E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV _____ **NEPTUNKÓD** _____

Bevezetés az algebrába 1 **2. vizsga – gyakorlat** **2018-01-10**

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első feladat nyolc egyszerű kérdését kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 110 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

E1. Milyen értéket vehet föl az $[x]+[-x]$ kifejezés, ha $x \in \mathbb{R}$?

0 vagy -1

E2. $2^{2018} \bmod 11 = ?$

3

E3. Mi a $\cos 30° + i \sin 30°$ szám 2. síknegyedbe ($x \leq 0$, $y \geq 0$) eső köbgyöke?

$\cos 130° + i \sin 130°$

E4. Milyen racionális gyöke lehet az egész együtthatós $2x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + 6$ polinomnak?

$\pm 1,\ \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$

E5. Határozzuk meg az alábbi determináns értékét!

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$$

-12

E6. Mi az $(1, 2, 1)$ vektor merőleges vetülete a $(0, -3, 1)$ vektorra?

$(0,\ \frac{3}{2},\ -\frac{1}{2})$

E7. Hány megoldása van az

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{array}\right]$$

kibővített mátrixú egyenletrendszernek $\mathbb{Z}_2$, illetve $\mathbb{Z}_3$ fölött?

4, 3

E8. Mennyi a rangja az alábbi $n \times n$-es mátrixnak?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$n - 1$

1. Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszert!

$$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod 4 \\ x &\equiv -1 \pmod 5 \\ x &\equiv 2 \pmod{11} \end{aligned}$$

$x \equiv 79 \pmod{220}$

2. Keressünk olyan $a(x)$ és $b(x)$ polinomokat, amelyekre $a(x)(x^3+x+1)+b(x)(x^2-x+2)=1$.

$a(x)=-1,\ \ b(x)=x+1$

3. Bontsuk fel az $f(x)$ polinomot irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{Q}[x]$-ben, illetve $\mathbb{Z}_3[x]$-ben!

$$f(x)=x^4+x^3+4x^2+2x-2$$

$\mathbb{Q}[x]$-ben: $(x+1)(x^3+4x-2)$,
$\mathbb{Z}_3[x]$-ben: $(x+1)(x+2)(x^2+x+2)$

4. Számítsuk ki az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix pszeudoinverzét, és ennek segítségével az $\mathbf{Ax}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ egyenletrendszer legkisebb abszolút értékű megoldását!

A pszeudoinverz

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a megoldás $\frac{1}{3}(1,-1,2)$.

5. Adjuk meg az $\mathbb{R}^4$-ben az $(1,0,-1,0)$, $(1,1,1,1)$, $(0,1,2,1)$, $(0,2,-1,0)$ vektorok által kifeszített altér egy bázisát, és írjuk fel mind a négy vektor koordinátavektorát ebben a bázisban!

$\mathcal{B}=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_4\}$, a koordinátavektorok:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

6. Számítsuk ki az alábbi mátrix determinánsát és inverzét!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 & -\mathrm{i} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a determináns $=1$, az inverz

$$\begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 & 1-\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} \\ -1 & \mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}$$

7. Határozzuk meg az

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix PLU-felbontását!

egy lehetséges:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Adjuk meg a $\mathbf{T}_{\mathcal{B}_2\leftarrow\mathcal{B}_1}$ áttérési mátrixot, ahol

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \{(1,0,-1),(0,1,-2),(0,1,1)\} \text{ és} \\ \mathcal{B}_2 &= \{(0,1,2),(1,1,1),(-1,0,0)\}. \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$