BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Bevezetés az algebrába 1

BMETE92AX23

Merőleges vetítés

H406 – 2017-12-06

Wettl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK

Merőleges vetítés, legjobb közelítés

Merőleges vetítés

T A sík vagy a tér vektorait egy $\mathbf{b}$ irányvektorú egyenesre merőlegesen vetítő leképezés mátrixa

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b}}\mathbf{b}\mathbf{b}^\mathsf{T}, \text{ speciálisan } \mathbf{P} = \mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T}, \text{ ha } \mathbf{e} \text{ egységvektor.}$$

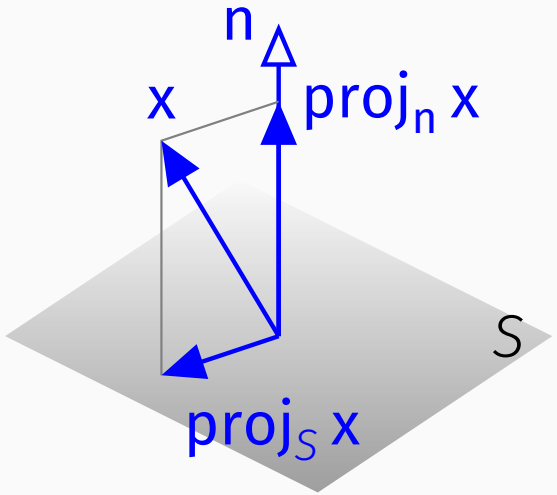
B $\mathbf{x}$-nek a $\mathbf{e}$ egységvektor egyenesére eső merőleges vetülete

$$\mathbf{proj}_\mathbf{e}\,\mathbf{x} = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{e})\cdot\mathbf{e} = \mathbf{e}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{x}) = \mathbf{e}(\mathbf{e}^\mathsf{T}\mathbf{x}) = (\mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T})\mathbf{x} \rightsquigarrow \mathbf{P} = \mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T}.$$

Ha $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{e} = \mathbf{b}/|\mathbf{b}|$ jelölés mellett $\mathbf{P} = \mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T} = \mathbf{b}\mathbf{b}^\mathsf{T}/|\mathbf{b}|^2$.

T A tér vektorait az $\mathbf{n}$ egységnyi normálvektorú síkra merőlegesen vetítő leképezés mátrixa

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^\mathsf{T}.$$



Vetítés hipersíkra és egyenesre $\mathbb{R}^n$-ben

m A tér síkra és egyenesre vonatkozó vetítő és tükröző mátrixai változtatás nélkül átvihetők $\mathbb{R}^n$ hipersíkra és egyenesre vonatkozó transzformációira.

P Írjuk fel az $\mathbb{R}^4$-beli $\mathbf{v} = (1, 0, 2, -2)$ vektorra való merőleges vetítés $\mathbf{P}$ mátrixát!

M $\mathbf{P} = \frac{1}{\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{v}}\mathbf{v}\mathbf{v}^\mathsf{T} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -4 \\ -2 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$

P Írjuk fel az $\mathbb{R}^4$-beli $x + 2z - 2w = 0$ egyenletű hipersíkra való merőleges vetítés $\mathbf{P}'$ mátrixát! (e sík normálvektora $\mathbf{v}$!)

M $\mathbf{P}' = \mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{v}}\mathbf{v}\mathbf{v}^\mathsf{T} = \mathbf{I} - \mathbf{P} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 8 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

Merőleges vetület altérre

T Legyen $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{U}$ valós véges dimenziós vektorterek. Ekkor

1. $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$,
2. $\mathcal{W} + \mathcal{W}^{\perp} = \mathcal{U}$,
3. $\mathcal{U}$ minden vektora egyértelműen előáll egy $\mathcal{W}$- és egy $\mathcal{W}^{\perp}$-beli vektor összegeként,
4. $(\mathcal{W}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{W}$.

D Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektornak a $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$ altérre eső merőleges vetülete a $\mathbf{w}$ vektor, ha $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$, és $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ merőleges a $\mathcal{W}$ altérre, azaz $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in \mathcal{W}^{\perp}$. A $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ vektort a $\mathbf{v}$ vektor $\mathcal{W}$ altérre merőleges összetevőjének nevezzük.

Merőleges vetítés $\mathbb{R}^n$ egy alterére

T **Altérre való vetítés mátrixa**

Ha $\mathcal{W} \leqslant \mathbb{R}^n$, és az A oszlopvektorai a $\mathcal{W}$ egy bázisát alkotják ($\rightsquigarrow$ A teljes oszloprangú), akkor a $\mathcal{W}$ altérre való merőleges vetítés, azaz a $\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}$ leképezés mátrixa

$$\mathsf{A}(\mathsf{A}^\top\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^\top.$$

B L! $\mathsf{v} \in \mathbb{R}^n$ és $\mathsf{w} = \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathsf{v}$.

$\mathcal{O}(\mathsf{A}) = \mathcal{W} \rightsquigarrow \exists \mathsf{x}\colon \mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{w}$

$\mathcal{W}^\perp = \mathcal{N}(\mathsf{A}^\top) \rightsquigarrow \mathsf{v} - \mathsf{w} \in \mathcal{N}(\mathsf{A}^\top)$

$\rightsquigarrow \mathsf{A}^\top(\mathsf{v} - \mathsf{w}) = \mathsf{0} \rightsquigarrow \mathsf{A}^\top(\mathsf{v} - \mathsf{A}\mathsf{x}) = \mathsf{0} \rightsquigarrow \mathsf{A}^\top\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{A}^\top\mathsf{v}$.

$\mathsf{A}^\top\mathsf{A}$ invertálható, azaz $\mathsf{x} = (\mathsf{A}^\top\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^\top\mathsf{v}$

$\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathsf{v} = \mathsf{w} = \mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{A}(\mathsf{A}^\top\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^\top\mathsf{v}$.

Példa

P Határozzuk meg a $(-2, 1, 3)$ vektornak az $(1, 0, 1)$ és a $(-1, 2, 0)$ vektorok által kifeszített síkra eső merőleges vetületét!

M Az altér bázisvektoraiból képzett mátrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ amiből } \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

- Így a $(-2, 1, 3)$ vektor merőleges vetülete

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Merőleges vetítés mátrixai

T Egy P mátrix pontosan akkor merőleges vetítés mátrixa, ha $\mathsf{P} = \mathsf{P}^\mathsf{T} = \mathsf{P}^2$.

B ($\Longrightarrow$) L! $\mathsf{P} = \mathsf{A}(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^\mathsf{T}$, ahol A oszlopai az $\mathcal{O}(\mathsf{P})$ egy tetszőleges bázisának vektorai.

Ekkor

$$\mathsf{P}^2 = \left(\mathsf{A}(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^\mathsf{T}\right)^2 = \mathsf{A}(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^\mathsf{T} = \mathsf{A}(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^\mathsf{T} = \mathsf{P},$$

$$\mathsf{P}^\mathsf{T} = \left(\mathsf{A}(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T} = \mathsf{A}\left((\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})^{-1}\right)^\mathsf{T}\mathsf{A}^\mathsf{T} = \mathsf{A}(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^\mathsf{T} = \mathsf{P}.$$

($\Longleftarrow$) Tfh $\mathsf{P} = \mathsf{P}^\mathsf{T} = \mathsf{P}^2$. (Biz: P az $\mathcal{O}(\mathsf{P})$-re merőlegesen vetít)

Elég megmutatni, hogy $\forall \mathsf{x}: \ \mathsf{x} - \mathsf{P}\mathsf{x} \perp \mathcal{O}(\mathsf{P})$

$\mathsf{P}^2 = \mathsf{P} \rightsquigarrow \mathsf{P}(\mathsf{x} - \mathsf{P}\mathsf{x}) = \mathsf{P}\mathsf{x} - \mathsf{P}^2\mathsf{x} = 0 \rightsquigarrow \mathsf{x} - \mathsf{P}\mathsf{x} \in \mathcal{N}(\mathsf{P})$

de $\mathsf{P} = \mathsf{P}^\mathsf{T} \rightsquigarrow \mathsf{x} - \mathsf{P}\mathsf{x} \in \mathcal{N}(\mathsf{P}^\mathsf{T}) \rightsquigarrow \mathsf{x} - \mathsf{P}\mathsf{x} \perp \mathcal{O}(\mathsf{P})$.

Példa

P Igazoljuk, hogy az

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrixok merőleges vetítés mátrixai! Hány dimenziós térre vetítenek?

Altértől való távolság

D $\mathbf{x}$-nek a $\mathcal{W} \leqslant \mathbb{R}^n$ altértől való távolságán a $\mathcal{W}$ altér $\mathbf{x}$-hez legközelebbi $\mathbf{w}$ vektorának tőle való távolságát értjük. E vektort az $\mathbf{x}$ vektor $\mathcal{W}$-beli legjobb közelítésének nevezzük.

T Legjobb közelítés tétele: Adva van $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{W} \leqslant \mathbb{R}^n$. Az $\mathbf{x}$ vektornak egyetlen $\mathcal{W}$-beli legjobb $\hat{\mathbf{x}}$ közelítése van, nevezetesen $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x}$.

B L! $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$: $\mathbf{x} - \mathbf{w} = (\mathbf{x} - \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x}) + (\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x} - \mathbf{w})$.
$\mathbf{x} - \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x} \in \mathcal{W}^{\perp}$, $\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x} - \mathbf{w} \in \mathcal{W}$
alkalmazható rájuk Pithagorász tétele:

$$|\mathbf{x} - \mathbf{w}|^2 = |\mathbf{x} - \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x}|^2 + |\,\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x} - \mathbf{w}|^2.$$

- Így $|\mathbf{x} - \mathbf{w}|^2 \geq |\mathbf{x} - \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x}|^2$, és egyenlőség csak akkor állhat fönn, ha $\mathbf{w} = \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x}$, ami egyúttal a legjobb közelítés egyértelműségét is bizonyítja.

Vektor felbontása merőleges összetevőkre

T $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{W} \leqslant \mathbb{R}^n$. Az $\mathbf{x}$ vektor egyértelműen felbomlik egy $\mathcal{W}$-beli $\mathbf{w}$ és egy $\mathcal{W}$-re merőleges $\mathbf{w}^\perp$ vektor összegére, nevezetesen $\mathbf{w} = \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x}$ és $\mathbf{w}^\perp = \mathbf{x} - \mathbf{w}$.

B Tfh létezik két felbontás: $\mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{w}^\perp = \mathbf{v} + \mathbf{v}^\perp$

$$\rightsquigarrow \underbrace{\mathbf{v} - \mathbf{w}}_{\in \mathcal{W}} = \underbrace{\mathbf{w}^\perp - \mathbf{v}^\perp}_{\in \mathcal{W}^\perp}.$$

$$\rightsquigarrow \mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{v} = \mathbf{w}$$

Példa

P L! $\mathcal{W} = \operatorname{span}((1,-1,1,0),(0,1,-1,0)) \leqslant \mathbb{R}^4$, $\mathbf{x} = (8,4,2,1)$. Bontsuk fel az $\mathbf{x}$ vektort $\mathcal{W}$-be eső és $\mathcal{W}$-re merőleges vektorok összegére.

M A $\mathcal{W}$-re való merőleges vetítés mátrixa $\mathbf{P} = \mathbf{W}(\mathbf{W}^\mathsf{T}\mathbf{W})^{-1}\mathbf{W}^\mathsf{T}$, ahol $\mathbf{W}$ két oszlopa a megadott két bázisvektor, tehát

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{amiből} \quad \mathbf{P}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Így $\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x} = (8,1,-1,0)$ és $\mathbf{x} - \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x} = (0,3,3,1)$. Egyszerű számítással ellenőrizhető, hogy a $(8,1,-1,0) \in \mathcal{W}$ és hogy $(0,3,3,1) \in \mathcal{W}^\perp$, azaz $(0,3,3,1) \perp \mathcal{W}$, azaz merőleges a $\mathcal{W}$-t kifeszítő bázisvektorok mindegyikére.

A vetület gyorsabb kiszámítása a vetítő mátrix nélkül

- $\mathbf{W}^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$,
- $\mathbf{W}^T\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$,
- $(\mathbf{W}^T\mathbf{W})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$
- $(\mathbf{W}^T\mathbf{W})^{-1}\mathbf{W}^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{W}(\mathbf{W}^T\mathbf{W})^{-1}\mathbf{W}^T\mathbf{b} = \mathbf{W}\begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Optimális megoldás

Inkonzisztens egyenletrendszerek

- $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ pontosan akkor konzisztens, ha $\mathbf{b} \in \mathcal{O}(\mathbf{A})$.

D Keressünk olyan $\mathbf{x}$ vektort, melyre $\mathbf{Ax}$ a legközelebb van $\mathbf{b}$-hez (azaz $(\mathbf{b} - \mathbf{Ax})^2$ a legkisebb). Ezeket az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer optimális megoldásainak vagy a legkisebb négyzetek elve szerinti megoldásainak nevezzük.

- L! $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})}\, \mathbf{b}$, és az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer helyett oldjuk meg az $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}}$ egyenletrendszert!

T **Normálegyenlet**

Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer optimális megoldásai megegyeznek az $\boxed{\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\top\mathbf{b}}$ egyenletrendszer megoldásaival. Ezek közül egyetlen egy esik az $\mathbf{A}$ mátrix sorterébe, a legkisebb abszolút értékű. (Neve normálegyenlet-rendszer vagy normálegyenlet).

L $\mathcal{S}(A^\top A) = \mathcal{S}(A)$, $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^\top A)$ (azaz $Ax = 0 \Leftrightarrow A^\top Ax = 0$)

B $(\Rightarrow)$ $Ax = 0 \rightsquigarrow A^\top Ax = 0 \rightsquigarrow \mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(A^\top A)$

$(\Leftarrow)$ $A^\top Ax = 0 \rightsquigarrow 0 = x^\top A^\top Ax = (Ax)^\top (Ax) \rightsquigarrow Ax = 0 \rightsquigarrow$

$\mathcal{N}(A) \supseteq \mathcal{N}(A^\top A)$, tehát $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^\top A)$.

B $Ax = b$ opt. megoldásai = $A\hat{x} = \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(A)}\, b$ megoldásai

- ($\hat{x}$ opt.mo. $\Rightarrow A^\top A\hat{x} = A^\top b$) $\quad b - \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(A)}\, b \perp \mathcal{O}(A) \rightsquigarrow$

  $b - \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(A)}\, b \in \mathcal{N}(A^\top) \rightsquigarrow A^\top(b - \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(A)}\, b) = 0$

  (de $A\hat{x} = \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(A)}\, b$) $\rightsquigarrow A^\top(b - A\hat{x}) = 0$, $\rightsquigarrow A^\top A\hat{x} = A^\top b$.

- ($\hat{x}$: $A^\top A\hat{x} = A^\top b \Rightarrow \hat{x}$ opt.mo.)

  $A^\top(b - A\hat{x}) = 0 \rightsquigarrow b - A\hat{x} \in \mathcal{N}(A^\top) \rightsquigarrow b - A\hat{x} \perp \mathcal{O}(A)$

  $b = A\hat{x} + (b - A\hat{x})$ – felbontás két merőleges vektor összegére

  a $\perp$ vetület definíciója szerint $A\hat{x} = \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(A)}\, b$, ($\hat{x}$ opt.mo.)

- Egyetlen egy mo. van $A^\top A$ sorterében, így A sorterében is!

K Minden valós mátrixra $r(A^\top A) = r(A)$. (ui. $\mathcal{S}(A^\top A) = \mathcal{S}(A)$)

K Ha A teljes oszloprangú, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszernek egyetlen optimális megoldása van. (ui. $A^\top A$ invertálható)

Példa: egyenletrendszer optimális megoldásai

P Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} y + z &= 3 \\ x + y + 2z &= 2 \\ x + z &= 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert optimális megoldásait, és a min. absz. értékűt!

m Az egyenletrendszer inkonzisztens:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

M A normálegyenlet: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$.

Példa folytatása: a minimális abszolút értékű

- Az összes megoldás:
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{így} \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$
- A minimális abszolút értékű = sortérbe eső megoldás: az eredeti egyenletrendszer kiegészítésével:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
- A sortérbe eső megoldás $(0, 1, 1)$, azaz az összes megoldás ezzel fölírva:
$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Lineáris regresszió

- $y = a + bx$ változóira méréseket végzünk, hogy meghatározzuk a és b értékét.
- n mérés után $\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$.
- normálegyenlet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

- kifejtve $\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$
- Az $y = \hat{a} + \hat{b}x$ egyenest regressziós egyenesnek nevezzük, mely a megadott adatokra a legkisebb négyzetek elve szerinti

T Az (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \dots n)$ párokhoz tartozó, $y = \hat{a} + \hat{b}x$ egyenletű regressziós egyenes paraméterei kielégítik az

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

egyenletet. Ez egyértelműen megoldható, ha van legalább két különböző x_i érték.

B még bizonyítandó az egyértelműség: ha van két különböző x_i érték, akkor az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}$$

mátrix teljes oszloprangú, így $\mathrm{r}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}) = 2$, és a normálegyenlet egyértelműen egyértelműen megoldható.

Polinomiális regresszió

- Keressünk az $a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$ polinom együtthatóira optimális becslést a legkisebb négyzetek módszerével, ha az (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots n)$ párok sorozatát ismerjük.
- Keresendő az n egyenletből álló $k+1$-ismeretlenes

$$
\begin{aligned}
a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_k x_1^k &= y_1 \\
a_0 + a_1 x_2 + \ldots + a_k x_2^k &= y_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_k x_n^k &= y_n
\end{aligned}
$$

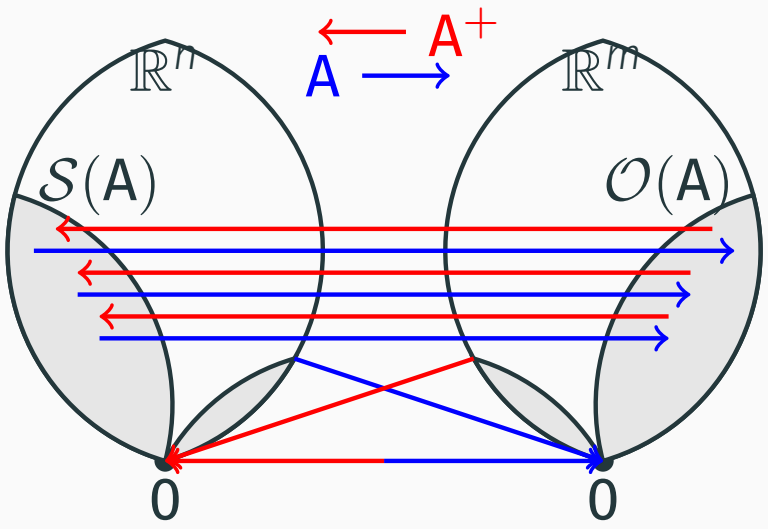
egyenletrendszer megoldása az a_0, a_1,..., a_k ismeretlenekre.

$$
\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^k \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^k \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}
$$

, opt.mo. az $\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{X}\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{y}$ -ből.

Pszeudoinverz

Pszeudoinverz – általánosított inverz



- $Ax = b$ sortérbe eső optimális megoldása megkapható egy $\hat{x} = A^+ b$ képlettel?
- $Ax = \hat{b} (= \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(A)}\, b)$ egyenlet mindig megoldható, sortérbe eső $\hat{x}$ megoldására $\hat{x} = A^+ b = A^+ \hat{b}$ kéne!
  $\rightsquigarrow A^+(b - \hat{b}) = 0 \rightsquigarrow z \in \mathcal{N}(A^\top) \Rightarrow A^+ z = 0.$
- Az inverz fogalmának sokféle általánosítása van.

Moore – Penrose-féle pszeudoinverz

D **A Moore – Penrose-féle pszeudoinverz**

Legyen $\mathbf{A}$ egy $m \times n$-es valós mátrix. Pszeudoinverzén vagy Moore – Penrose-féle pszeudoinverzén azt az $\mathbf{A}^+$-szal jelölt mátrixot értjük, amellyel

1. $\mathbf{A}^+$ hatása $\mathcal{O}(\mathbf{A})$-n: a sortér minden $\mathbf{x}$ vektorára $\mathbf{A}^+(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{x}$,
2. $\mathbf{A}^+$ hatása $\mathcal{O}(\mathbf{A})^\perp$-én: minden $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ vektorra $\mathbf{A}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

- $m \times n$-es mátrix pszeudoinverze $n \times m$-es
- A fenti $\mathbf{A}^+$ mátrix létezését még bizonyítani kell.
- $\mathcal{N}(\mathbf{A}^+) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, és $\mathcal{S}(\mathbf{A}^+) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^+)^\perp$, így $\mathcal{S}(\mathbf{A}^+) = \mathcal{S}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = \mathcal{O}(\mathbf{A})$.

Néhány pszeudoinverz

- $\mathsf{A}^+ = \mathsf{A}^{-1}$, ha A invertálható,
- $\mathsf{O}^+_{m\times n} = \mathsf{O}_{n\times m}$,
- $[a]^+ = [1/a]$, ha $a \neq 0$, és $[0]^+ = [0]$,
- $(\mathsf{A}^+)^+ = \mathsf{A}$,
- ha $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, akkor

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & 0 & \ldots & 0 & \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \mathsf{O} \\ 0 & 0 & \ldots & a_{rr} & \\ \hline & & \mathsf{O} & & \mathsf{O} \end{array}\right]^+_{m\times n} = \left[\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \ldots & 0 & \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \ldots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \mathsf{O} \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{a_{rr}} & \\ \hline & & \mathsf{O} & & \mathsf{O} \end{array}\right]_{n\times m}$$

T

A pszeudoinverz mátrixa

Minden valós mátrixnak létezik pszeudoinverze és az egyértelmű. Ha a valós $\mathbf{A}$ mátrix teljes oszloprangú, akkor

$$\mathbf{A}^{+} = (\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}, \tag{1}$$

ha teljes sorrangú, akkor

$$\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{T}})^{-1}. \tag{2}$$

Ha $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}$, ahol $\mathbf{B}$ egy teljes oszloprangú, $\mathbf{C}$ egy teljes sorrangú mátrix, akkor

$$\mathbf{A}^{+} = \mathbf{C}^{+}\mathbf{B}^{+} = \mathbf{C}^{\mathsf{T}}(\mathbf{C}\mathbf{C}^{\mathsf{T}})^{-1}(\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathsf{T}} \tag{3}$$

$$= \mathbf{C}^{\mathsf{T}}(\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{C}^{\mathsf{T}})^{-1}\mathbf{B}^{\mathsf{T}}. \tag{4}$$

Bizonyítás

- $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ teljes oszloprangú $\rightsquigarrow \mathcal{S}(\mathsf{A}) = \mathbb{R}^n \rightsquigarrow (\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{x}$.
  $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{z} = \mathsf{0} \Rightarrow \mathsf{A}^+\mathsf{z} = \mathsf{0}$, mert $(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{z} = (\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})^{-1}\mathsf{0} = \mathsf{0}$.
- A teljes sorrangú $\rightsquigarrow \mathcal{O}(\mathsf{A}) = \mathbb{R}^m \rightsquigarrow \mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{y}$ konzisztens
  $\hat{\mathsf{x}}$ az egyetlen sortérbe eső megoldás, akkor minden más x megoldás esetén $\mathsf{proj}_{\mathcal{S}(\mathsf{A})}\,\mathsf{x} = \hat{\mathsf{x}} \rightsquigarrow \mathsf{A}^+\mathsf{y} = \hat{\mathsf{x}}$, ugyanis

$$\mathsf{proj}_{\mathcal{S}(\mathsf{A})}\,\mathsf{x} = \mathsf{A}^\mathsf{T}(\mathsf{A}\mathsf{A}^\mathsf{T})^{-1}\mathsf{A}\mathsf{x} = \left(\mathsf{A}^\mathsf{T}(\mathsf{A}\mathsf{A}^\mathsf{T})^{-1}\right)(\mathsf{A}\mathsf{x}) = \mathsf{A}^+\mathsf{y}.$$

- $\mathsf{A} = \mathsf{B}\mathsf{C}$, $\mathsf{y} = \mathsf{A}\mathsf{x}$, $\mathsf{w} = \mathsf{C}\mathsf{x}$ és $\mathsf{y} = \mathsf{B}\mathsf{w}$
  B teljes oszlop-, C teljes sorrangú $\rightsquigarrow \mathsf{C}^+\mathsf{B}^+\mathsf{y} = \mathsf{C}^+\mathsf{w} = \mathsf{x}$ *a)* ✓
  A és B oszloptere azonos $\rightsquigarrow \mathsf{B}^+\mathsf{z} = \mathsf{0}$, tehát $\mathsf{C}^+\mathsf{B}^+\mathsf{z} = \mathsf{0}$ *b)* ✓
- Ha X és Y is az A pszeudoinverze, akkor hatásuk azonos $\mathcal{O}(\mathsf{A})$-n és $\mathcal{O}(\mathsf{A})^\perp$-en, így azonos ezek egy-egy bázisán, vagyis az $\mathbb{R}^m$ tér egy bázisán $\rightsquigarrow$ a tér minden x vektorára $\mathsf{X}\mathsf{x} - \mathsf{Y}\mathsf{x} = \mathsf{0} \rightsquigarrow$ $(\mathsf{X} - \mathsf{Y})\mathsf{e}_i = \mathsf{0} \rightsquigarrow \mathsf{X} = \mathsf{Y}$.

Példák

- Számítsuk ki a következő mátrixok pszeudoinverzét!

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ \text{és} \ \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{B}$ teljes oszloprangú, használjuk az (1) képletet

$$\mathbf{B}^+ = (\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

- A $\mathbf{C}$ mátrix teljes sorrangú, így a (2) képlet szerint

$$\mathbf{C}^+ = \mathbf{C}^\mathsf{T}(\mathbf{C}\mathbf{C}^\mathsf{T})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

- M bázisfelbontása BC:

$$\mathsf{M}^+ = \mathsf{C}^+\mathsf{B}^+ = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- A (4) képlettel

$$\begin{aligned} \mathsf{M}^+ &= \mathsf{C}^\mathsf{T}(\mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{M}\mathsf{C}^\mathsf{T})^{-1}\mathsf{B}^\mathsf{T} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

T

A^+A és AA^+ merőleges vetítés

Tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix esetén

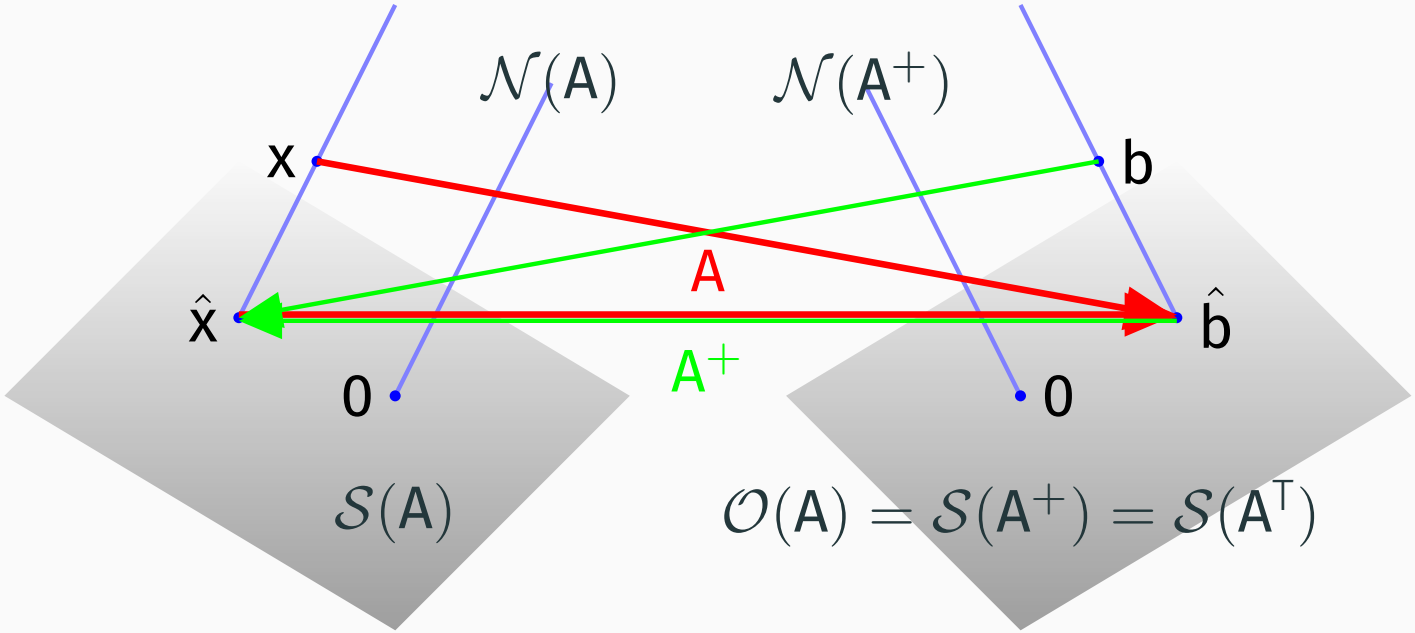
$$A^+A = \mathrm{proj}_{\mathcal{S}(A)} \quad \text{és} \quad AA^+ = \mathrm{proj}_{\mathcal{O}(A)}\,.$$

Tehát A^+A az $\mathbb{R}^n$ teret merőlegesen vetíti A sorterére, míg AA^+ az $\mathbb{R}^m$ teret merőlegesen vetíti A oszlopterére.

1B $A^+A = (R^T(RR^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T)(BR) = R^T(RR^T)^{-1}R,$

$AA^+ = (BR)(R^T(RR^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T) = B(B^TB)^{-1}B^T.$

- $A^+A = R^T(RR^T)^{-1}R$ az R^T oszlopvektorai által kifeszített térre – azaz a sortérre – való merőleges vetítés mátrixa, míg $AA^+ = B(B^TB)^{-1}B^T$ a B oszlopvektorai által kifeszített térre – azaz az oszloptérre – való merőleges vetítés mátrixa.



2B (A definíció alapján) Legyen $x = \hat{x} + y$, ahol $\hat{x} = \mathrm{proj}_{\mathcal{S}(A)}\, x \in\in \mathcal{S}(A)$, tehát $A^+A\hat{x} = \hat{x}$ és $y \in \mathcal{N}(A)$, azaz $Ay = 0 \rightsquigarrow$
$A^+Ax = A^+A(\hat{x} + y) = A^+A\hat{x} + A^+Ay = \hat{x} + A^+0 = \hat{x} = \mathrm{proj}_{\mathcal{S}(A)}\, x$.

- $b = \hat{b} + z$, ahol $\hat{b} = \mathrm{proj}_{\mathcal{O}(A)}\, b \in\in \mathcal{O}(A)$ és $z \in \mathcal{N}(A^\top)$, azaz $A^+z = 0 \rightsquigarrow AA^+b = AA^+(\hat{b} + z) = AA^+\hat{b} + AA^+z = AA^+\hat{b} = \hat{b}$, ahol az utolsó egyenlőség azért áll fenn, mert A és A^+ inverz leképezések a sortér és az oszloptér között.

T **Moore – Penrose-tétel**

A valós $\mathbf{A}$ mátrixnak $\mathbf{X}$ pontosan akkor pszeudoinverze, ha az alábbi négy feltétel mindegyike fennáll:

$$a)\ \mathbf{AXA} = \mathbf{A}, \quad b)\ \mathbf{XAX} = \mathbf{X}, \quad c)\ (\mathbf{AX})^\mathsf{T} = \mathbf{AX}, \quad d)\ (\mathbf{XA})^\mathsf{T} = \mathbf{XA}.$$

B ($\mathbf{A}^+$ teljesíti e feltételeket)

$$\begin{aligned}
\mathbf{AA}^+\mathbf{A} &= \mathbf{AR}^\mathsf{T}(\mathbf{RR}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A} \\
&= \mathbf{BRR}^\mathsf{T}(\mathbf{RR}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{BR} = \mathbf{BR} = \mathbf{A} \\
\mathbf{A}^+\mathbf{AA}^+ &= \mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{RR}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{BRR}^\mathsf{T}(\mathbf{RR}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T} \\
&= \mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{RR}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T} = \mathbf{A}^+
\end{aligned}$$

- $\mathbf{AA}^+$ és $\mathbf{A}^+\mathbf{A}$ merőleges vetítések mátrixai, és minden merőleges vetítés mátrixa szimmetrikus.

- (Egyértelműség) Tfh X és Y is teljesíti a 4 feltételt:

$$\begin{aligned}
\mathsf{AY} &\overset{a)}{=} \mathsf{AXAY} \overset{c)}{=} (\mathsf{AX})^\top(\mathsf{AY})^\top = \mathsf{X}^\top\mathsf{A}^\top\mathsf{Y}^\top\mathsf{A}^\top \\
&= \mathsf{X}^\top(\mathsf{AYA})^\top \overset{a)}{=} \mathsf{X}^\top\mathsf{A}^\top = (\mathsf{AX})^\top \overset{c)}{=} \mathsf{AX} \qquad (5) \\
\mathsf{YA} &\overset{a)}{=} \mathsf{YAXA} \overset{d)}{=} (\mathsf{YA})^\top(\mathsf{XA})^\top = \mathsf{A}^\top\mathsf{Y}^\top\mathsf{A}^\top\mathsf{X}^\top \\
&= (\mathsf{AYA})^\top\mathsf{X}^\top \overset{a)}{=} \mathsf{A}^\top\mathsf{X}^\top = (\mathsf{XA})^\top \overset{d)}{=} \mathsf{XA} \qquad (6) \\
\mathsf{Y} &\overset{b)}{=} \mathsf{YAY} \overset{(5)}{=} \mathsf{YAX} \overset{(6)}{=} \mathsf{XAX} \overset{b)}{=} \mathsf{X}.
\end{aligned}$$

A minimális abszolút értékű optimális megoldás

T **Optimális megoldás pszeudoinverzzel**

Legyen $\mathbf{A}$ egy valós mátrix. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek az $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$ a minimális abszolút értékű optimális megoldása.

- ($\mathbf{A}^+\mathbf{b}$ optimális megoldás), azaz megoldása az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$ normálegyenlet-rendszernek
- Igazolni kell, hogy $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{b} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$.
- Elég ezt: $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^\mathsf{T}$
- $\mathbf{A} = \mathbf{BR}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{A}^+ &= (\mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{B}^\mathsf{T})(\mathbf{B}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}) \\ &= \mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T} = \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{B}^\mathsf{T} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\end{aligned}$$

- $\mathbf{A}^+\mathbf{b}$ a sortérben van, és a sortérbe csak egyetlen optimális megoldás esik

P Adjuk meg az

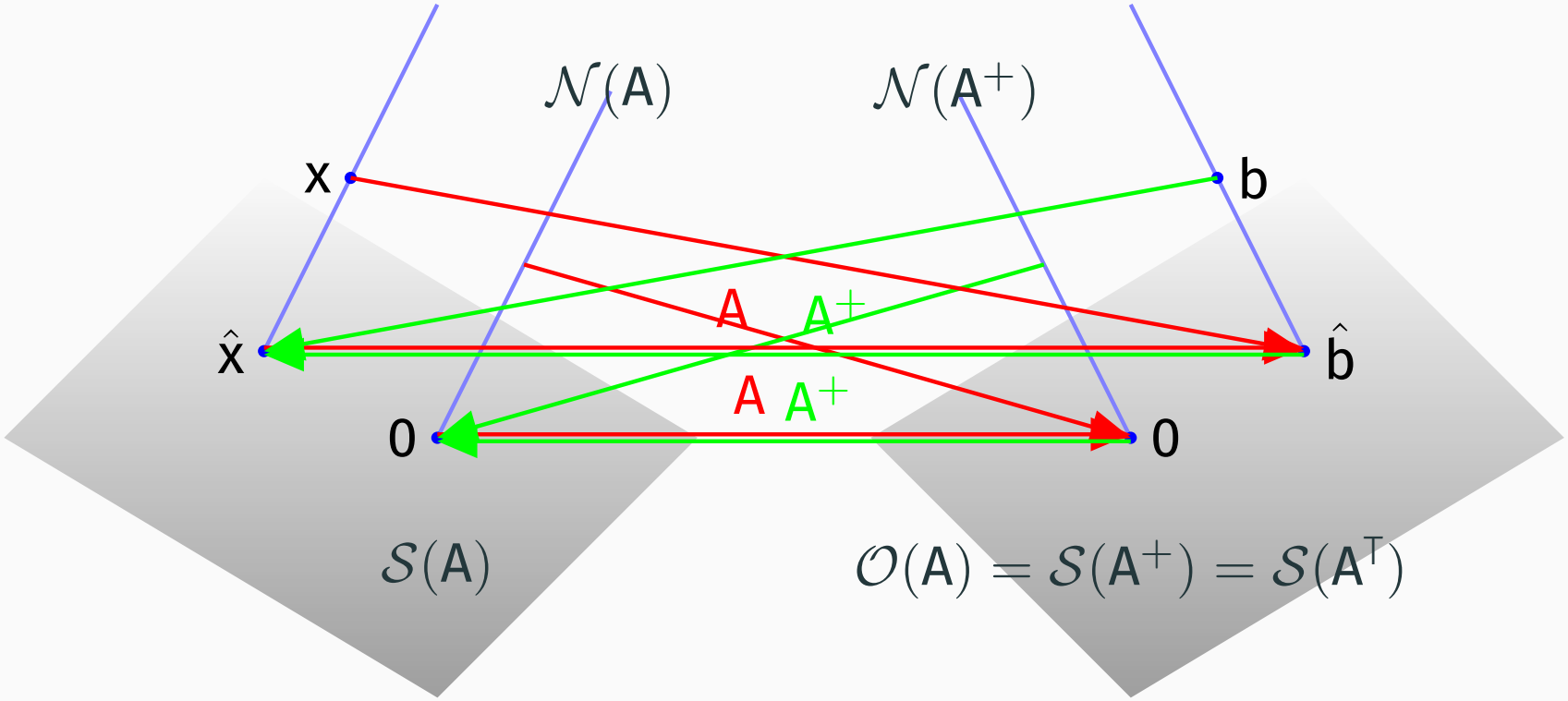
$$\begin{aligned} y + z &= 3 \\ x + y + 2z &= 2 \\ x + z &= 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszer minimális abszolút értékű optimális megoldását!

M Az egyenletrendszer inkonzisztens, ami bővített mátrixának redukált lépcsős alakjából leolvasható.

A minimális abszolút értékű optimális megoldás

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{b} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$


$\mathcal{N}(\mathsf{A})$
$\mathcal{N}(\mathsf{A}^+)$
x
b
A
A^+
$\hat{\mathsf{x}}$
$\hat{\mathsf{b}}$
A
A^+
0
0
$\mathcal{S}(\mathsf{A})$
$\mathcal{O}(\mathsf{A}) = \mathcal{S}(\mathsf{A}^+) = \mathcal{S}(\mathsf{A}^\mathsf{T})$