BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

# Bevezetés az algebrába 2

BMETE91AM37

## Lineáris leképezések

H607 – 2018-02-05, 07, 09

Wettl Ferenc
ALGEBRA TANSZÉK

# Vektortér

# Vektortér absztrakt fogalma

D **Vektortér**

A $\mathcal{V}$ halmazt $\mathbb{F}$ fölötti *vektortérnek* nevezzük (jel.: $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$), ha tartalmaz egy $\mathbf{0}$-val jelölt elemet, és értelmezve van rajta egy összeadás és egy skalárral szorzás művelet, melyek a következő tulajdonságokkal rendelkeznek: ha $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ és $c, d \in \mathbb{F}$, akkor

| | | |
|---|---|---|
| (A1) | $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ | az összeadás kommutatív |
| (A2) | $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ | az összeadás asszociatív |
| (A3) | $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ | az összeadás nulleleme |
| (M1) | $(cd)\mathbf{u} = c(d\mathbf{u})$ | a két szorzás kompatibilis |
| (M2) | $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ | szorzás a test egységelemével |
| (M3) | $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ | szorzás a test nulleleméével |
| (D1) | $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ | disztributív |
| (D2) | $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ | disztributív. |

**m** Az összeadás mint binér művelet egy $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}; (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} + \mathbf{v}$ leképezés, míg a skalárral való szorzás egy $\mathbb{F} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}; (c, \mathbf{u}) \mapsto c\mathbf{u}$ leképezés. Ez tekinthető úgy is, hogy minden $c$ konstans megad egy unér $\mathbf{u} \mapsto c\mathbf{u}$ műveletet.

**m** (A2) $\rightsquigarrow$ többtagú összeget nem kell zárójelezni $\rightsquigarrow$ az $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ jelölés egyértelmű.

**Á** (M3) kicserélhető a következő tulajsonsággal

(A4) $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{V} \exists \mathbf{v} \in \mathcal{V}$: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$ additív inverz létezése

Ezt $-\mathbf{u}$ jelöli.

**B** (M3) $\Rightarrow$ (A4): $\forall \mathbf{u}: \ \mathbf{0} = 0\mathbf{u} = (1-1)\mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, ahol $\mathbf{v} = (-1)\mathbf{u}$.

(A4) $\Rightarrow$ (M3): $0\mathbf{u} = (0+0)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{u} \rightsquigarrow$

$\mathbf{0} = 0\mathbf{u} + \mathbf{v} = (0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}) + \mathbf{v} = 0\mathbf{u} + (0\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 0\mathbf{u} + \mathbf{0} = 0\mathbf{u}$.

**m** A vektortér definíciójára (A1)–(A4), (M1)–(M2), (D1)–(D2) is használható (ált. így szokták).

**Á** A fenti definíció nem minimális: az (A1) bizonyítható a többiből.

**B** $(1+1)(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ kétféle kiszámításával.

# Példák vektorterekre

Á $\mathcal{V} = \{0\}$ bármely test fölött vektortér. Ezt nevezzük zérustérnek.

P $\mathbb{F}^n$ vektortér $\mathbb{F}$ fölött a szokásos elemenkénti összeadás és skalárral szorzás műveleteivel. Speciálisan $\mathbb{F}^1$ (azaz lényegében maga $\mathbb{F}$) is tekinthető $\mathbb{F}$ fölötti vektortérnek.

P $\mathbb{F}^{m\times n}$, $\mathbb{F}[x]$, $\mathbb{F}[x,y]$,..., $\mathbb{F}[x]_n = \{f \in \mathbb{F}[x] \mid \deg f \leqslant n\}$, $\mathbb{F}[[x]] = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\}$ a formális hatványsorok

P $\mathcal{C}^k(\mathbb{R})$, az $\mathbb{R}$-en $k$-szor folytonosan diffható függvények

P $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, a végtelen valós sorozatok

P azon $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$-beliek, melyekben véges sok elemet kivéve $\forall$ elem 0

P $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$, azaz $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Q}$ fölött (általában test a résztest fölött)

D $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ altere $\mathcal{V}$-nek, ha nem üres és zárt a műveletekre nézve. Jelölés: $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$. (Az altér mindig azonos test fölötti vektortér)

Á $\mathbb{F}[x]_n \leqslant \mathbb{F}[x] \leqslant \mathbb{F}[[x]]$, $\mathbb{Q}_{\mathbb{Q}} \leqslant \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$, $\{b\sqrt{2} \mid b \in \mathbb{Q}\} \leqslant \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$, $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \leqslant \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$

# Függvényterek*

**T** Függvényterek L! $X \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz, $\mathbb{F}$ test, $\mathcal{V}$ egy $\mathbb{F}$ fölötti vektortér, $\mathbb{F}^X := \{X \to \mathbb{F} \text{ függvények}\}$, $\mathcal{V}^X := \{X \to \mathcal{V} \text{ függvények}\}$. $\mathbb{F}^X$ és $\mathcal{V}^X$ vektortér $\mathbb{F}$ fölött a szokásos műveletekkel: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(cf)(x) = cf(x)$ minden $x \in X$-re.

**B** A zérusfüggvény a nullelem. (A1) és (M1) bizonyítása: L! $f, g \in \mathcal{V}^X$,

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) && \text{definíció szerint}\\ &= g(x) + f(x) && \text{a } \mathcal{V}\text{-beli összeadás kommutatív}\\ &= (g+f)(x) && \text{definíció szerint.}\end{aligned}$$

L! $c, d \in \mathbb{F}$, $f \in \mathcal{V}$, ekkor

$$\begin{aligned}((cd)f)(x) &= (cd)f(x) && \text{definíció szerint}\\ &= c(df(x)) && \text{a } \mathcal{V}\text{-beli skalárral szorzás kompatibilitása}\\ &= c(df)(x) && \text{definíció szerint.}\end{aligned}$$

# A vektorterek alaptulajdonságai

**T**

1. Minden vektortérnek egyetlen zéruseleme van.
2. Minden $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ vekornak egy additív inverze van: $-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u}$.
3. Ha valamely $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektorra $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u}$, akkor $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
4. Ha valamely $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ vektorra $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, akkor $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.
5. Ha $c \in \mathbb{F}$ és $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, akkor $c\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff c = 0$ vagy $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

**B**

1. Legyen $\mathbf{0}$ és $\mathbf{0}'$ is nullelem.
   Ekkor $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}'$, azaz $\mathbf{0} = \mathbf{0}'$.
2. Mutassuk meg, hogy $(-1)\mathbf{u}$ az $\mathbf{u}$ additív inverze!

$$\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = 1\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = (1-1)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Másrészt ha $\mathbf{v}$ is additív inverz, azaz $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$, akkor

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{0} = \mathbf{v}+\mathbf{u}+(-1)\mathbf{u} = \mathbf{u}+\mathbf{v}+(-1)\mathbf{u} = \mathbf{0}+(-1)\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u}.$$

**B** folyt.

3. Adjunk az $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{u}$ mindkét oldalához $-\mathbf{u}$-t:
   Ekkor $-\mathbf{u}+\mathbf{u}+\mathbf{v}=-\mathbf{u}+\mathbf{u}$, azaz $\mathbf{v}=\mathbf{0}$.
4. Ha $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{u}+\mathbf{w}$, akkor mindkét oldalához $-\mathbf{u}$-t adva $-\mathbf{u}+\mathbf{u}+\mathbf{v}=-\mathbf{u}+\mathbf{u}+\mathbf{w}$ adódik, azaz $\mathbf{v}=\mathbf{w}$.
5. ($\Leftarrow$): ($M2$) szerint $0\mathbf{u}=\mathbf{0}$, lássuk be, hogy $c\mathbf{0}=\mathbf{0}$ minden $c\in\mathbb{F}$ konstansra.
   L! $\mathbf{u}$ tetszőleges, ekkor

$$c\mathbf{u}+c\mathbf{0}=c(\mathbf{u}+\mathbf{0})=c\mathbf{u},$$

   amiből a 3. állítás szerint $c\mathbf{0}=\mathbf{0}$. (Ezzel igazoltuk, hogy ha $c=0$ vagy $\mathbf{u}=\mathbf{0}$, akkor $c\mathbf{u}=\mathbf{0}$.)
   ($\Rightarrow$): Igazoljuk, hogy ha $c\mathbf{u}=\mathbf{0}$, akkor $c=0$ vagy $\mathbf{u}=\mathbf{0}$.
   Tegyük fel, hogy $c\neq 0$.
   Ekkor $c^{-1}$ létezik, így

$$\mathbf{u}=1\mathbf{u}=(c^{-1}c)\mathbf{u}=c^{-1}(c\mathbf{u})=c^{-1}\mathbf{0}=\mathbf{0}.$$

# Lineáris kombináció

L! $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ vektortér és $\mathcal{A} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \ldots\}$ egy véges vagy végtelen vektorhalmaz.

D A lineáris kombináció véges $\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i$ alakú összeg, ahol $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathcal{V}$, $a_i \in \mathbb{F}$.

D AMH a véges vagy végtelen $\mathcal{A}$ vektorhalmaz lineárisan független, ha minden véges részhalmaza lineárisan független.

D AMH $\mathcal{A}$ generátorrendszer $\mathcal{V}$-ben (kifeszíti $\mathcal{V}$-t), ha bármely $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektor előáll véges sok $\mathcal{A}$-beli lineáris kombinációjaként.

D AMH $\mathcal{A}$ a $\mathcal{V}$ egy bázisa, ha lineárisan független generátorrendszer.

P $\mathbb{F}[x]$-nek nincs véges bázisa, de $\{1, x, x^2, \ldots\}$ bázis.

P $\mathbb{F}[[x]]$-nek nem generátorrendszere $\{1, x, x^2, \ldots\}$, mert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ nem áll elő véges lineáris kombinációként. Nincs megszámlálható generátorrendszere, van kontinuum független.

P $\mathbb{F}[x, y]$ egy bázisa: $1, x, y, x^2, xy, y^2$,...

# Lineáris leképezések

# Lineáris leképezés

**D** Legyen $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ két $\mathbb{F}$ test fölötti vektortér. Azt mondjuk, hogy egy $A : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ leképezés lineáris, ha homogén és additív, azaz ha tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ elemre és $c \in \mathbb{F}$ skalárra

$$A(c\mathbf{x}) = cA(\mathbf{x}) \qquad (A \text{ homogén,})$$

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} \qquad (A \text{ additív.})$$

$\mathcal{V} = \mathcal{W}$ esetén lineáris transzformációnak is nevezzük.

**D** Képtér: $\operatorname{Im} A = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{V}\} = A$ értékkészlete (altér)
Magtér: $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} =$ azoknak a vektoroknak az altere, melyeket $A$ a nullvektorba visz.

**P** A síkbeli vektorok egy rögzített $O$ pont körüli forgatása, nagyítása, egy egyenesre való tükrözése és merőleges vetítése lineáris leképezés.

**P** A $D : f \mapsto f'$ és az $I : f \mapsto \int_a^b f$ leképezések lineáris leképezések.

# Lineáris leképezés ekvivalens definíciói

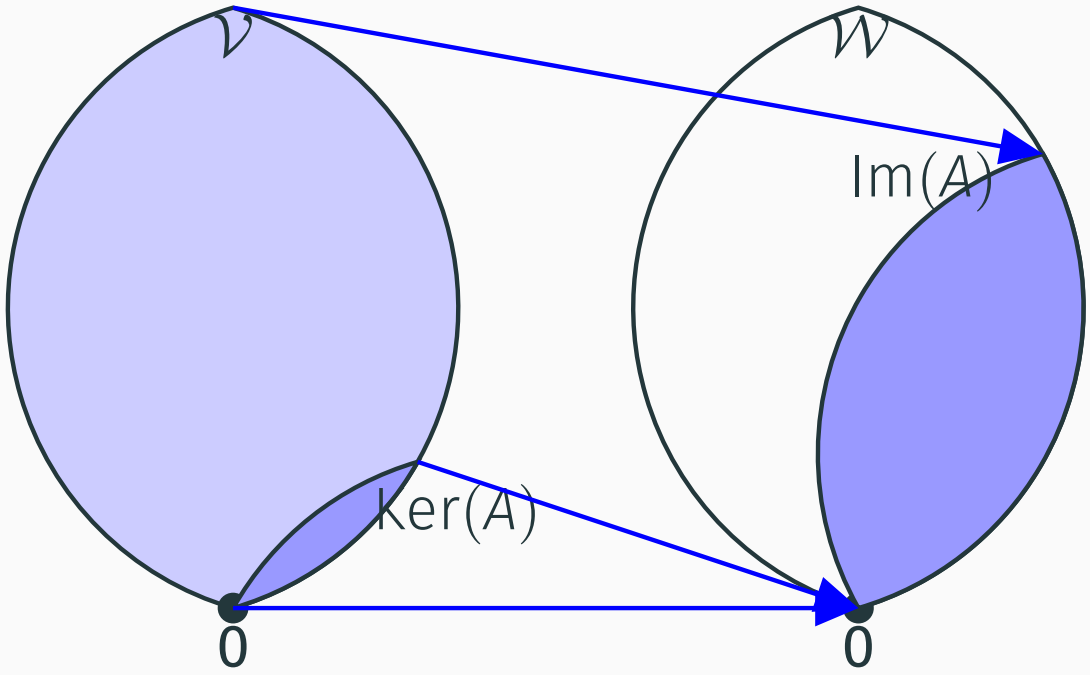
**Á** L! $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ az $\mathbb{F}$ test fölötti vektorterek. Egy tetszőleges $A : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ leképezésre az alábbi állítások ekvivalensek:

1. $A$ lineáris, azaz homogén és additív.
2. Tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ és $c, d \in \mathbb{F}$ esetén
$$A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + dA(\mathbf{y})$$
3. Tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ és $c \in \mathbb{F}$ esetén
$$A(c\mathbf{x} + \mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$$
4. „Megőrzi” a lineáris kombinációt, azaz tetszőleges $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathcal{V}$ vektorokra és $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{F}$ skalárra
$$A(c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k) = c_1A\mathbf{x}_1 + \cdots + c_kA\mathbf{x}_k.$$

**B** 1. $\Rightarrow$ 4. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 1. (3. $\Rightarrow$ 1.: $A\mathbf{0} = A(-\mathbf{0} + \mathbf{0}) = -A\mathbf{0} + A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ $\rightsquigarrow A(c\mathbf{x}) = A(c\mathbf{x} + \mathbf{0}) = cA\mathbf{x} + A\mathbf{0} = cA\mathbf{x}$, az additivitás trivi)

# A lineáris leképezés szemléltetése levéldiagrammal

**m** L! $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ az $\mathbb{F}$ test fölötti vektorterek és $A : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ egy lineáris leképezés:



# Lineáris leképezések tulajdonsága: altér képe altér

**T** L! $A : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ lineáris leképezés. Ekkor

1. $A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (pontosabban $A(\mathbf{0}_{\mathcal{V}}) = \mathbf{0}_{\mathcal{V}'}$),
2. altér képe altér,
3. affin altér képe affin altér.

**B** L! $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ egy altér, $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ egy adott vektor.

1. $A(\mathbf{0}) = A(0\mathbf{v}) = 0A(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$
2. $\mathcal{W} := \{\mathbf{w} \mid \exists \mathbf{u} \in \mathcal{U} : A(\mathbf{u}) = \mathbf{w}\}$, azaz $\mathcal{W}$ az $\mathcal{U}$ altér képe. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{W}$ altér. L! $A(\mathbf{u}_i) = \mathbf{w}_i$ $(i = 1, 2)$, $c \in \mathbb{F}$:

$$c\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = cA(\mathbf{u}_1) + A(\mathbf{u}_2) = A(c\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2).$$

3. $\mathcal{W} := \{\mathbf{w} \mid \exists \mathbf{u} \in \mathcal{U} : A(\mathbf{u} + \mathbf{x}) = \mathbf{w}\}$, azaz $\mathcal{W}$ az $\mathcal{U} + \mathbf{x}$ affin altér képe. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{W} - A\mathbf{x}$ altér, azaz $\mathcal{W}$ affin altér. $A(\mathbf{u}_i + \mathbf{x}) = \mathbf{w}_i + A\mathbf{x}$, azaz $\mathbf{w}_i \in \mathcal{W} - A\mathbf{x}$ $(i = 1, 2)$, $c \in \mathbb{F}$:

$$c\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = c(A(\mathbf{u}_1 + \mathbf{x}) - A\mathbf{x}) + A(\mathbf{u}_2 + \mathbf{x}) - A\mathbf{x} = A(c\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2).$$

# További példák lineáris leképezésekre

D Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$. Az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezést mátrixleképezésnek nevezzük.

Á Minden mátrixleképezés lineáris leképezés.

B $\mathbf{A}(c\mathbf{x} + \mathbf{y}) = c\mathbf{Ax} + \mathbf{Ay}$.

P L! $\mathcal{K}$ a kompakt tartójú függvények vektortere:

$\mathcal{K} = \{\varphi \mid \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ és egy véges intervallumot kivéve mindenütt $0.\}$

- L! $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$: a $T_f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}; \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f\varphi$
- Dirac-$\delta$: $\delta : \mathcal{K} \to \mathbb{R}; \varphi \mapsto \varphi(0)$
- Deriváltja: $\delta' : \mathcal{K} \to \mathbb{R}; \varphi \mapsto -\varphi'(0)$

m e lineáris algebrai megközelítéssel tárgyalható és igazolható a mérnöki matematika „tapasztalata”, hogy az egységugrás függvény „deriváltja” a Dirac-$\delta$, amely függvényként mindenütt 0, csak 0-ban $\infty$ úgy, hogy integrálja 1.

# Példák nem lineáris leképezésekre

P $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, ha $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

- $(x, y, z) \mapsto (x + y - z, y - z + 1, x + 2y - 3z)$
- az eltolás ($\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{b}$)

  az előzők bizonyítása: a $\mathbf{0}$ képe nem a $\mathbf{0}$.
- $\mathbb{C} \to \mathbb{C}; z \mapsto |z|$

  nem homogén, nem additív (vagy: az értékkészlet nem altér)
- $\mathbb{C} \to \mathbb{C}; z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ (itt $\mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$ fölött értendő)

  nem homogén (ez additív, de az értékkészlet itt sem altér)

  a $\mathbb{C}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{C}_{\mathbb{R}}; z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ leképezés viszont lineáris!

# A lineáris $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ leképezések mátrixleképezések

**T** Legyen $A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ egy tetszőleges függvény. Az $A$ pontosan akkor lineáris leképezés, ha létezik egy olyan $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix, hogy az $A$ függvény megegyezik az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezéssel. Ekkor

$$\mathbf{A} = [A\mathbf{e}_1 | A\mathbf{e}_2 | \ldots | A\mathbf{e}_n],$$

ahol $\mathbf{e}_i$ az $i$-edik standard egységvektor ($i = 1, 2, \ldots, n$).

**B** ($A$ mátrixleképezés $\Rightarrow$ $A$ lineáris) ✓

($A$ mátrixleképezés $\Leftarrow$ $A$ lineáris)

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= A(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) \\ &= x_1A\mathbf{e}_1 + x_2A\mathbf{e}_2 + \ldots + x_nA\mathbf{e}_n \\ &= \begin{bmatrix} A\mathbf{e}_1 & A\mathbf{e}_2 & \ldots & A\mathbf{e}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Lineáris leképezésekről olyan esetben is beszélhetünk, amikor a leképezésnek nincs mátrixa (pl. végtelen dimenziós vektorterek esetén).
- Különbség van a lineáris leképezés és a mátrixleképezés közt $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ függvények esetén is:
  - A lineáris leképezés független a bázistól, az csak maga a függvény, mely megadja, hogy melyik vektornak melyik vektor a képe.
  - A mátrixleképezés mindig valamely bázisra vonatkozik. Egy lineáris leképezéshez minden bázisban tartozik egy mátrixleképezés, melynek mátrixa függ a bázistól.
- A lineáris $\mathbb{F} \to \mathbb{F}$ leképezések azonosak az $x \mapsto cx$ függvényekkel, ahol $c \in \mathbb{F}$ konstans. Az $x \mapsto cx + d$ ($c, d \in \mathbb{F}$, $d \neq 0$) nem lineáris leképezés!!

# Lineáris leképezések néhány tulajdonsága

**Á** L! $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ és $\mathcal{W}_{\mathbb{F}}$ vektortér, $\mathcal{B}$ a $\mathcal{V}$ egy bázisa, és $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{W}$ a bázison értelmezett tetszőleges függvény. Ekkor $\exists^1 A : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ lineáris leképezés, melyre $A\mathbf{b} = \varphi(\mathbf{b})$ minden $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$ vektorra.

**B** A $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{k} v_i \mathbf{b}_i$ vektorra $A\mathbf{v} := \sum_{i=1}^{k} v_i \varphi(\mathbf{b}_i)$. Ez jól definiált, mert $\mathbf{v}$ felírása egyértelmű.

Az $A$ lineáris: L! $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{k} u_i \mathbf{b}_i$ $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{k} v_i \mathbf{b}_i$ ($\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k$ az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ felírásában szereplő báziselemek uniója).

$A(c\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A(\sum_{i=1}^{k}(cu_i + v_i)\mathbf{b}_i) = \sum_{i=1}^{k}(cu_i + v_i)\varphi(\mathbf{b}_i) =$
$c\sum_{i=1}^{k} u_i \varphi(\mathbf{b}_i) + \sum_{i=1}^{k} v_i \varphi(\mathbf{b}_i) = cA\mathbf{u} + A\mathbf{v}$

**F** Adjunk meg a standard mátrixával olyan $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris trafót, melyre $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A \neq \{\mathbf{0}\}$.

# Lineáris leképezések néhány tulajdonsága

**D** Egy $f : V \to W$ függvény

1. szürjektív, ha „ráképezés”, azaz $\operatorname{Ran} f = W$,
2. injektív (egy-egyértelmű), ha $u \neq v \in V$ esetén $f(u) \neq f(v)$,
3. bijektív (kölcsönösen egyértelmű), ha injektív és szürjektív.

**Á** L! $A : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ lineáris leképezés.

1. $A$ szürjektív $\iff \operatorname{Im} A = \mathcal{W}$.
2. $A$ injektív $\iff \operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\}$.

**B** 1. ✓, 2.

$(\Rightarrow)$: $A\mathbf{u} = \mathbf{0} = A\mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$

$(\Leftarrow)$: $A\mathbf{u} = A\mathbf{v} \rightsquigarrow \mathbf{0} = A\mathbf{u} - A\mathbf{v} = A(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \rightsquigarrow \mathbf{u} - \mathbf{v} \in \operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\} \rightsquigarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$

**F** *(a)* deriválás $\mathbb{R}[x]$-en, *(b)* integrálás $\mathcal{C}[a, b]$-n, *(c)* origó körüli forgatás, *(d)* (szabad vektorok) egyenesre való merőleges vetítése

# Vektorterek izomorfizmusa

# Izomorfizmus

**D** A $\mathcal{V} \to \mathcal{W}$ leképezést izomorfizmusnak nevezzük, ha bijektív és lineáris. AMH a $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ vektorterek izomorfak, ha van köztük egy izomorfizmus. ( $\iff$ $\operatorname{Ker} A = \{\mathbf{0}\}$, $\operatorname{Im} A = \mathcal{W}$.) Jelölés $\mathcal{V} \simeq \mathcal{W}$.

**P** Legyen $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \subset \mathbb{R}^3$ független vektorrendszer, és $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ legyen az a lineáris leképezés, melyre $A : (1,0) \mapsto \mathbf{u}$, $A : (0,1) \mapsto \mathbf{v}$. Mit mondhatunk az $\mathbb{R}^2$ és a $\mathcal{V} = \operatorname{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ vektortérről?

**Á** 0. Ha $\mathcal{U} \xrightarrow{A} \mathcal{V} \xrightarrow{B} \mathcal{W}$, $A$ és $B$ lin.lek, akkor $B \circ A$ lin.lek.
1. Ha $\mathcal{U} \xrightarrow{A} \mathcal{V} \xrightarrow{B} \mathcal{W}$, $A$ és $B$ izomorfizmus, akkor $B \circ A$ izomorfizmus.
2. Ha $A : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ izom., akkor $\exists A^{-1} : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ inverz és az izom..

**B** $(B \circ A)(c\mathbf{u} + \mathbf{v}) = B(A(c\mathbf{u} + \mathbf{v})) = cB(A\mathbf{u}) + B(A\mathbf{v}) = c(B \circ A)\mathbf{u} + (B \circ A)\mathbf{v}$
2. $A$ bijekció $\rightsquigarrow \forall \mathbf{w}\, \exists^1 \mathbf{v}$: $A\mathbf{v} = \mathbf{w} \rightsquigarrow A^{-1}\mathbf{w} := \mathbf{v}$ bijekció.
$A^{-1}$ lineáris: $A^{-1}(c\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = A^{-1}(cA\mathbf{v}_1 + A\mathbf{v}_2) = A^{-1}(A(c\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)) = c\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = cA^{-1}\mathbf{w}_1 + A^{-1}\mathbf{w}_2$.

**K** A vektorterek izomorfiája ekvivalenciareláció.

# Véges dimenziós terek jellemzése

**T** Ha $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$-nek van $n$-elemű bázisa, akkor $\mathcal{V} \simeq \mathbb{F}^n$.

**B** L! $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ bázis $\mathcal{V}$-ben, és a koordinátázó leképezés $k : \mathcal{V} \to \mathbb{F}^n; \mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (v_1, \ldots, v_n)$, ha $\mathbf{v} = \sum v_i \mathbf{b}_i$.

$k$ lineáris: $\mathbf{u} = \sum u_i \mathbf{b}_i$, $\mathbf{v} = \sum v_i \mathbf{b}_i$:
$k(c\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k(c \sum u_i \mathbf{b}_i + \sum v_i \mathbf{b}_i) = k(\sum (cu_i + v_i)\mathbf{b}_i) =$
$(cu_1 + v_1, \ldots, cu_n + v_n) = c(u_1, \ldots, u_n) + (v_1, \ldots, v_n) = ck(\mathbf{u}) + k(\mathbf{v})$

$k$ injektív: $k(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{v} = \sum 0\mathbf{b}_i \rightsquigarrow \operatorname{Ker} k = \{\mathbf{0}\}$.

$k$ szürjektív: $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$-re $k(\sum x_i \mathbf{b}_i) = (x_1, \ldots, x_n)$.

# Véges dimenziós terek jellemzése

**K** Egy végesen generált vektortér bázisának elemszáma egyértelmű (ez a tér dimenziója).

**B** Ha a $\mathcal{V}$ térnek van véges generátorrendszere, van véges bázisa is (elhagyjuk a függőket).

Ha a minimális méretű bázis $n$-elemű, és van $m > n$ elemű független, akkor a $k : \mathcal{V} \to \mathbb{F}^n$ izomorfizmussal $\{k(\mathbf{v}_1), \ldots, k(\mathbf{v}_m)\}$ is független, ui.

$\mathbf{0} = \sum_i c_i k(\mathbf{v}_i) \rightsquigarrow \mathbf{0} = k(\sum_i c_i \mathbf{v}_i) \rightsquigarrow \mathbf{0} = \sum_i c_i \mathbf{v}_i \rightsquigarrow \forall i\ 0 = c_i$, mert a $\mathbf{v}_i$ vektorok függetlenek.

$\mathbb{F}^n$-ben nem létezik $n$-nél több elemű független rsz. ✓

**K** Két azonos test fölötti véges dimenziós vektortér pontosan akkor izomorf, ha azonos dimenziójúak.

# Lineáris transzformáció mátrixa

# Lineáris transzformáció mátrixa egy adott bázisban

Á L! $L : \mathcal{V}_{\mathbb{F}} \to \mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ lineáris transzformáció, és $\mathcal{B}$ az $n$-dimenziós $\mathcal{V}$ egy bázisa. Ekkor van olyan $\mathbf{L}_{\mathcal{B}}$ mátrix, melyre $[L\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{L}_{\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$, nevezetesen

$$\mathbf{L}_{\mathcal{B}} = [[L\mathbf{b}_1]_{\mathcal{B}} \mid \cdots \mid [L\mathbf{b}_n]_{\mathcal{B}}]$$

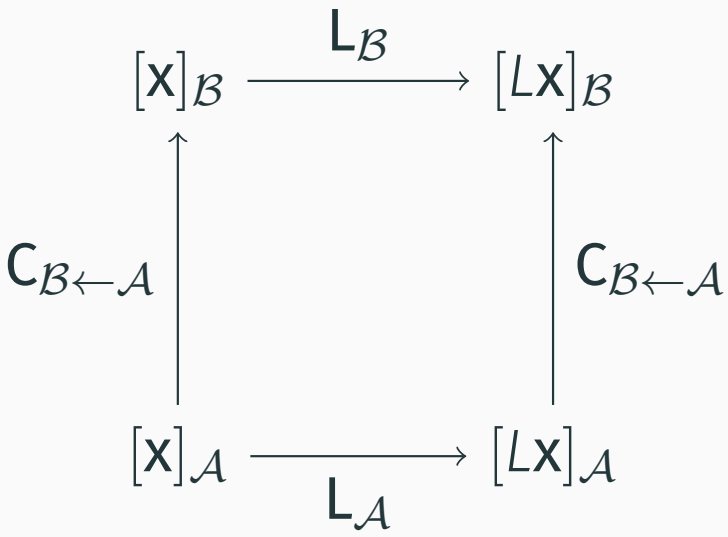
B L! $\mathbf{v} = \sum v_i \mathbf{b}_i$, azaz $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, és L! $k$ a koordinátázó függvény.

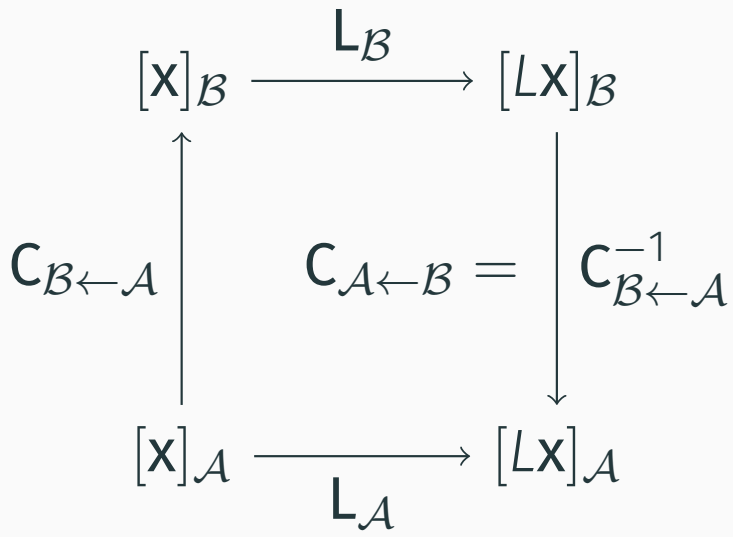
$$\mathbf{L}_{\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [[L\mathbf{b}_1]_{\mathcal{B}} \mid \cdots \mid [L\mathbf{b}_n]_{\mathcal{B}}] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \sum v_i [L\mathbf{b}_i]_{\mathcal{B}} = \sum v_i k(L\mathbf{b}_i) =$$

$k(\sum v_i L\mathbf{b}_i) = k(L(\sum v_i \mathbf{b}_i)) = k(L\mathbf{v}) = [L\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$

$\mathbf{L}_{\mathcal{B}}$ egyértelmű, mert $[L\mathbf{b}_i]_{\mathcal{B}}$ csak $\mathbf{L}_{\mathcal{B}}\mathbf{e}_i$, azaz az $\mathbf{L}_{\mathcal{B}}$ $i$-edik oszlopa lehet.

# Lineáris transzformáció mátrixa különböző bázisokban

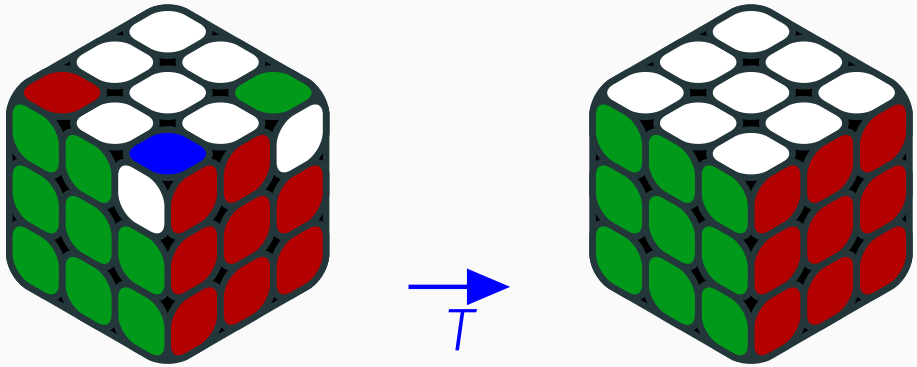


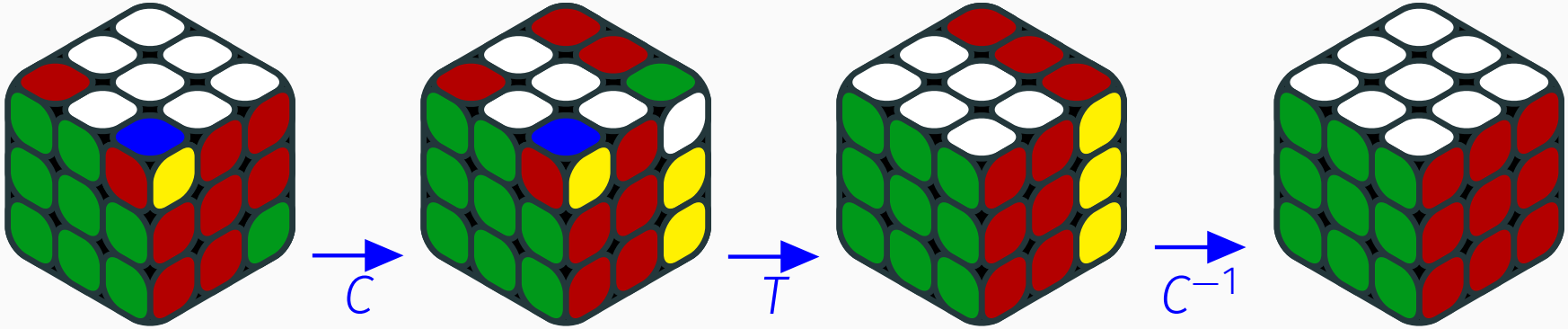




$$L_{\mathcal{B}} C_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} = C_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} L_{\mathcal{A}}$$

$L_{\mathcal{A}} = C_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}} L_{\mathcal{B}} C_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$, illetve
$L_{\mathcal{A}} = C^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} L_{\mathcal{B}} C_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$

# Valami hasonló a Rubik-kockán




$C^{-1}TC$

**P** Írjuk fel az origó körüli síkbeli 90°-os forgatás mátrixát a $\mathcal{B} = \{(2,1),(-3,-1)\}$ bázisban.

**M** $\mathsf{F}_{\mathcal{B}} = \mathsf{T}^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}\mathsf{F}_{\mathcal{E}}\mathsf{T}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$

**P** Írjuk fel a $(2,2,1)$ vektor körüli 90°-os forgatás mátrixát a standard bázisban, és számítsuk ki a $\mathbf{v} = (3,4,7)$ vektor $\mathbf{w}$ elforgatottját!

**M** Keressünk egy olyan bázist, melyben könnyű felírni a forgatás mátrixát! Pl. az $x$-tengely körül forgató mátrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Legyen a $\mathbf{b}_1 = \frac{1}{3}(2,2,1)$, $\mathbf{b}_2 = \frac{1}{3}(-2,1,2)$ két merőleges egységvektor, vektori szorzatuk $\mathbf{b}_3 = \frac{1}{3}(1,-2,2)$, így a $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bázisban a forgatás mátrixa épp a fent megadott mátrix.

Mivel

$$\mathsf{T}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

oszlopai ortonormált rendszert alkotnak, ezért $\mathsf{T}^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathsf{T}^{\mathsf{T}}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} \rightsquigarrow$

$$\mathsf{F}_{\mathcal{E}} = \mathsf{T}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}\mathsf{F}_{\mathcal{B}}\mathsf{T}^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathsf{T}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}\mathsf{F}_{\mathcal{B}}\mathsf{T}^{\mathsf{T}}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 7 & 4 & -4 \\ -4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathsf{w} = \mathsf{F}_{\mathcal{E}}\mathsf{v} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 8 \\ 7 & 4 & -4 \\ -4 & 8 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

# Lineáris leképezés mátrixa

# Lineáris leképezés mátrixa bázispárban

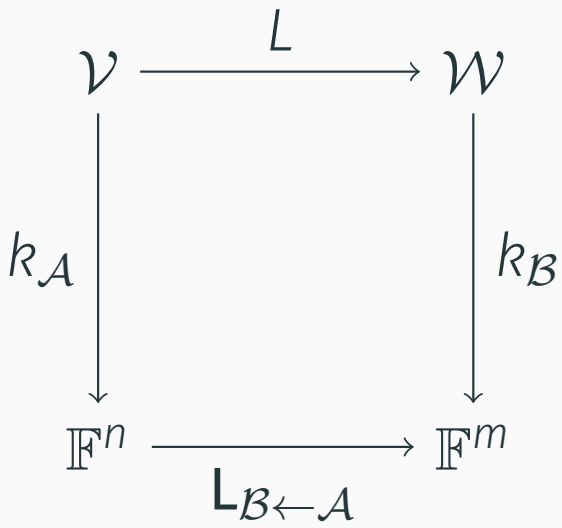
**D** L! $L : \mathcal{V}_{\mathbb{F}} \to \mathcal{W}_{\mathbb{F}}$ lineáris leképezés, $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ a $\mathcal{V}$ bázisa, $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m\}$ a $\mathcal{W}$ bázisa.

AMH $\mathsf{L}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ az $L$ mátrixa az $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bázisokra nézve (az $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bázispárban), ha $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} : [L\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathsf{L}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{A}}$

**m** A korábban tanult áttérés mátrixa nem más, mint az identikus leképezés mátrixa egy bázispárban, hisz e mátrix minden vektorhoz önmagát rendeli, csak egy másik bázisban fölírva. Ha $I$ az identikus leképezés és $\mathsf{T}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ az $\mathcal{A}$-ról $\mathcal{B}$-re való áttérés mátrixa, akkor

$$\mathsf{T}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} = [I]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}.$$

**m** Koordinátázó leképezések: $k_{\mathcal{A}} : \mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]_{\mathcal{A}}$, $k_{\mathcal{B}} : \mathbf{w} \mapsto [\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$.




$\mathsf{L}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ mátrixleképezése $k_{\mathcal{B}} \circ L \circ k_{\mathcal{A}}^{-1}$

Á L! $L : \mathcal{V}_{\mathbb{F}} \to \mathcal{W}_{\mathbb{F}}$ lineáris transzformáció, és $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ a $\mathcal{V}$, $\mathcal{B}$ az $\mathcal{W}$ bázisa. Ekkor

$$\mathbf{L}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} = [[L\mathbf{a}_1]_{\mathcal{B}} \mid \cdots \mid [L\mathbf{a}_n]_{\mathcal{B}}]$$

melyre $[L\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{L}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{A}}$.

B L! $\mathbf{v} = \sum v_i \mathbf{a}_i$, azaz $[\mathbf{v}]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, és L! $k_{\mathcal{A}}$ és $k_{\mathcal{B}}$ a két koordinátázó függvény.

$$\mathbf{L}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{A}} = [[L\mathbf{a}_1]_{\mathcal{B}} \mid \cdots \mid [L\mathbf{a}_n]_{\mathcal{B}}] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \sum v_i [L\mathbf{a}_i]_{\mathcal{B}} = \sum v_i k_{\mathcal{B}}(L\mathbf{a}_i) =$$

$k_{\mathcal{B}}(\sum v_i L\mathbf{a}_i) = k_{\mathcal{B}}(L(\sum v_i \mathbf{a}_i)) = k_{\mathcal{B}}(L\mathbf{v}) = [L\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$
$\mathbf{L}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ egyértelmű, mert $[L\mathbf{a}_i]_{\mathcal{B}}$ csak $\mathbf{L}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathbf{e}_i$, azaz az $\mathbf{L}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ $i$-edik oszlopa lehet.

# Lineáris leképezések kompozíciójának mátrixa

Á Ha $\mathcal{U} \xrightarrow{X} \mathcal{V} \xrightarrow{Y} \mathcal{W}$, ahol $X$ és $Y$ lineáris leképezések, az $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ bázisai rendre $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, akkor

$$[Y \circ X]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}} = [Y]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}[X]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}},$$

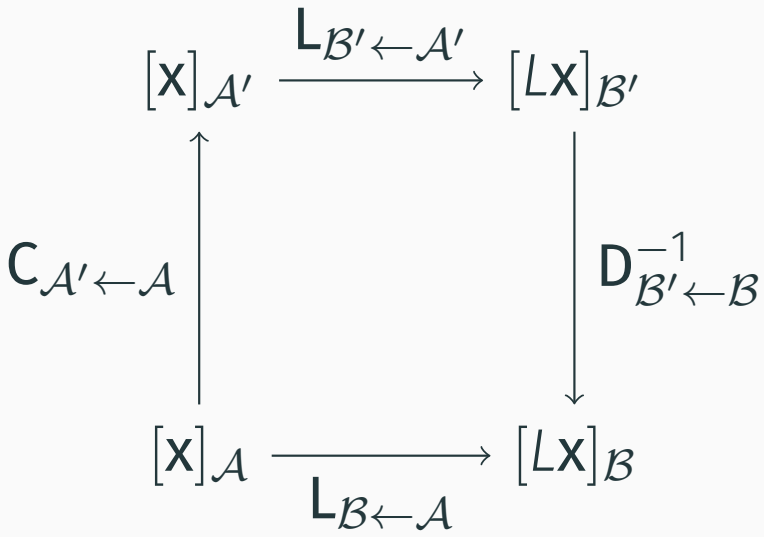
azaz lineáris leképezések kompozíciójának mátrixa = a lineáris leképezések mátrixának szorzatával.

B L! $\mathsf{u} \in \mathcal{U}$, koordinátás alakja $[\mathsf{u}]_{\mathcal{B}}$. Ekkor

$$\begin{aligned}[Y \circ X]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathsf{u}]_{\mathcal{B}} &= [(Y \circ X)\mathsf{u}]_{\mathcal{D}} = [Y(X\mathsf{u})]_{\mathcal{D}} \\ &= [Y]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}[X\mathsf{u}]_{\mathcal{C}} \\ &= [Y]_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}[X]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathsf{u}]_{\mathcal{B}},\end{aligned}$$

ami igazolja az állítást.

# Lineáris leképezés mátrixa különböző bázispárokban




- Áttérések: $[x]_{\mathcal{A}'} = C_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{A}}[x]_{\mathcal{A}}, \quad [Lx]_{\mathcal{B}'} = D_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}[Lx]_{\mathcal{B}},$
- Az $L_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ és $L_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{A}'}$ mátrixok hatásai:

$$[Lx]_{\mathcal{B}} = L_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}[x]_{\mathcal{A}}, \quad [Lx]_{\mathcal{B}'} = L_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{A}'}[x]_{\mathcal{A}'}.$$

- Lineáris leképezés mátrixai közti kapcsolat

$$D_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} = L_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{A}'}C_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{A}}, \text{ azaz}$$

$$L_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} = D^{-1}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}L_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{A}'}C_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{A}}.$$

# Lineáris leképezés mátrixa különböző bázispárokban

Á Az $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ mátrixok ugyanannak a lineáris leképezésnek a mátrixai két bázispárban $\iff \exists\, \mathsf{C} \in \mathbb{F}^{n\times n}, \mathsf{D} \in \mathbb{F}^{m\times m}$ invertálható mátrixok, hogy $\mathsf{B} = \mathsf{D}^{-1}\mathsf{AC}$.

B ($\Rightarrow$) az előzőkben láttuk
($\Leftarrow$) az $\mathbf{x} \mapsto \mathsf{A}\mathbf{x}$ mátrixleképezés lesz a lineáris leképezés és a két bázispár egyike a standard, másika a $\mathsf{C}$ és $\mathsf{D}$ oszlopvektoraiból áll.

Á Lineáris leképezések mátrixai Ha $\mathsf{A}$ és $\mathsf{B}$ ugyanannak az $\mathcal{V} \to \mathcal{W}$ lin. leképezésnek két mátrixa különböző bázispárokban, akkor a két mátrix rangja és nullitása megegyezik.

B ha valamely invertálható $\mathsf{C}$ és $\mathsf{D}$ mátrixszal $\mathsf{A} = \mathsf{D}^{-1}\mathsf{BC}$ és átrendezve $\mathsf{B} = \mathsf{DAC}^{-1}$, akkor a szorzatmátrix rangjára vonatkozó állítás szerint $\mathrm{r}(\mathsf{A}) = \mathrm{r}(\mathsf{D}^{-1}\mathsf{BC}) \leqslant \mathrm{r}(\mathsf{B})$ és $\mathrm{r}(\mathsf{B}) = \mathrm{r}(\mathsf{DAC}^{-1}) \leqslant \mathrm{r}(\mathsf{A})$. Így $\mathrm{r}(\mathsf{A}) = \mathrm{r}(\mathsf{B})$.
Innen $\dim(\mathcal{N}(\mathsf{A})) = n - \mathrm{r}(\mathsf{A}) = n - \mathrm{r}(\mathsf{B}) = \dim(\mathcal{N}(\mathsf{B}))$.

**P** L! $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, és $L : \mathsf{x} \mapsto \mathsf{Ax}$. L! $\mathcal{B} = \{(1,0,1), (1,-1,0), (0,1,2)\}$, $\mathcal{C} = \{(1,2), (1,1)\}$. Írjuk fel az $[L]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ mátrixot!

**M** $\mathsf{A} = [L]_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}$, $\mathsf{B}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathsf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathsf{C}^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

$[L]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathsf{C}^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}[L]_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{E}}\mathsf{B}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$.

A számítások:

$$\begin{array}{cc|ccc|ccc} & & & & & 1 & 1 & 0 \\ & & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ & & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad [L]_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

- Ellenőrzés:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

**P** Írjuk fel a $D : \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_{n-1}; p(x) \mapsto p'(x)$ lin. leképezés mátrixát a $\{1, x, \ldots, x^n\}$, $\{1, x, \ldots, x^{n-1}\}$ bázispárban!

**M** $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \mapsto a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} \rightsquigarrow$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n \end{bmatrix}$$

**P** Írjuk fel a $D : \mathbb{R}[x]_1 \to \mathbb{R}[x]_2; p(x) \mapsto p'(x)$ lin. leképezés mátrixát a következő bázispárokban:

1. $\{1, x\}$, $\{1, x, x^2\}$,
2. $\{x + 1, 2x + 1\}$, $\{1, x, x^2\}$,
3. $\{x + 1, 2x + 1\}$, $\{x^2 - x, x + 2, x^2 + 1\}$.

Mi a közös e mátrixokban?

**M** 1. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

Mindegyik rangja 1.

# A rang és a nullitás fogalmának kiterjesztése

**D** A lineáris $L : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ leképezés rangján képterének dimenzióját értjük, azaz $\mathrm{r}(L) = \dim(\mathrm{Im}(L))$. A magtér dimenzióját, azaz a $\dim(\mathrm{Ker}(L))$ számot a lineáris leképezés nullitásának nevezzük, jelölése $\mathrm{nul}(L)$.

**T** Dimenziótétel lineáris leképezésekre – rang-nullitási tétel Legyen $L : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ egy lineáris leképezés. Ekkor

$$\dim(\mathrm{Im}\, L)+\dim(\mathrm{Ker}\, L) = \dim \mathcal{V} \quad \text{más jelöléssel} \quad \mathrm{r}(L)+\mathrm{nul}(L) = \dim \mathcal{V}.$$

Á L! a lineáris $f : \mathcal{V}_{\mathbb{F}} \to \mathcal{W}_{\mathbb{F}}$ leképezés rangja $r$ (és elég, ha $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ véges dimenziós). Ekkor $\exists \mathcal{A}$, ill. $\mathcal{B}$ bázis a $\mathcal{V}$, ill. $\mathcal{W}$ terekben, hogy

$$[f]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \mathsf{I}_r & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & \mathsf{O} \end{bmatrix}$$

B L! $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ bázisa $\operatorname{Ker} f$-nek. Ez kiegészíthető $\mathcal{V}$ bázisává: $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_\ell, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\}$. Megmutatjuk, hogy $\{f(\mathbf{a}'_1), \ldots, f(\mathbf{a}'_\ell)\}$ bázisa $\operatorname{Im} f$-nek.

Függetlenek: $\mathbf{0} = \sum c_i f(\mathbf{a}'_i) = f(\sum c_i \mathbf{a}'_i) \rightsquigarrow \sum c_i \mathbf{a}'_i \in \operatorname{Ker} f \rightsquigarrow \sum c_i \mathbf{a}'_i = \sum d_j \mathbf{a}_j \rightsquigarrow \forall i, j\ c_i = d_j = 0$.

Generátorrendszer: L! $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ tetszőleges $\rightsquigarrow \mathbf{v} = \sum c_i \mathbf{a}'_i + \sum d_j \mathbf{a}_j \rightsquigarrow f(\mathbf{v}) = \sum c_i f(\mathbf{a}'_i) + \sum d_j \mathbf{0} \in \operatorname{span}(f(\mathbf{a}'_1), \ldots, f(\mathbf{a}'_\ell)) \rightsquigarrow \ell = r$ a leképezés rangja.

Egészítsük ezt ki $\mathcal{W}$ bázisává: $\mathcal{B} = \{f(\mathbf{a}'_1), \ldots, f(\mathbf{a}'_r), \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_t\}$. E bázispárban:

$$[f]_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \mathsf{I}_r & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & \mathsf{O} \end{bmatrix}.$$

**P** Melyik bázispárban lesz az $f : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_3; p(x) \mapsto p'(x)$ leképezés mátrixa $\left[\begin{smallmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ alakú? Mennyi a leképezés rangja?

**B** $\dim(\operatorname{Ker} f) = 1 \rightsquigarrow \mathrm{r}(f) = \dim(\operatorname{Im} f) = 3 - 1 = 2$. Másrészt

$$\begin{array}{ccc} x^2 & \longrightarrow & 2x \\ x & \longrightarrow & 1 \\ 1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

így $\mathcal{A} = \{x, x^2, 1\}$, $\mathcal{B} = \{1, 2x, x^2, x^3\}$, a mátrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

**HF** Legyen az $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ lineáris leképezés rangja $r$. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $r$ rangú $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ mátrix előáll $f$ mátrixaként alkalmas bázispárban!

# Hasonlóság

# A hasonlóság fogalma

**D** Azt mondjuk, hogy az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix hasonló a $\mathbf{B}$ mátrixhoz, ha létezik olyan invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}.$$

**J** Jelölés: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

**m** Ha $\mathbf{A}$ hasonló $\mathbf{B}$-hez, akkor $\mathbf{B}$ is hasonló $\mathbf{A}$-hoz.

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1} = (\mathbf{C}^{-1})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1} = \hat{\mathbf{C}}^{-1}\mathbf{B}\hat{\mathbf{C}}.$$

**P** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$, mert $\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$,

vagy $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

**D** A $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ alakú kifejezést az $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{C}$-vel való konjugáltjának nevezzük.

# Mikor hasonló két mátrix?

T Két mátrix pontosan akkor hasonló, ha van két olyan bázis, melyekben e két mátrix ugyanannak a lineáris transzformációnak a mátrixa.

B ($L$ lin.trafó $\Rightarrow \mathsf{A} = \mathsf{L}_{\mathcal{A}} \sim \mathsf{B} = \mathsf{L}_{\mathcal{B}}$) ✓

($\mathsf{A} \sim \mathsf{B} \Rightarrow \exists L$ lin.trafó)

$\mathsf{A} \sim \mathsf{B} \rightsquigarrow \mathsf{B} = \mathsf{C}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{C}$

Legyen $\mathcal{C} = \{\mathsf{c}_1, \mathsf{c}_2, \ldots, \mathsf{c}_n\}$, ekkor

$$\mathsf{B} = \mathsf{C}^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}\mathsf{A}\mathsf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}.$$

$L$ az $\mathsf{A}$ mátrixhoz tartozó mátrixleképezés a standard bázisban, $\mathsf{B}$ az $L$ mátrixa a $\mathcal{C}$ bázisban.

# Mátrix nyoma

**D** Négyzetes mátrix nyomán főátlójában lévő elemeinek összegét értjük. jelölés: $\operatorname{trace}(\mathbf{A})$.

**Á** A nyom lineáris leképezés, mert $\operatorname{trace} : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$ és

1. $\operatorname{trace}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \operatorname{trace}\mathbf{A} + \operatorname{trace}\mathbf{B}$
2. $\operatorname{trace}(c\mathbf{A}) = c\operatorname{trace}\mathbf{A}$

**T** $\operatorname{trace}(\mathbf{AB}) = \operatorname{trace}(\mathbf{BA})$

**B**
$$\operatorname{trace}(\mathbf{AB}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_{i*}\mathbf{B}_{*i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{B}_{j*}\mathbf{A}_{*j}$$
$$= \operatorname{trace}(\mathbf{BA}).$$

**T** $\operatorname{trace}(\mathbf{C}^{\mathsf{T}}\mathbf{C}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2$

# Hasonlóságra invariáns tulajdonságok

**T** Ha $\mathsf{A} \sim \mathsf{B}$, akkor

1. $\mathrm{r}(\mathsf{A}) = \mathrm{r}(\mathsf{B})$,
2. $\dim(\mathcal{N}(\mathsf{A})) = \dim(\mathcal{N}(\mathsf{B}))$,
3. $\det(\mathsf{A}) = \det(\mathsf{B})$,
4. $\mathrm{trace}(\mathsf{A}) = \mathrm{trace}(\mathsf{B})$.

**B**

1. $\mathrm{r}(\mathsf{A}) = \dim(\mathcal{O}(\mathsf{A})) = \dim(\mathrm{Im}(L)) = \dim(\mathcal{O}(\mathsf{B})) = \mathrm{r}(\mathsf{B})$
2. $\dim(\mathcal{N}(\mathsf{A})) = \dim(\mathrm{Ker}(L)) = \dim(\mathcal{N}(\mathsf{B}))$
3. $\det(\mathsf{A}) = \det(\mathsf{C}^{-1}\mathsf{BC}) = \det(\mathsf{C}^{-1})\det(\mathsf{B})\det(\mathsf{C}) = \det(\mathsf{B})$, mivel $\det(\mathsf{C})\det(\mathsf{C}^{-1}) = 1$.
4. Használjuk a $\mathrm{trace}(\mathsf{AB}) = \mathrm{trace}(\mathsf{BA})$ összefüggést:

$$\begin{aligned}\mathrm{trace}(\mathsf{A}) = \mathrm{trace}(\mathsf{C}^{-1}\mathsf{BC}) = \mathrm{trace}((\mathsf{C}^{-1}\mathsf{B})\mathsf{C}) = \mathrm{trace}(\mathsf{CC}^{-1}\mathsf{B}) \\ = \mathrm{trace}(\mathsf{B}).\end{aligned}$$

# A determináns és a nyom fogalmának kiterjesztése

**D** A lineáris $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ transzformáció $\det L$-lel jelölt determinánsán (illetve $\operatorname{trace} L$-lel jelölt nyomán) az $L$ leképezés bármely bázisban fölírt mátrixának determinánsát (illetve nyomát) értjük. A definíció értelmes, hisz e két érték mindegyike független a bázis választásától.

**P** Melyek hasonlóak a következő mátrixok közül?

| | $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| rang | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| det | 0 | 2 | -2 | 0 | 1 | 2 |
| trace | 1 | 3 | 0 | 2 | 2 | 3 |

**M** $\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2 \mapsto 2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_1 \mapsto 2\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2 \mapsto \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$.

Az áttérés mátrixa: $\mathbf{b}_1 := \mathbf{e}_2$, $\mathbf{b}_2 := \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \rightsquigarrow \mathsf{T}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$.

**2M** Megoldhatjuk egyenletrendszerrel: $\mathsf{T} := \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$, és

$\mathsf{T}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\mathsf{T} = \begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$, azaz $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\mathsf{T} = \mathsf{T}\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$

# Példák

**F** Határozzuk meg a rangját, nullitását, determinánsát, nyomát a sík

1. $\alpha$ szögű elforgatásának,
2. egy egyenesre való tükrözésének,
3. egy egyenesre való merőleges vetítésének,

a tér

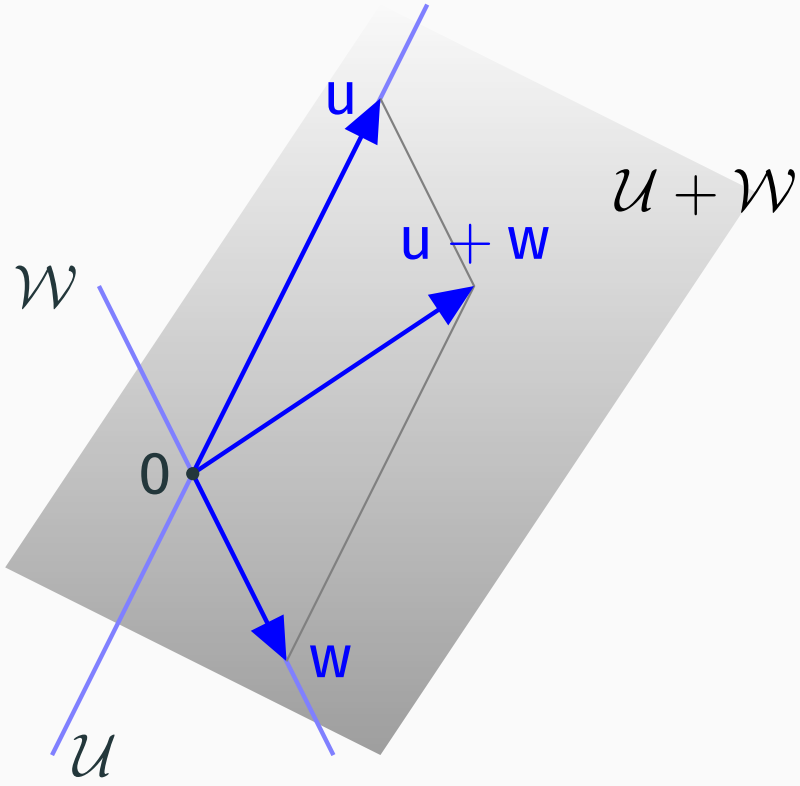
4. egy egyenes körül való $\alpha$-szögű elforgatásának,
5. egy egyenesre való merőleges vetítésének,
6. egy síkra való merőleges vetítésének,
7. egy síkra való merőleges tükrözésének!

**F** Legyen $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ egy lineáris transzformáció. A $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ vektorok és az $\{A\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_n\}$ által kifeszített paralelepipedonok térfogata hogyan viszonyul egymáshoz?

# Vektorterek direkt összege

# Két altér összege

Á Ha $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ a $\mathcal{V}$ altér két altere, akkor az egyesítésük által generált $\mathcal{U}+\mathcal{W}$ altér pontosan azokból a vektorokból áll, melyek egy $\mathcal{U}$- és egy $\mathcal{W}$-beli vektor összegeként előállnak.



T L! $\mathcal{U}, \mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$, ekkor ekvivalensek:

1. $\mathcal{U} + \mathcal{W} = \mathcal{V}$ és $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$,
2. ha $\mathcal{U}$ egy tetszőleges bázisa $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_i\}$ és $\mathcal{W}$ egy tetszőleges bázisa $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_j\}$, akkor $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ a $\mathcal{V}$ egy bázisa
3. $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}\ \exists^1 \mathbf{u} \in \mathcal{U}$ és $\exists^1 \mathbf{w} \in \mathcal{W}$, hogy $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$.

B (1. $\Rightarrow$ 2.)

$\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ generátorrendszer: $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w} = \sum \beta_i \mathbf{b}_i + \sum \gamma_j \mathbf{c}_j$

$\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ független: $\sum \beta_i \mathbf{b}_i + \sum \gamma_j \mathbf{c}_j = \mathbf{0} \rightsquigarrow$

$\sum \beta_i \mathbf{b}_i = \sum (-\gamma_j) \mathbf{c}_j \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\} \rightsquigarrow \forall i, j: \ \beta_i = \gamma_j = 0$

- (2. $\Rightarrow$ 3.) felírható: $\mathbf{v} = \sum \beta_i \mathbf{b}_i + \sum \gamma_j \mathbf{c}_j = \mathbf{u} + \mathbf{w}$

  egyértelműen:

  $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w} = \sum \beta_i \mathbf{b}_i + \sum \gamma_j \mathbf{c}_j = \mathbf{u}' + \mathbf{w}' = \sum \beta_i' \mathbf{b}_i + \sum \gamma_j' \mathbf{c}_j \rightsquigarrow$

  $\sum (\beta_i - \beta_i') \mathbf{b}_i + \sum (\gamma_j - \gamma_j') \mathbf{c}_j = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{u} = \mathbf{u}', \mathbf{v} = \mathbf{v}'$.
- (3. $\Rightarrow$ 1.) $\mathcal{U} + \mathcal{W} = \mathcal{V}$: ✓

  $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$: $\mathbf{v} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W} \rightsquigarrow \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{v}$ két különböző felírás $\rightsquigarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$

# Két altér direkt összege

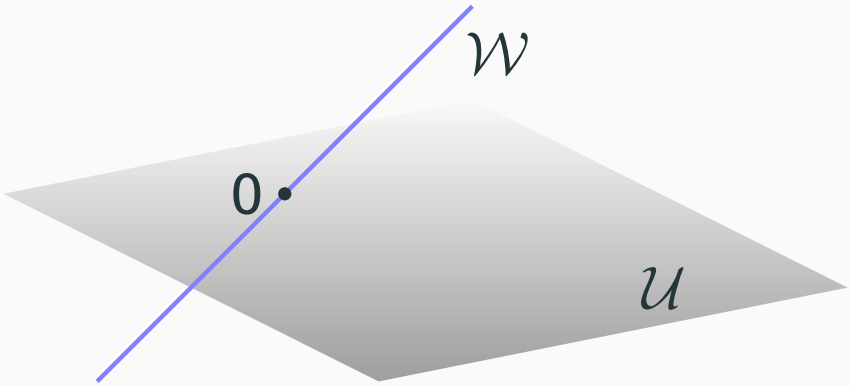
**D** A $\mathcal{V}$ vektortér az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ alterei (belső) direkt összege, ha az előző állítás bármelyik feltételét kielégítik. Jelölés: $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$.

**T** $\forall \mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ altérhez $\exists \mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$: $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$

**B** L! $\mathcal{B}$ az $\mathcal{U}$ egy tetszőleges bázisa, és egészítsük ki $\mathcal{V}$ bázisává. Az új bázisvektorok $\mathcal{C}$ halmazával L! $\mathcal{W} = \operatorname{span}(\mathcal{C})$.

**D** Az így kapott $\mathcal{W}$ alteret $\mathcal{U}$ direkt kiegészítőjének nevezzük.

**m** A direkt kiegészítő nem egyértelmű, de merőleges kiegészítő legföljebb egy van ($\mathbb{R}$ fölött egy, véges test fölött lehet 0).



# Alterek direkt összege

**D** L! $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ véges dimenziós vt., $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots, \mathcal{V}_k \leqslant \mathcal{V}$. Amh a $\mathcal{V}$ tér a $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$,..., $\mathcal{V}_k$ alterek direkt összege, jelölése $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{V}_k = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{V}_i$, ha $\mathcal{V}$ minden vektora egyértelműen felbomlik egy $\mathcal{V}_1$-, egy $\mathcal{V}_2$-... és egy $\mathcal{V}_k$-beli vektor összegére.

**T** L! $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_k \leqslant \mathcal{V}$, $\dim \mathcal{V} = n$. Ekkor ekvivalensek:

1. $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{V}_k$
2. $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus (\mathcal{V}_2 \oplus (\mathcal{V}_3 \oplus \ldots \oplus \mathcal{V}_k))$
3. $\sum_{i=1}^{k} \mathcal{V}_i = \mathcal{V}$, $\mathbf{v}_i \in \mathcal{V}_i$ és $\sum_{i=1}^{k} \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, $i = 1, \ldots, k$
4. $\sum_{i=1}^{k} \mathcal{V}_i = \mathcal{V}$ és $\mathcal{V}_i \cap \left(\sum_{j \neq i} \mathcal{V}_j\right) = \{\mathbf{0}\}$, és
5. $\mathcal{V}_1$,..., $\mathcal{V}_k$ egy-egy bázisának egyesítése a $\mathcal{V}$ bázisát adja.

**m** 4.-ben nem elég kikötni, hogy $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \{\mathbf{0}\}$ bármely $i \neq j$ esetén! L! $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ fggtln, $\mathcal{V}_1 = \operatorname{span}(\mathbf{a})$, $\mathcal{V}_2 = \operatorname{span}(\mathbf{b})$, $\mathcal{V}_3 = \operatorname{span}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \{\mathbf{0}\}$, de $\mathbb{R}^2 \neq \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \mathcal{V}_3$, $(\mathbf{0} + \mathbf{0} + (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{0})$.

B (1. $\Leftrightarrow$ 2.) ✓

- (1. $\Rightarrow$ 3.) ✓, (3. $\Rightarrow$ 1.) indirekt ✓
- (3. $\Rightarrow$ 4.) indirekt: Ámn L! $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{V}_1 \cap \left(\sum_{j=2}^{k} \mathcal{V}_j\right)$.
  $\rightsquigarrow -\mathbf{v}_1 \in \sum_{j=2}^{k} \mathcal{V}_j \rightsquigarrow -\mathbf{v}_1 = \sum_{j=2}^{k} \mathbf{v}_j$, ahol $\mathbf{v}_j \in \mathcal{V}_j$.
  $\rightsquigarrow \mathbf{0} = \mathbf{v}_1 + (-\mathbf{v}_1) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{v}_i \rightsquigarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \ldots = \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$.
- (4. $\Rightarrow$ 3.) Tfh $\forall i\ \mathcal{V}_i \cap \left(\sum_{j\neq i}^{k} \mathcal{V}_j\right) = \{\mathbf{0}\}$.
  L! $\mathbf{v}_i \in \mathcal{V}_i$: $\sum_{i=1}^{k} \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$. Ámn Tfh $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$. Mivel $-\mathbf{v}_1 = \sum_{j=2}^{k} \mathbf{v}_j$, ezért $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{V}_1 \cap \left(\sum_{j=2}^{k} \mathcal{V}_j\right)$ ↯
- (1. $\Rightarrow$ 5.) A $\mathcal{V}_i$ terek bázisainak uniója generátorrendszer ✓
  Ha $\{\mathbf{b}_{ij}\}$ a $\mathcal{V}_i$ bázisa és $\sum_i \sum_j c_{ij}\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{0}$, akkor a $\mathbf{v}_i = \sum_j c_{ij}\mathbf{b}_{ij}$ jelöléssel $\sum_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ és $\mathbf{v}_i \in \mathcal{V}_i$
  $\rightsquigarrow \mathbf{v}_1 = \cdots = \mathbf{v}_k = \mathbf{0} \rightsquigarrow c_{ij} = 0\ \forall i,j$-re $\rightsquigarrow$ a bázisok uniója lineárisan független $\rightsquigarrow$ bázis.
- (5. $\Rightarrow$ 1.) ✓

# Két vektortér külső direkt összege

**D** L! $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ két $\mathbb{F}$ fölötti vektortér. Tekintsük az $\mathcal{U} \times \mathcal{W}$ Descartes-szorzatot a komponensenkénti

$$(\mathsf{u}, \mathsf{w}) + (\mathsf{u}', \mathsf{w}') := (\mathsf{u} + \mathsf{u}', \mathsf{w} + \mathsf{w}')$$
$$c(\mathsf{u}, \mathsf{w}) := (c\mathsf{u}, c\mathsf{w})$$

műveletekkel. E struktúrát az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ külső direkt összegének nevezzük, melyet $\mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$ jelöl.

**Á** $\mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$ vektortér, melynek zéruseleme $(\mathsf{0}, \mathsf{0})$.

**m** A $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$ vektortérben

$$\tilde{\mathcal{U}} = \{(\mathsf{u}, \mathsf{0}) \mid \mathsf{u} \in \mathcal{U}\} \simeq \mathcal{U}$$
$$\tilde{\mathcal{W}} = \{(\mathsf{0}, \mathsf{w}) \mid \mathsf{w} \in \mathcal{W}\} \simeq \mathcal{W}.$$

Ha azonosítjuk $\tilde{\mathcal{U}}$-t $\mathcal{U}$-val és $\tilde{\mathcal{W}}$-t $\mathcal{W}$-vel, akkor nincs különbség a belső és külső direkt összeg között.

# Vetítés

# Vetítés egy altér mentén egy direkt kiegészítőre

**D** L! $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$. A

$$P : \mathcal{V} \to \mathcal{U}; \mathbf{u} + \mathbf{w} \mapsto \mathbf{u}$$

leképezést $\mathcal{V}$-nek $\mathcal{U}$-ra (vagy az első komponensére), $\mathcal{W}$ mentén való vetítésének vagy projekciójának nevezzük.

**Á** A fenti $P : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ vetítésre:

1. $P$ lineáris transzformáció,
2. $\operatorname{Im} P = \mathcal{U}$, $\operatorname{Ker} P = \mathcal{W}$,
3. $P$ az $\operatorname{Im} P$-re $\operatorname{Ker} P$ mentén való vetítés,
4. $I - P$ is vetítés a $\operatorname{Ker} P$-re $\operatorname{Im} P$ mentén, azaz $\operatorname{Ker}(I - P) = \operatorname{Im} P$, $\operatorname{Im}(I - P) = \operatorname{Ker} P$,

# Vetítések jellemzése

**T** A lineáris $P : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ transzformációra ekvivalensek a következők:

1. $P$ vetítés,
2. $\mathbb{F}^n$-nek van olyan bázisa, melyben a mátrixa

$$\mathsf{P} = \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) = \begin{bmatrix} \mathsf{I} & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & \mathsf{O} \end{bmatrix}.$$

3. $P \circ P = P$, azaz $P$ idempotens (írhatjuk, hogy $P^2 = P$).

**m** A 3. állítás azt is jelenti, hogy ha egy $\mathsf{P}$ mátrixra $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$, akkor az $\mathsf{x} \mapsto \mathsf{Px}$ mátrixleképezés vetítés.

**K** $\mathrm{r}(P) = \operatorname{trace}(P)$

**B** A 2. állításból.

B (1. $\Rightarrow$ 2.) L! $\mathcal{U}$ bázisa $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k\}$, $\mathcal{W}$ bázisa $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_\ell\}$, ekkor $\mathcal{V}$ egy bázisa $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$. Mivel $P\mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i$, $P\mathbf{w}_j = \mathbf{0}$, ezért $[P]_{\mathcal{B}\cup\mathcal{C}} = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$.

- (2. $\Rightarrow$ 3.) L! $P$ mátrixa a $\mathcal{B}$ bázisban $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathsf{I} & \mathsf{0} \\ \mathsf{0} & \mathsf{0} \end{bmatrix}$ és $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ tetszőleges. Mivel $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$, ezért $[(P \circ P)(\mathbf{v})]_{\mathcal{B}} = \mathbf{P}^2[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{P}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [P\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$, tehát $P \circ P = P$.
- (3. $\Rightarrow$ 1.) L! a $P$ lin.trafóra $P \circ P = P$, $\mathcal{U} = \operatorname{Im} P$, $\mathcal{W} = \operatorname{Ker} P$.
- $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$: ha $\mathbf{v} \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$, akkor $\exists \mathbf{x} : P\mathbf{x} = \mathbf{v}$, így

$$\mathbf{0} = P\mathbf{v} = P(P\mathbf{x}) = (P \circ P)\mathbf{x} = P\mathbf{x} = \mathbf{v}.$$

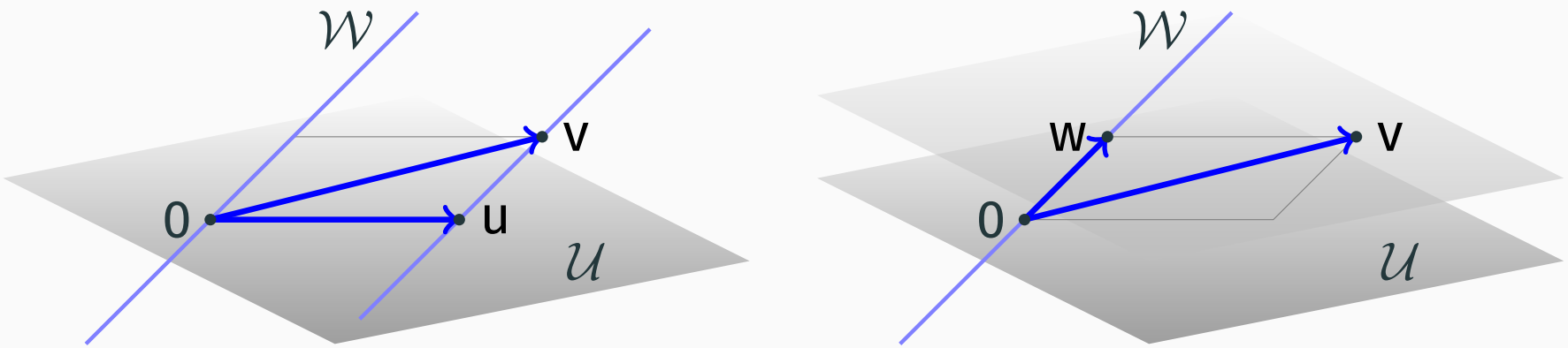
- $\mathcal{U} + \mathcal{W} = \mathcal{V}$: $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ esetén $\mathbf{v} - P\mathbf{v} \in \operatorname{Ker} P$, ugyanis

$$P(\mathbf{v} - P\mathbf{v}) = P\mathbf{v} - P(P\mathbf{v}) = P\mathbf{v} - P\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

$\rightsquigarrow \mathbf{v} = P\mathbf{v} + (\mathbf{v} - P\mathbf{v}) \in \operatorname{Im} P + \operatorname{Ker} P = \mathcal{U} + \mathcal{W}$.

- $P$ az $\operatorname{Im} P$-re vetít: L! $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, ahol $\mathbf{u} \in \operatorname{Im} P$, így $\exists \mathbf{x} : \mathbf{u} = P\mathbf{x}$, $\mathbf{w} \in \operatorname{Ker} P \rightsquigarrow$ $P\mathbf{v} = P(\mathbf{u} + \mathbf{w}) = P(P\mathbf{x} + \mathbf{w}) = P(P\mathbf{x}) + P\mathbf{w} = P\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$.

P $\mathbb{R}^3$-ben síkra (egyenes mentén) vagy egyenesre (sík mentén) való vetítés:




P Határozzuk meg annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, mely
*(a)* a tér összes pontját az $(1, -2, 1)$ vektorral párhuzamosan az $x + y + 2z = 0$ egyenletű síkra vetíti és annak, mely
*(b)* a tér összes pontját az $x + y + 2z = 0$ egyenletű síkkal párhuzamosan az $(1, -2, 1)$ vektorra vetíti.

**M** *(a)* Keressünk a síkban két független vektort: $(-1,1,0)$, $(-2,0,1)$.

A vetítés $\mathbf{P}$ mátrixára

$$\mathbf{P}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{P}\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{P}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Egyetlen mátrixszorzásba foglalva:

$$\mathbf{P}\begin{bmatrix}-1&-2&1\\1&0&-2\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-2&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\ \text{ahonnan}\ \mathbf{P}=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\2&3&4\\-1&-1&-1\end{bmatrix}.$$

**1M** *(b)* A vetítés $\mathbf{P}'$ mátrixára

$$\mathbf{P}'\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{P}'\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{P}'\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}.$$

Egyetlen mátrixszorzásba foglalva:

$$\mathbf{P}'\begin{bmatrix}-1&-2&1\\1&0&-2\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&-2\\0&0&1\end{bmatrix},\ \text{ahonnan}\ \mathbf{P}'=\begin{bmatrix}1&1&2\\-2&-2&-4\\1&1&2\end{bmatrix}.$$

**2M** *(b)* Mivel $\mathbf{P}'=\mathbf{I}-\mathbf{P}$, ezért

$$\mathbf{P}'=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&-1&-2\\2&3&4\\-1&-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&2\\-2&-2&-4\\1&1&2\end{bmatrix}.$$