3(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \sum_{1 \le i < j < k \le n} \lambda_i \lambda_j \lambda_k,$$
$$\vdots$$
$$e_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n = \det(\mathbf{A}).$$

Diagonalizálhatóság

D Amh az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz ha létezik egy olyan diagonális Λ és egy invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy

$$\Lambda = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}. \tag{1}$$

D A $\Lambda = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ átírható

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^{-1}$$

alakba, amit az $\mathbf{A}$ mátrix sajátfelbontásának nevezünk.

D Amh az $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lin. trafó diagonalizálható, ha van olyan bázis, melyben mátrixa diagonális.

Diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltétele

T Az $n \times n$-es A mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha A-nak van n lineárisan független sajátvektora.
Ekkor Λ az A sajátértékeiből, C a sajátvektoraiból áll.

B $\Lambda = \mathsf{C}^{-1}\mathsf{AC} \iff \mathsf{C}\Lambda = \mathsf{AC}$ és C invertálható
L! $\mathsf{C} = [\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \dots\ \mathbf{x}_n]$, $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

$$[\mathbf{x}_1\, \mathbf{x}_2\ \dots\ \mathbf{x}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathsf{A}[\mathbf{x}_1\, \mathbf{x}_2\ \dots\ \mathbf{x}_n] \quad \iff \quad \mathsf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i,$$

de C invertálható, így oszlopvektorai lineárisan függetlenek.

T Az $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris transzformáció pontosan akkor diagonalizálható, ha van sajátvektorokból álló bázisa. E sajátvektorokból álló bázisban a mátrixa a sajátértékekből álló diagonális mátrix.

P Diagonalizálható-e a következő mátrix?

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

M $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, a sajátvektorok $(1, 0, 0)$, $(1/2, 1, 0)$ és $(1/2, 0, 1)$, és ezek függetlenek

$\rightsquigarrow \mathsf{A} \sim \Lambda$, ahol

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathsf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ellenőrzés: $\mathsf{C}\Lambda = \mathsf{AC}$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bal sajátvektorok

D Az $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \lambda\mathbf{y}^\mathsf{T}$ egyenlet $\mathbf{y}^\mathsf{T} \neq \mathbf{0}^\mathsf{T}$ feltételnek megfelelő sorvektorait az $\mathbf{A}$ mátrix bal sajátvektorainak nevezzük.

m ezek a transzponált sajátvektorai: $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$.

m $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^\mathsf{T}) = \det(\mathbf{A}^\mathsf{T} - \lambda\mathbf{I}) \rightsquigarrow \mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ karakterisztikus polinomja azonos $\rightsquigarrow$ bal és jobb sajátértékek közt nincs különbség

m $\Lambda = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} \rightsquigarrow \Lambda\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A} \rightsquigarrow \mathbf{C}^{-1}$ sorvektorai $\mathbf{A}$ bal sajátvektorai, ugyanis

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{y}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n^\mathsf{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{y}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n^\mathsf{T} \end{bmatrix} \mathbf{A}$$

tehát $\lambda_i\mathbf{y}_i^\mathsf{T} = \mathbf{y}_i^\mathsf{T}\mathbf{A}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

A sajátfelbontás diadikus alakja

m

$$\begin{aligned} \mathsf{A} = \mathsf{C}\Lambda\mathsf{C}^{-1} &= [\mathsf{x}_1\ \mathsf{x}_2\ \ \dots\ \ \mathsf{x}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathsf{y}_1^\mathsf{T} \\ \mathsf{y}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathsf{y}_n^\mathsf{T} \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 \mathsf{x}_1 \mathsf{y}_1^\mathsf{T} + \lambda_2 \mathsf{x}_2 \mathsf{y}_2^\mathsf{T} + \dots + \lambda_n \mathsf{x}_n \mathsf{y}_n^\mathsf{T} \end{aligned} \tag{2}$$

D Ezt nevezzük a sajátfelbontás diadikus alakjának.

A sajátfelbontás diadikus alakja

P $\mathsf{A}=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ bal sajátvektorai, sajátfelbontása, diadikus alakja?

M Bal sajátvektor: „a transzponált sajátvektorainak transzponáltjai”, vagy „a C^{-1} sorvektorai”. A sajátfelbontás:

$$\mathsf{A}=\mathsf{C}\Lambda\mathsf{C}^{-1}=\begin{bmatrix}1&\frac12&\frac12\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-\frac12&-\frac12\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\mathsf{A}=0\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-\frac12&-\frac12\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}\frac12\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}\frac12\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=0\begin{bmatrix}1&-\frac12&-\frac12\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0&\frac12&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0&0&\frac12\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontása

D $\mathbf{A}$ spektruma: $\mathbf{A}$ sajátértékeinek halmaza (?családja?), jele $\sigma(\mathbf{A})$.

m bontsuk fel a $\mathbf{C}$ és $\mathbf{C}^{-1}$ mátrixot is blokkokra a következők szerint:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{I} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \lambda_2\mathbf{I} & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \lambda_k\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \dots & \mathbf{X}_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^T \\ \mathbf{Y}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_k^T \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^{-1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \dots & \mathbf{X}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{I} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \lambda_2\mathbf{I} & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \lambda_k\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^T \\ \mathbf{Y}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_k^T \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1^T + \lambda_2\mathbf{X}_2\mathbf{Y}_2^T + \dots + \lambda_k\mathbf{X}_k\mathbf{Y}_k^T \\ &= \lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2 + \dots + \lambda_k\mathbf{P}_k, \end{aligned}$$

ahol $\mathbf{P}_i = \mathbf{X}_i\mathbf{Y}_i^T$ a λ_i sajátértékhez tartozó mátrix.

Spektrálfelbontás

T Minden $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$ spektrumú diagonalizálható A mátrix felírható

$$\mathsf{A} = \lambda_1\mathsf{P}_1 + \lambda_2\mathsf{P}_2 + \cdots + \lambda_k\mathsf{P}_k$$

alakban, ahol

1. $\mathsf{P}_1 + \mathsf{P}_2 + \cdots + \mathsf{P}_k = \mathsf{I}$,
2. $\mathsf{P}_i\mathsf{P}_j = \mathsf{O}$, ha $i \neq j$,
3. P_i az $\mathcal{N}(\mathsf{A} - \lambda_i\mathsf{I})$ sajátaltérre való $\mathcal{O}(\mathsf{A} - \lambda_i\mathsf{I})$ menti vetítés.

1. $\mathsf{CC}^{-1} = \mathsf{I}$ és $\mathsf{P}_i = \mathsf{X}_i\mathsf{Y}_i^\mathsf{T} \rightsquigarrow \mathsf{P}_1 + \mathsf{P}_2 + \cdots + \mathsf{P}_k = \mathsf{I}$.

2. $\mathsf{C}^{-1}\mathsf{C} = \mathsf{I} \rightsquigarrow \mathsf{Y}_i^\mathsf{T}\mathsf{X}_i = \mathsf{I}$, $\mathsf{Y}_i^\mathsf{T}\mathsf{X}_j = \mathsf{O}$ $(i \neq j) \rightsquigarrow \mathsf{P}_i\mathsf{P}_j = \mathsf{X}_i\mathsf{Y}_i^\mathsf{T}\mathsf{X}_j\mathsf{Y}_j^\mathsf{T} = \mathsf{O}$.

3. $\mathsf{P}_i^2 = \mathsf{X}_i(\mathsf{Y}_i^\mathsf{T}\mathsf{X}_i)\mathsf{Y}_i^\mathsf{T} = \mathsf{X}_i\mathsf{Y}_i^\mathsf{T} = \mathsf{P}_i \rightsquigarrow \mathsf{P}_i$ vetítés!

- Mivel bármely két X, Y mátrixra $\mathcal{O}(\mathsf{XY}) \subseteq \mathcal{O}(\mathsf{X})$

$$\mathcal{O}(\mathsf{P}_i) = \mathcal{O}(\mathsf{X}_i\mathsf{Y}_i^\mathsf{T}) \subseteq \mathcal{O}(\mathsf{X}_i) = \mathcal{O}(\mathsf{X}_i\mathsf{Y}_i^\mathsf{T}\mathsf{X}_i) = \mathcal{O}(\mathsf{P}_i\mathsf{X}_i) \subseteq \mathcal{O}(\mathsf{P}_i).$$

$\rightsquigarrow \mathcal{O}(\mathsf{P}_i) = \mathcal{O}(\mathsf{X}_i) = \mathcal{N}(\mathsf{A} - \lambda_i\mathsf{I})$, hiszen $\mathcal{O}(\mathsf{X}_i)$ a λ_i-hez tartozó sajátaltér.

Spektrálfelbontás

- Megmutatjuk, $\mathcal{N}(\mathbf{P}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$.

$$\mathbf{P}_i(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) = \mathbf{P}_i \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{P}_j - \lambda_i \sum_{j=1}^{k} \mathbf{P}_j \right) = \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j - \lambda_i) \mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{O}.$$

  $\rightsquigarrow \mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \subseteq \mathcal{N}(\mathbf{P}_i)$.

  $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) = \mathcal{O}(\mathbf{P}_i)$, így a dimenziótétel miatt $\dim \mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) = \dim \mathcal{N}(\mathbf{P}_i)$, ami bizonyítja, hogy $\mathcal{N}(\mathbf{P}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})$.

D A fenti felbontást nevezzük a diagonalizálható $\mathbf{A}$ spektrálfelbontásának.

Mátrix hatványa a saját- és a spektrálfelbontásból

T Ha $\mathbf{A} = \mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^{-1}$ az $\mathbf{A}$ sajátfelbontása, akkor $\mathbf{A}^n = \mathbf{C}\Lambda^n\mathbf{C}^{-1}$ és

- ha $\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2 + \cdots + \lambda_k\mathbf{P}_k$ az $\mathbf{A}$ spektrálfelbontása, akkor $\mathbf{A}^n = \lambda_1^n\mathbf{P}_1 + \lambda_2^n\mathbf{P}_2 + \cdots + \lambda_k^n\mathbf{P}_k$ minden $n \in \mathbb{Z}$ egészre, melyre $\mathbf{A}^n$ értelmezve van.

B $\mathbf{A} = \mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^{-1} \rightsquigarrow \mathbf{A}^2 = \mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\Lambda^2\mathbf{C}^{-1}$, általában tetszőleges nemnegatív n egészre $\mathbf{A}^n = \mathbf{C}\Lambda^n\mathbf{C}^{-1}$.

Ha $\mathbf{A}^{-1}$ értelmezve van, akkor $\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^{-1})^{-1} = \mathbf{C}\Lambda^{-1}\mathbf{C}^{-1}$, amiből az állítás első része minden $n \in \mathbb{Z}$-re is következik.

- A $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j = \mathbf{O}$ (ha $i \neq j$) és a $\mathbf{P}_i^n = \mathbf{P}_i$ összefüggésekből

$$\mathbf{A}^n = (\lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2 + \cdots + \lambda_k\mathbf{P}_k)^n = \lambda_1^n\mathbf{P}_1 + \lambda_2^n\mathbf{P}_2 + \cdots + \lambda_k^n\mathbf{P}_k.$$

Spektrálfelbontás

P Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix spektrálfelbontását.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1M A sajátértékekből és a jobb és bal sajátvektorokból:

$$\mathbf{A} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ahol

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Ellenőrizhetjük: $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{I}$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{O}$, vetítő mátrixok, mert $\mathbf{P}_1^2 = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2^2 = \mathbf{P}_2$, és a sajátalterekre vetítenek.

Spektrálfelbontás blokkmátrix-egyenletrendszerből

T A spektrálfelbontás a sajátvektorok közvetlen meghatározása nélkül, egy blokkmátrix-egyenletrendszerből is megkapható.

$$\begin{aligned} \mathsf{P}_1 + \mathsf{P}_2 + \ldots + \mathsf{P}_k &= \mathsf{I} \\ \lambda_1 \mathsf{P}_1 + \lambda_2 \mathsf{P}_2 + \ldots + \lambda_k \mathsf{P}_k &= \mathsf{A} \\ \vdots \qquad &\quad \vdots \\ \lambda_1^{k-1} \mathsf{P}_1 + \lambda_2^{k-1} \mathsf{P}_2 + \ldots + \lambda_k^{k-1} \mathsf{P}_k &= \mathsf{A}^{k-1} \end{aligned}$$

azaz mátrixszorzat alakban

$$\begin{bmatrix} \mathsf{I} & \mathsf{I} & \ldots & \mathsf{I} \\ \lambda_1 \mathsf{I} & \lambda_2 \mathsf{I} & \ldots & \lambda_k \mathsf{I} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} \mathsf{I} & \lambda_2^{k-1} \mathsf{I} & \ldots & \lambda_k^{k-1} \mathsf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathsf{P}_1 \\ \mathsf{P}_2 \\ \vdots \\ \mathsf{P}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathsf{I} \\ \mathsf{A} \\ \vdots \\ \mathsf{A}^{k-1} \end{bmatrix}$$

B A sajátértékek különbözők, így a Vandermonde-det nem 0.

Spektrálfelbontás kiszámítása sajátvektorok nélkül

P Az előző feladatbeli $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix spektrálfelbontása:

2M Az

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{I}$$
$$0\mathbf{P}_1 + 2\mathbf{P}_2 = \mathbf{A}$$

egyenletrendszer bővített blokkmátrixa és annak redukált lépcsős alakja:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ 0\mathbf{I} & 2\mathbf{I} & \mathbf{A} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} & \frac{1}{2}\mathbf{A} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{A} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} & \frac{1}{2}\mathbf{A} \end{array}\right]$$

azaz $\mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \frac{1}{2}\mathbf{A}$, $\mathbf{P}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{A}$. (Ez megegyezik az előző megoldással :)

Alterek direkt összege

D L! $\mathcal{V}_\mathbb{F}$ véges dimenziós vt., $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \dots, \mathcal{V}_k \leqslant \mathcal{V}$. Amh a $\mathcal{V}$ tér a $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$,..., $\mathcal{V}_k$ alterek direkt összege, jelölése $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_k = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{V}_i$, ha $\mathcal{V}$ minden vektora egyértelműen felbomlik egy $\mathcal{V}_1$-, egy $\mathcal{V}_2$-... és egy $\mathcal{V}_k$-beli vektor összegére.

T L! $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k \leqslant \mathcal{V}$, $\dim \mathcal{V} = n$. Ekkor ekvivalensek:

1. $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_k$
2. $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus (\mathcal{V}_2 \oplus (\mathcal{V}_3 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_k))$
3. $\sum_{i=1}^{k} \mathcal{V}_i = \mathcal{V}$, $\mathbf{v}_i \in \mathcal{V}_i$ és $\sum_{i=1}^{k} \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, $i = 1, \dots, k$
4. $\sum_{i=1}^{k} \mathcal{V}_i = \mathcal{V}$ és $\mathcal{V}_i \cap \left(\sum_{j \neq i} \mathcal{V}_j\right) = \{\mathbf{0}\}$, és
5. $\mathcal{V}_1$,..., $\mathcal{V}_k$ egy-egy bázisának egyesítése a $\mathcal{V}$ bázisát adja.

m 3.-ban nem elég kikötni, hogy $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \{\mathbf{0}\}$ bármely $i \neq j$ esetén!
L! $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ fggtln, $\mathcal{V}_1 = \operatorname{span}(\mathbf{a})$, $\mathcal{V}_2 = \operatorname{span}(\mathbf{b})$, $\mathcal{V}_3 = \operatorname{span}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$
$\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \{\mathbf{0}\}$, de $\mathbb{R}^2 \neq \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \mathcal{V}_3$, $(\mathbf{0} + \mathbf{0} + (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{0})$.

- **B** (1. $\Leftrightarrow$ 2.) $\checkmark$
- (1. $\Rightarrow$ 3.) $\checkmark$, (3. $\Rightarrow$ 1.) indirekt $\checkmark$
- (3. $\Rightarrow$ 4.) indirekt: Ámn L! $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{V}_1 \cap \left(\sum_{j=2}^{k} \mathcal{V}_j\right)$.
  $\rightsquigarrow -\mathbf{v}_1 \in \sum_{j=2}^{k} \mathcal{V}_j \rightsquigarrow -\mathbf{v}_1 = \sum_{j=2}^{k} \mathbf{v}_j$, ahol $\mathbf{v}_j \in \mathcal{V}_j$.
  $\rightsquigarrow \mathbf{0} = \mathbf{v}_1 + (-\mathbf{v}_1) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{v}_i \rightsquigarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \ldots = \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$.
- (4. $\Rightarrow$ 3.) Tfh $\forall i\ \mathcal{V}_i \cap \left(\sum_{j\neq i}^{k} \mathcal{V}_j\right) = \{0\}$.
  L! $\mathbf{v}_i \in \mathcal{V}_i$: $\sum_{i=1}^{k} \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$. Ámn Tfh $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$. Mivel $-\mathbf{v}_1 = \sum_{j=2}^{k} \mathbf{v}_j$, ezért $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{V}_1 \cap \left(\sum_{j=2}^{k} \mathcal{V}_j\right)$ $\lightning$
- (1. $\Rightarrow$ 5.) A $\mathcal{V}_i$ terek bázisainak uniója generátorrendszer $\checkmark$
  Ha $\{\mathbf{b}_{ij}\}$ a $\mathcal{V}_i$ bázisa és $\sum_i \sum_j c_{ij}\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{0}$, akkor a $\mathbf{v}_i = \sum_j c_{ij}\mathbf{b}_{ij}$ jelöléssel $\sum_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ és $\mathbf{v}_i \in \mathcal{V}_i$
  $\rightsquigarrow \mathbf{v}_1 = \cdots = \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \rightsquigarrow c_{ij} = 0\ \forall i, j$-re $\rightsquigarrow$ a bázisok uniója lineárisan független $\rightsquigarrow$ bázis.
- (5. $\Rightarrow$ 1.) $\checkmark$

Sajátalterek direkt összege

T L! $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ vektortér és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ az $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lin. leképezés különböző sajátértékei. Jelölje $\mathcal{V}_{\lambda_i}$ a λ_i-hez tartozó sajátalteret. Ekkor

$$\mathcal{V}_{\lambda_1} + \ldots + \mathcal{V}_{\lambda_k} = \mathcal{V}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{V}_{\lambda_k}.$$

B L! $\mathcal{B}_i = \{\mathbf{b}_{i1}, \mathbf{b}_{i2}, \ldots\}$ a $\mathcal{V}_{\lambda_i}$ egy bázisa. Elég megmutatni, hogy $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ lineárisan független.
k-ra vonatkozó teljes indukcióval: $k = 1$ ✓
Tfh k-nál kisebb altérszámra már igaz. L!

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j} c_{ij} \mathbf{b}_{ij}. \tag{3}$$

Indirekt módon tfh a bázisvektorok uniója lin. összefüggő. Ámn felt., hogy $c_{11} \neq 0$.

Szorozzuk meg a (3) egyenlőséget λ_k-val, és ebből vonjuk ki L általi képét:

$$\mathbf{0} = \lambda_k \mathbf{0} - L\mathbf{0} = \sum_{i,j} c_{ij}\lambda_k \mathbf{b}_{ij} - \sum_{i,j} c_{ij} L\mathbf{b}_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_j c_{ij}(\lambda_k - \lambda_i)\mathbf{b}_{ij} = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_j c_{ij}(\lambda_k - \lambda_i)\mathbf{b}_{ij}$$

Az indukciós feltevés szerint az utolsó összegben minden együttható 0, másrészt $c_{11}(\lambda_k - \lambda_1) \neq 0$ ↯

K Ha $\mathcal{V}$ véges dimenziós, akkor az $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris leképezésekre a következők ekvivalensek:

1. L diagonalizálható
2. $\mathcal{V} = \bigoplus_i \mathcal{V}_{\lambda_i}$
3. $\dim \mathcal{V} = \sum_i \dim \mathcal{V}_{\lambda_i}$

K Ha az n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrixnak n darab különböző sajátértéke van, akkor diagonalizálható.

Algebrai és geometriai multiplicitás kapcsolata

T Jelölje egy $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lin.trafó λ sajátértékének algebrai multiplicitását $a = m_a(\lambda)$, geometriai multiplicitását $g = m_g(\lambda)$. Ekkor

$$1 \leqslant g \leqslant a.$$

B $1 \leqslant g$, hisz van λ-hoz tartozó $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ sv., így a sajátaltér dimenziója legalább 1.

- L! a $\mathcal{V}_\lambda$ sajátaltér egy bázisa $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_g\}$, kiegészítjük a $\mathbf{x}_{g+1}$,..., $\mathbf{x}_n$ vektorokkal az egész tér bázisává.
- Az L e bázisra vonatkozó mátrixa legyen $\mathbf{A}$, ekkor

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda\mathbf{I} & \mathbf{X} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \chi_{\mathbf{A}}(x) = \begin{vmatrix} (\lambda - x)\mathbf{I} & \mathbf{X} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Y} - x\mathbf{I} \end{vmatrix} = (\lambda - x)^g |\mathbf{Y} - x\mathbf{I}|$$

- így $(\lambda - x)^g \mid \chi_{\mathbf{A}}(x) = \chi_L(x)$, tehát $g \leqslant a$.

Diagonalizálhatóság és a geometriai multiplicitás

T $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ diagonalizálható $\iff$ sajátértékei geometriai multiplicitásainak összege n.

- Az $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lin.trafó diagonalizálható $\iff$ sajátértékei geometriai multiplicitásainak összege $\dim \mathcal{V}$.

B $(\Rightarrow)$ diagonalizálható $\rightsquigarrow$ a sajátvektoraiból álló bázis elemszáma épp a geometriai multiplicitások összege, hisz egyetlen sajátvektor sem lehet két sajátaltérben.

$(\Leftarrow)$ Ha a geometriai multiplicitások összege n, akkor minden sajátaltérből kiválasztva egy bázist, és véve ezek egyesítését, egy n sajátvektorból álló független vektorrendszert kapunk.

T Ha az $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lin.trafó (az $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ mátrix) minden sajátértéke $\mathbb{F}$-beli, azaz $\chi(x)$ lineáris tényezőkre bomlik $\mathbb{F}[x]$-ben (pl. mert $\mathbb{F}$ algebrailag zárt test), akkor az L lin.trafó (az $\mathbf{A}$ mátrix) pontosan akkor diagonalizálható, ha $\forall\lambda$ sajátértékre $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$.

A diagonalizálás alkalmazásai

Diagonalizálható mátrixok polinomjai

D **Mátrix polinomja** $\forall\ p(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$ polinomra és $\forall$ négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixra értelmezhető p-nek $\mathbf{A}$-ban fölvett értéke: $p(\mathbf{A}) = c_n\mathbf{A}^n + c_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \dots + c_1\mathbf{A} + c_0\mathbf{I}$.

Á **Diagonalizálható mátrix polinomja** Ha $\mathbf{A} = \mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^{-1}$ az $\mathbf{A}$ sajátfelbontása, ahol $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, $\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{P}_1 + \dots + \lambda_k\mathbf{P}_k$ a spektrálfelbontása, és $p(x)$ egy tetszőleges polinom, akkor

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{C}\begin{bmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p(\lambda_k) \end{bmatrix}\mathbf{C}^{-1}, \text{ és}$$

$$p(\mathbf{A}) = p(\lambda_1)\mathbf{P}_1 + p(\lambda_2)\mathbf{P}_2 + \dots + p(\lambda_k)\mathbf{P}_k$$

B $\mathsf{A}^m = \mathsf{C}\Lambda^m\mathsf{C}^{-1}$ $(m = 1, 2, \ldots, k) \rightsquigarrow$ bármely $p(x)$ polinomra $p(\mathsf{A}) = \mathsf{C}p(\Lambda)\mathsf{C}^{-1}$, ahol

$$p\left(\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\right) = \operatorname{diag}\left(p(\lambda_1), p(\lambda_2), \ldots, p(\lambda_n)\right).$$

\- $\mathsf{A}^m = \lambda_1^m\mathsf{P}_1 + \lambda_2^m\mathsf{P}_2 + \ldots + \lambda_k^m\mathsf{P}_k$ $(m = 1, 2, \ldots, k) \rightsquigarrow$ $p(\mathsf{A}) = p(\lambda_1)\mathsf{P}_1 + p(\lambda_1)\mathsf{P}_1 + \ldots + p(\lambda_k)\mathsf{P}_k$.

P Ha A diagonalizálható, akkor $\chi_{\mathsf{A}}(\mathsf{A}) = \mathsf{O}$.

1B $\chi_{\mathsf{A}}(\mathsf{A}) = \mathsf{C}\operatorname{diag}\left(\chi_{\mathsf{A}}(\lambda_1), \chi_{\mathsf{A}}(\lambda_2), \ldots, \chi_{\mathsf{A}}(\lambda_n)\right)\mathsf{C}^{-1} = \mathsf{COC}^{-1}$.

2B $\chi_{\mathsf{A}}(\mathsf{A}) = \chi_{\mathsf{A}}(\lambda_1)\mathsf{P}_1 + \chi_{\mathsf{A}}(\lambda_2)\mathsf{P}_2 + \ldots + \chi_{\mathsf{A}}(\lambda_k)\mathsf{P}_k = \mathsf{O}$

Példa

P Számítsuk ki az A^{10} mátrixot!

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

M Sajátfelbontása $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Így $\mathsf{A}^{10} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot (-1)^{10} - 2^{10} & -2 \cdot (-1)^{10} + 2 \cdot 2^{10} \\ (-1)^{10} - 2^{10} & -(-1)^{10} + 2 \cdot 2^{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1022 & 2046 \\ -1023 & 2047 \end{bmatrix}$$

Fibonacci-sorozat explicit alakja

T A Fibonacci-sorozatra ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, első néhány tagja: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987,...) igaz a következő:

$$F_n = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \right)_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

B Az első egyenlőség teljes indukcióval bizonyítható. Jelölés:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$n = 1$-re trivi, $n \Rightarrow n+1$:

$$\mathbf{F}^{n+1} = \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} + F_n \\ F_{n+1} & F_n + F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{bmatrix}.$$

Fibonacci-sorozat (1. bizonyítás)

B $\chi_{\mathsf{F}}(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$, F sajátértékei $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$, a hozzájuk tartozó sajátvektorok $\mathbf{x}_{1,2} = (1, \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}))$.

F^n sajátfelbontásával:

$$\mathsf{F}^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

ahonnan

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Fibonacci-sorozat (2. bizonyítás)

B Vegyük észre

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{F}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ sajátvektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^2$-ben, így a $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ előáll azok lineáris kombinációjaként:

$\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 = 1/\sqrt{5}\mathbf{x}_1 - 1/\sqrt{5}\mathbf{x}_2$.

$\mathbf{F}^n\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] = c_1\lambda_1^n\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_2^n\mathbf{x}_2$, behelyettesítés után ezt kapjuk:

$$\mathbf{F}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}.$$

Itt csak az első koordinátát kiszámolva, a tételbeli állítást igazoltuk.

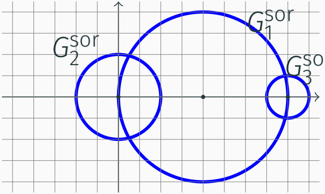
A sajátérték kiszámítása

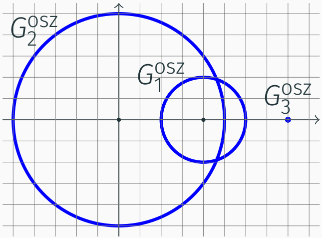
Gersgorin-körök – egyszerű becslés a sajátértékekre

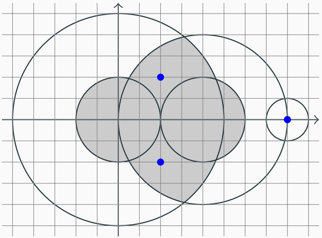
D **Gersgorin-körök:** Az $n \times n$-es valós vagy komplex $\mathbf{A}$ mátrix Gersgorin-körein az a_{ii} közepű, és r_i^{sor} sugarú G_i^{sor}, illetve r_i^{osz} sugarú G_i^{osz} köröket értjük ($i = 1, 2, \dots, n$), ahol

$$r_i^{\text{sor}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad r_i^{\text{osz}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ji}|. \tag{4}$$

P Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ mátrix Gersgorin körei:







T A valós vagy komplex $n \times n$-es mátrix.

- $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_i G_i^{\text{sor}}$, $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_i G_i^{\text{osz}}$, $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq (\bigcup_i G_i^{\text{sor}} \cap \bigcup_i G_i^{\text{osz}})$,
- Ha a G_i^{sor} körök egy k-elemű részhalmaza diszjunkt a maradék $n-k$ körtől, akkor uniójuk multiplicitással számolva pontosan k sajátértéket tartalmaz.

B $(\lambda, \mathbf{x})$ sajátpár, $\max_i x_i = 1$, tehát $|x_j| \le 1$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.
$\lambda = \lambda x_i = [\lambda \mathbf{x}]_i = [\mathbf{A}\mathbf{x}]_i = \sum_j a_{ij} x_j$, így $\lambda - a_{ii} = \sum_{j \ne i} a_{ij} x_j$, tehát

$$|\lambda - a_{ii}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} a_{ij} x_j \right| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}||x_j| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}| = r_i^{\text{sor}}.$$

$\mathbf{B}(r) = r\mathbf{A} + (1-r)\operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$, így $\mathbf{B}(0) = \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$, $\mathbf{B}(1) = \mathbf{A}$. Változzék r folyamatosan 0-tól 1-ig.

K Bármely soronként domináns főátlójú valós vagy komplex mátrix invertálható. Hasonló igaz az oszloponként domináns főátlójú mátrixokra is. (Hisz Gersgorin-körei nem tartalmazzák az origót)

Hatványmódszer

D Egy sajátérték szigorúan domináns, ha egyszeres multiplicitású, és abszolút értékben nagyobb az összes többinél. (szigorúan domináns sajátvektor, sajátaltér, sajátpár)

M $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, λ_1 szigorúan domináns sajátérték, $(\lambda_i, \mathbf{v}_i)$ sajátpár, $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_m|$, ($\lambda_1$ valós, egyébként $\overline{\lambda_1}$ is sé. lenne).
L! $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m$, $k > 0$ egész:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^k\mathbf{x} &= c_1\mathbf{A}^k\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{A}^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{A}^k\mathbf{v}_m \\ &= c_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\lambda_m^k\mathbf{v}_m.\end{aligned}$$

Ekkor λ_1^k-val való osztás után $k \to \infty$ esetén

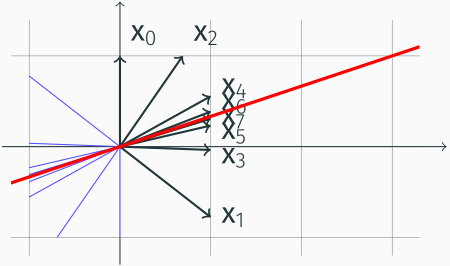
$$\frac{1}{\lambda_1^k}\mathbf{A}^k\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{v}_m \to c_1\mathbf{v}_1,$$

Ha $c_1 \neq 0$, akkor $\mathbf{A}^k\mathbf{x}$ iránya tart a domináns sajátvektor irányához.

T Hatványmódszer: Ha λ_1 az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix szigorúan domináns sajátértéke, akkor létezik olyan $\mathbf{x}_0$ vektor, hogy az $\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0$ vektorok által kifeszített alterek sorozata a domináns sajátaltérhez konvergál, míg $\frac{\mathbf{x}_k^T \mathbf{A} \mathbf{x}_k}{\mathbf{x}_k^T \mathbf{x}_k} \to \lambda$ (ún. Rayleigh hányadosok).

P Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.7 & 0.9 \\ 0.9 & -0.7 \end{bmatrix}$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbf{A}^k\mathbf{x}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.9 \\ -0.7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.9 \\ 1.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.7 \\ -0.1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9.9 \\ 2.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 18.9 \\ 7.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 38.7 \\ 11.9 \end{bmatrix}$



Néhány egyszerű állítás

Á Ha az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot $\mathbb{C}$ fölöttinek tekintjük, és λ sajátérték, akkor $\bar{\lambda}$ is.

Á $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^\top$ sajátértékei azonosak, azonos algebrai és geometriai multiplicitással.

Á Ha $\mathbf{A}$ minden sor- vagy oszlopösszege c, akkor c az $\mathbf{A}$ egy sajátértéke.

Á Ha $(\lambda, \mathbf{x})$ az $\mathbf{A}$ egy sajátpárja és p egy polinom, akkor $(p(\lambda), \mathbf{x})$ sajátpárja a $p(\mathbf{A})$ mátrixnak.

Á Ha $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ és legalább egyikük invertálható, akkor $\mathbf{AB} \sim \mathbf{BA}$ (tehát sajátértékei azonosak).

Á Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{F}^{n\times m}$ és $m \geqslant n$, akkor $\chi_{\mathbf{AB}}(x) = x^{m-n}\chi_{\mathbf{BA}}(x)$.

B
$$\begin{bmatrix}\mathbf{AB} & \mathbf{O}_{m\times n}\\ \mathbf{B} & \mathbf{O}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{I}_m & \mathbf{A}\\ \mathbf{O}_{n\times m} & \mathbf{I}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{O}_m & \mathbf{O}_{m\times n}\\ \mathbf{B} & \mathbf{BA}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_m & -\mathbf{A}\\ \mathbf{O}_{n\times m} & \mathbf{I}_n\end{bmatrix}$$

- **Á** Ha $\mathbf{A}$ invertálható és diagonalizálható, akkor $\mathbf{A}^{-1}$ is diagonalizálható.
- **Á** Ha $\mathbf{A}$ a zérusmátrixtól különböző nilpotens mátrix, akkor nem diagonalizálható.
- **Á** Ha $\mathbf{P}$ vetítő mátrix (idempotens, azaz $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$), akkor $\mathbf{P}$ diagonalizálható, és minden sajátértéke 0 vagy 1.
- **Á** Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sajátértékei folytonos függvényei a mátrix elemeinek.
- **B** A karakterisztikus polinomot definiáló determinánst a kígyók összegére bontva látható, hogy $\chi_{\mathbf{A}}$ minden együtthatója $\mathbf{A}$ elemeiből képzett szorzatok összege, tehát azok folytonos függvénye.

  Egy komplex polinom gyökei az együtthatók folytonos függvényei.
- **Á** L! $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $\mathbf{x}$ az $\mathbf{A}$ egy sajátvektora, $\mathbf{y}^{\mathsf{H}}$ a $\mathbf{B}$ egy bal sajátvektora. *(a)* Ekkor $L : \mathbb{C}^{m\times n} \to \mathbb{C}^{m\times n}; \mathbf{X} \mapsto \mathbf{AXB}$ lineáris trafó, melynek $\mathbf{xy}^{\mathsf{H}}$ egy sajátvektora!

  (b) $\operatorname{trace}(L) = \operatorname{trace}(\mathbf{A})\operatorname{trace}(\mathbf{B})$.