BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Bevezetés az algebrába 1

BMETE92AX23

A megoldások tere

H406 – 2017-11-03

Wettl Ferenc
ALGEBRA TANSZÉK

Homogén és inhomogén egyenletrendszer megoldásai

Homogén és inhomogén egyenletrendszer megoldásai

Megoldhatóság és a megoldások száma

Mátrix rangja

Á **Főelemek oszlopai**

Egy test fölötti mátrix bármely lépcsős alakjában a főelemek ugyanazokban az oszlopokban vannak, tehát ezek száma is független a lépcsős alaktól.

$$\boxed{\text{bármely lépcsős alak főelemeinek száma}} = \boxed{\text{bármely lépcsős alak nemzérus sorainak száma}} = \boxed{\text{a redukált lépcsős alak vezéregyeseinek száma.}}$$

D **Mátrix rangja**

Egy mátrix valamely lépcsős alakjában a nemnulla sorok számát a mátrix *rangjának* nevezzük. Az $\mathbf{A}$ rangját $\mathrm{r}(\mathbf{A})$ ($rang(\mathbf{A})$ vagy $rank(\mathbf{A})$) jelöli.

Rang kiszámítása

P Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját!

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

M 1, 2, 4, 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kötött és szabad változók

Á **Kötött és szabad változók száma**

Ha az n-ismeretlenes $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer megoldható, és $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = r$, akkor a Gauss- vagy a Gauss–Jordan-módszerrel kapott megoldásában a kötött változók száma r, a szabad változóké $n - r$.

P

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

M Itt 3 a kötött és 4 a szabad változók száma.

Egyenletrendszer megoldhatóságának feltétele

T **A megoldhatóság mátrixrangos feltétele**

Legyen $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ egy n-ismeretlenes lineáris egyenletrendszer.

1. Ez pontosan akkor oldható meg, ha

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}).$$

2. Ez az egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n.$$

A megoldások száma

- Valós együtthatós inhomogén és homogén lineáris egyrsz-ek:

Feltétel	Megoldások száma
$r(\mathbf{A}) < r(\mathbf{A}\|\mathbf{b})$	0
$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}\|\mathbf{b}) = n$	1
$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}\|\mathbf{b}) < n$	∞

Feltétel	Megoldások száma
$r(\mathbf{A}) = n$	1
$r(\mathbf{A}) < n$	∞

T **Homogén lineáris egyenletrendszer megoldhatósága**

Az $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ homogén lineáris egyenletrendszer mindig megoldható ($\mathbf{0}$-vektor, a triviális megoldás). Pontosan akkor van nemtriviális megoldása is, ha $r(\mathbf{A}) < n$, ahol n az ismeretlenek – azaz $\mathbf{A}$ oszlopainak – számát jelöli. Ha m egyenletből áll és $m < n$, akkor van nemtriviális megoldás.

P Az a paraméter mely értékei mellett van az alábbi egyenletrendszernek 0, 1, illetve ∞ sok megoldása?

- $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & a^2 \end{array}\right] \xRightarrow[S_3-aS_1]{S_2-S_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & a^2-a \end{array}\right] \xRightarrow{S_3+S_2}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2) & (a+1)(a-1) \end{array}\right]$$
- $a=1$: a rang 1, az egyenletrendszer az $x_1+x_2+x_3=1$. Ennek megoldása: $(x_1,x_2,x_3)=(1-s-t,s,t)$, azaz
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
- $a=-2$: az együtthatómátrix rangja 2, a bővített mátrix rangja 3, az egyenletrendszer nem konzisztens!
- $a \neq 1, a \neq -2$: $x_1 = \dfrac{(a+1)^2}{a+2}$, $x_2 = \dfrac{1}{a+2}$, $x_3 = -\dfrac{a+1}{a+2}$.

Homogén és inhomogén egyenletrendszer megoldásai

Homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak tere

Homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai

Á **Megoldások lineáris kombinációja**

Egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak bármely lineáris kombinációja is megoldás.

B Elég két megoldásra bizonyítani. Jelölje $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,...,$\mathbf{a}_n$ az egyenletrendszer együtthatómátrixának oszlopvektorait. L! $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ két tetszőleges mo.:

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{a}_1 y_1 + \mathbf{a}_2 y_2 + \ldots + \mathbf{a}_n y_n = \mathbf{0},$$

\- Legyen c, d két tetszőleges skalár. Biz., hogy $c\mathbf{x} + d\mathbf{y}$ is mo.:

$$\mathbf{a}_1(cx_1 + dy_1) + \mathbf{a}_2(cx_2 + dy_2) + \ldots + \mathbf{a}_n(cx_n + dy_n) =$$

$$(c\mathbf{a}_1 x_1 + d\mathbf{a}_1 y_1) + (c\mathbf{a}_2 x_2 + d\mathbf{a}_2 y_2) + \ldots + (c\mathbf{a}_n x_n + d\mathbf{a}_n y_n) =$$

$$c(\mathbf{a}_1 x_1 + \ldots + \mathbf{a}_n x_n) + d(\mathbf{a}_1 y_1 + \ldots + \mathbf{a}_n y_n) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Valós vektortér

Egyelőre az $\mathbb{F}$ test fölötti vektoron $\mathbb{F}^n$ elemeit értjük.

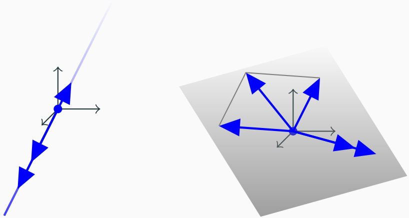
D **Vektortér, altér**

Az $\mathbb{F}$ test fölötti vektortéren vektorok olyan nem üres $\mathcal{V}$ halmazát értjük, mely zárt a vektorösszeadás és a skalárral szorzás műveletére. Ha $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ két vektortér és $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, akkor azt mondjuk, hogy az $\mathcal{U}$ vektortér a $\mathcal{V}$ vektortér altere. Jelölése: $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$.

- Az $\mathcal{A}$ vektorhalmaz pontosan akkor vektortér, ha az $\mathcal{A}$-beli vektorokból $\mathbb{F}$ elemeivel képzett lineáris kombinációk is mind $\mathcal{A}$-ban vannak.

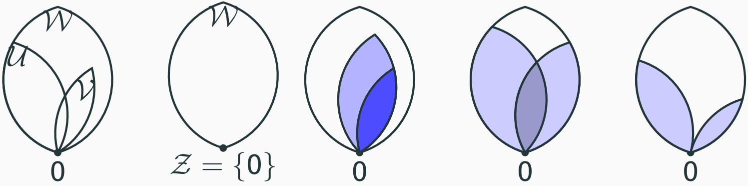
Valós vektorterek

- Minden pozitív n egész esetén $\mathbb{R}^n$ vektortér.
- $\mathbb{R}^2$-ben egy origón átmenő egyenes vektorai (az egyenes pontjaiba mutató helyvektorok) alteret alkotnak.
- $\mathbb{R}^3$-ben bármely origón átmenő sík vagy egyenes vektorai alteret alkotnak.



- Az $\mathbb{R}^3$ imént felsorolt alterei „olyanok”, mint az $\mathbb{R}$ és az $\mathbb{R}^2$. (Az „olyanok” fogalmát precízen a vektorterek izomorfizmusának fogalma fogja tisztázni. Akkor fogjuk igazolni, hogy $\mathbb{R}^n$ alterei valóban mind „olyanok”, mint $\mathbb{R}^k$, ahol $k \leqslant n$.)

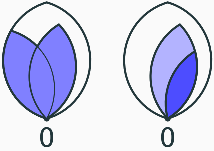
Alterek tulajdonságai és szemléltetésük



- Minden altérnek eleme a nullvektor (bármely altérbeli vektor 0-szorosa is benne van).
- Minden altérbeli $\mathbf{x}$ vektorral együtt annak ellentettje (-1-szerese), a $-\mathbf{x}$ vektor is eleme az altérnek.
- Minden vektortér maga is altér (saját maga altere).
- $\mathcal{Z} = \{0\}$ a zérustér altér. (NEM nulltér a neve!).
- Altér altere altér, azaz ha $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$, és $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{U}$, akkor $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$.
- Alterek metszete altér: $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{W}$.

Alterek tulajdonságai és szemléltetésük

- Két altér uniója pontosan akkor altér, ha egyikük altere a másiknak.



P Alteret alkotnak-e az alábbi vektorhalmazok $\mathbb{R}^3$-ben?

- $\{ (x, y, z) \mid x = y,\ z = xy \}$,
- $\{ (s + 2t, s - 1, 2s + t) \mid s, t \in \mathbb{R} \}$,
- $\{ (x, y, z) \mid 2x - y + z = 0 \}$,
- $\{ (x, y, z) \mid x = 2t,\ y = -t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R} \}$.

M

- Nem. (Pl. $(1, 1, 1)$ benne van, $(2, 2, 2)$ nem.)
- Nem. Nincs benne a nullvektor.
- Igen. Az $\mathbf{n} = (2, -1, 1)$ normálvektorú sík. (Ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ a sík két vektora, azaz $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0$ és $\mathbf{n} \cdot \mathbf{y} = 0$, akkor $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = 0$ és $\mathbf{n} \cdot (c\mathbf{x}) = 0$ is)
- Igen. A $\mathbf{v} = (2, -1, 1)$ vektor skalárszorosai.

Á **Megoldások altere**

Egy n-ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza alteret alkot $\mathbb{R}^n$-ben.

D **Nulltér**

Az $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú hom. lin. egyrsz. megoldásainak alterét az $\mathbf{A}$ mátrix nullterének nevezzük és $\mathcal{N}(\mathbf{A})$-val jelöljük.

P Határozzuk meg a $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix nullterét:

M
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$ alterei

- $\mathbb{R}^2$ alterei az alábbiak:
    - a zérusvektorból álló egyelemű halmaz, azaz a zérustér,
    - egy origón átmenő egyenes összes vektora,
    - a sík összes vektora.
- Hasonlóképp $\mathbb{R}^3$ alterei:
    - a zérusvektorból álló egyelemű halmaz,
    - egy origón átmenő egyenes összes vektora,
    - egy origón átmenő sík összes vektora,
    - a tér összes vektora.

D

Kifeszített altér

$\mathcal{V}$ vektortér, a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_k \in \mathcal{V}$ vektorok

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k$$

alakú lineáris kombinációinak halmazát a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_k$ vektorok által kifeszített altérnek nevezzük, és $\mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$-val vagy $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$-val jelöljük.

A „kifeszített altér” altér?

Á

A kifeszített altér altér

A $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_k \in \mathcal{V}$ vektorok által kifeszített $\mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ vektorhalmaz $\mathcal{V}$ egy altere.

B Legyen $\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k$, és $\mathbf{v} = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \ldots + d_k\mathbf{v}_k$ a $\mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ két tetszőleges vektora, és legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós. Ekkor

$$x\mathbf{u} = (xc_1)\mathbf{v}_1 + (xc_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (xc_k)\mathbf{v}_k \in \mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k),$$

és

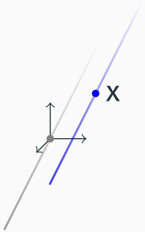
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (c_1 + d_1)\mathbf{v}_1 + \ldots + (c_k + d_k)\mathbf{v}_k \in \mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k).$$

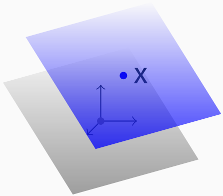
Az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai

T **Homogén és inhomogén egyenletrendszer megoldásai**

Az inhomogén lineáris $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszerre:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{inhomogén}\\ \text{általános}\\ \text{megoldása}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{inhomogén egy}\\ \text{partikuláris}\\ \text{megoldása}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\text{homogén}\\ \text{általános}\\ \text{megoldása}\end{array}}$$





Az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai

B Legyen $\mathbf{x}$ az inhomogén egyenletrendszer egy partikuláris megoldása, és jelölje $\mathcal{H}$ a homogén, $\mathcal{I}$ az inhomogén egyenletrendszer megoldáshalmazát.

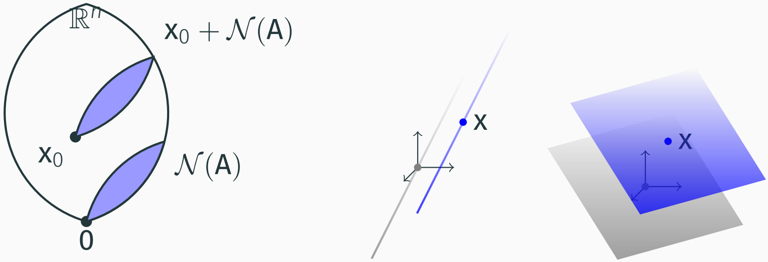
$\mathbf{x} + \mathcal{H} \subseteq \mathcal{I}$:

$$\begin{aligned} & \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = b_i, \\ & \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{y} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \\ \rightsquigarrow \quad & \mathbf{a}_{i*} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{y} = b_i + 0 = b_i \\ \rightsquigarrow \quad & \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{I} \end{aligned}$$

$\mathbf{x} + \mathcal{H} \supseteq \mathcal{I}$: Meg kell mutatnunk, hogy $\forall \mathbf{z} \in \mathcal{I}\ \exists \mathbf{y} \in \mathcal{H}$, hogy $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$:

$$\begin{aligned} & \mathbf{a}_{i*} \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{x}) = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = b_i - b_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m \\ \rightsquigarrow \quad & \mathbf{z} - \mathbf{x} \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

D Az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmaza egy altér eltoltja, melyet geometriai nyelven affin altereknek nevezünk.

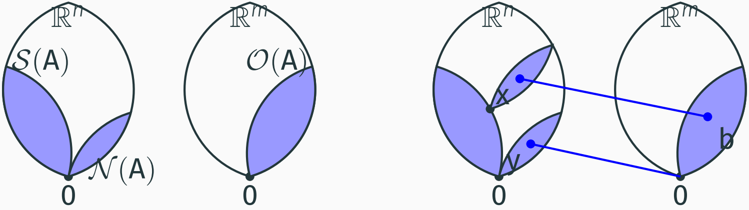


m Az inhomogén egyenletrendszer összes megoldása a homogén összes megoldásának – azaz $\mathcal{N}(\mathbf{A})$-nak – az inhomogén valamelyik megoldásával való eltoltja. Mindegy melyik megoldást választjuk!

D **Sortér, oszloptér**

Egy mátrix oszlopvektorai által kifeszített alteret oszloptérnek, a sorvektorai által kifeszített alteret sortérnek nevezzük.

- Az $m \times n$-es valós $\mathbf{A}$ mátrix sortere $\mathbb{R}^n$ altere, oszloptere $\mathbb{R}^m$ altere.
- Az $\mathbf{A}$ sorterét $\mathcal{S}(\mathbf{A})$, oszlopterét $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ jelöli.



Egyenletrendszer megoldhatósága

Á

Inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldhatósága

Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathbf{b}$ előáll az $\mathbf{A}$ oszlopainak lineáris kombinációjaként, azaz $\mathbf{b}$ benne van az $\mathbf{A}$ oszlopterében. A lineáris kombináció együtthatói megegyeznek a megoldásvektor koordinátáival.

P Határozzuk meg, hogy a $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, -2, 1)$ és $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 1)$ vektorok által kifeszített altérnek eleme-e az $\mathbf{u} = (-1, 2, -3, 6)$ vektor! Adjunk meg egy ezt bizonyító lineáris kombinációt! Mutassuk meg, hogy a $\mathbf{w} = (-1, 2, -3, 4)$ vektor nem eleme az altérnek!

M $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}\ (= \mathbf{w})$ megoldását keressük. A szimultán egyenletrendszer mátrixa $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3 \mid \mathbf{u}\ \mathbf{w}]$.

$$\left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

amiből $(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, -2)$, és $\mathbf{w}$ valóban nem áll elő lineáris kombinációként, mert a $\mathbf{w}$-t tartalmazó egyenletrendszer ellentmondásos.

Lineáris függetlenség eldöntése

K L! $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_k \end{bmatrix}$! Ekvivalens állítások:

- az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,..., $\mathbf{a}_k$ vektorok lineárisan függetlenek;
- az **A** együtthatómátrixú homogén lineáris egyrsz-nek a triviálison kívül nincs más megoldása;
- **A** lépcsős alakjának $\forall$ oszlopában van főelem, azaz $r(\mathbf{A}) = k$.

P Mutassuk meg, hogy a 4-dimenziós $(1, 2, 3, 4)$, $(0, 1, 0, 1)$ és $(1, 1, 1, 0)$ vektorok lineárisan függetlenek.

M A vektorokból képzett mátrix és lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eszerint a homogén lineáris egyrsz-nek csak egyetlen megoldása van, azaz az oszlopvektorok lineárisan függetlenek.

Alterek tulajdonságai és az egyenletrendszerek

Alterek tulajdonságai és az egyenletrendszerek

Bázis és dimenzió

Mátrix transzponáltja

D **Transzponált**

Az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátix transzponáltján azt az $n \times m$-es $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ mátrixot értjük, melyet $\mathbf{A}$-ból a sorok oszlopokra cserélésével kapunk, azaz $[\mathbf{A}^\mathsf{T}]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ji}$ $(i = 1, 2, \dots, n,\ j = 1, 2, \dots, m)$.

P $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{I}_n^\mathsf{T} = \mathbf{I}_n$.

m $\mathcal{S}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = \mathcal{O}(\mathbf{A})$, $\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$.

D Az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus, ha $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}$.

P $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 9 \end{bmatrix}$ szimmetrikus mátrixok.

Sor- és oszloptér

T **Sor- és oszloptér változása elemi sorműveletek közben**

Elemi sorműveletek közben

- a sortér nem változik,
- az oszlopvektorok olyan vektorokba transzformálódnak, melyek megőrzik az eredeti lineáris kapcsolatokat.

B Elemi sorműveletek közben a sortér nem csökken, sorművelet inverze is sorművelet $\rightsquigarrow$ a sortér nem változik.

Az oszlopok közti lineáris kapcsolatok koordinátánként fönnállnak $\rightsquigarrow$ elemi sorműveletek közben nem változnak.

Sor- és oszloptér

T Legyen B az A mátrix egy lépcsős alakja. Ekkor

- A és B sortere megegyezik,
- az A oszlopvektorai között lévő lineáris kapcsolatok azonosak a B ugyanolyan sorszámú oszlopai közti lineáris kapcsolatokkal,
- B nemzérus sorvektorai lineárisan függetlenek,
- a főelemek oszlopvektorai A-ban és B-ben is lineárisan függetlenek.

m Elemi sorműveletek közben az oszloptér változik!

Bázis

D **Bázis**

A $\mathcal{V}$ vektortér bázisán olyan vektorrendszert értünk, mely

- lineárisan független és
- kifeszíti a $\mathcal{V}$ teret (azaz generátorrendszer).

Az $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$,..., $\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ vektorokból álló halmazt az $\mathbb{R}^n$ vektortér standard bázisának nevezzük.

- A zérustér bázisa az üreshalmaz!
- A standard bázis $\mathbb{R}^n$ egy n-elemű bázisa.

Bázis ekvivalens definíciói

Á

Bázis ekvivalens definíciói

L! $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subseteq \mathcal{V}$ vektorok egy halmaza, ahol $\mathcal{V}$ egy tetszőleges vektortér. A következő állítások ekvivalensek:

- $\mathcal{B}$ a $\mathcal{V}$ egy bázisa ($\mathcal{B}$ független generátorrendszer);
- $\mathcal{B}$ minimális méretű halmaz, mely kifeszíti $\mathcal{V}$-t ($\mathcal{B}$ minimális elemszámú generátorrendszer);
- $\mathcal{B}$ maximális méretű, független vektorokból álló halmaz $\mathcal{V}$-ben ($\mathcal{B}$ maximális elemszámú független).

B Elég belátnunk, hogy egy minimális méretű generátorrendszer független vektorokból áll, és hogy egy maximális méretű független rendszer generátor.

P Altér bázisának meghatározása Határozzuk meg az $(1, 1, 0, -2)$, $(2, 3, 3, -2)$, $(1, 2, 3, 0)$ és $(1, 3, 6, 2)$ vektorok által kifeszített altér egy bázisát!

1M Sorvektorokból

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A bázis vektorai $(1, 1, 0, -2)$, $(0, 1, 3, 2)$.

2M Oszlopvektorokból

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A $(1, 1, 0, -2)$ és $(2, 3, 3, -2)$ vektorok bázist alkotnak.

Vektor felírása a bázisvektorok lineáris kombinációjaként

P Az $(1, 1, 0, -2)$, $(2, 3, 3, -2)$, $(1, 2, 3, 0)$ és $(1, 3, 6, 2)$ vektorok mindegyikét fejezzük ki az általuk kifeszített altér bázisvektorainak lineáris kombinációjaként!

M Oszlopvektorokkal, a redukált lécsős alakból:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A redukált lépcsős alakból látjuk, hogy például a harmadik oszlop a második és az első különbsége. Ezek alapján:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Vektor egy bázisra vonatkozó koordinátás alakja

- A redukált lépcsős alak nemzérus soraiból álló

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix azt mutatja, hogy az $\mathcal{B}$ bázisban e négy vektor koordinátái rendre

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

- A $\mathbf{v}$ vektor $\mathcal{B}$ bázisbeli koordinátás alakjára a $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ vagy a $(\mathbf{v})_{\mathcal{B}}$ alakot használjuk. Így írhatjuk azt is, hogy

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \text{ vagy egyszerűbben, hogy } [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Bázis-tétel

T **Bázis-tétel**

Ha a $\mathcal{V}$ vektortérnek van véges sok vektorból álló bázisa, akkor bármely két bázisa azonos számú vektorból áll.

B L! a $\mathcal{V}$ vektortérnek $\mathcal{B} = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \}$, és $\mathcal{C} = \{ \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r \}$ két bázisa, ahol $k < r$.
Mivel $\mathcal{B}$ bázis $\mathcal{V}$-ben, ezért a $\mathcal{C}$ bázis vektorai is kifejezhetők lineáris kombinációikként:

$$\mathbf{w}_i = a_{i1}\mathbf{v}_1 + a_{i2}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{ik}\mathbf{v}_k, \quad (i = 1, \ldots, r). \tag{1}$$

A $\mathcal{C}$ bázis vektorai lineárisan függetlenek, ezért a

$$c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \ldots + c_r\mathbf{w}_r = \mathbf{0} \tag{2}$$

egyenlőség csak a $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$ konstansokra áll fenn.

Az (1) egyenlőségeit a (2) egyenletbe helyettesítve

$$c_1(a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{12}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{1k}\mathbf{v}_k) + c_2(a_{21}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{2k}\mathbf{v}_k) + \\ \ldots + c_r(a_{r1}\mathbf{v}_1 + a_{r2}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{rk}\mathbf{v}_k) = \mathbf{0},$$

aminek $\mathcal{B}$ vektorai szerinti rendezése után kapjuk, hogy

$$(a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \ldots + a_{r1}c_r)\mathbf{v}_1 + (a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{r2}c_r)\mathbf{v}_2 + \\ \ldots + (a_{1k}c_1 + a_{2k}c_2 + \ldots + a_{rk}c_r)\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Ez azt jelenti, hogy a homogén lineáris

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \ldots + a_{r1}c_r &= 0 \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots + a_{r2}c_r &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{1k}c_1 + a_{2k}c_2 + \ldots + a_{rk}c_r &= 0 \end{aligned}$$

egyrsz-nek a $c_1 = c_2 = \ldots = c_r = 0$ az egyetlen megoldása.
Az egyenletek száma < ismeretlenek száma ($k < r$) ↯
Az indirekt feltevés helytelen, tehát a két bázis azonos méretű.

Dimenzió és rang

D **Dimenzió**

Ha a $\mathcal{V}$ vektortérnek van véges bázisa, akkor *dimenzióján* egy bázisának elemszámát értjük, és e számot $\dim \mathcal{V}$-vel jelöljük.

Á **Dimenzió = rang**

Egy mátrix rangja, sorterének dimenziója és oszlopterének dimenziója megegyezik. Ebből következőleg $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^\mathsf{T})$.

B A mátrix rangja megegyezik a lépcsős alakjában lévő nemzérus sorainak számával. E sorok a sortér bázisát adják.

- Az oszloptérről láttuk, hogy a főelemeknek megfelelő oszlopok az eredeti mátrixban lineárisan függetlenek és kifeszítik az oszlopteret.
- $\mathbf{A}$ sortere megegyezik $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ oszlopterével.

D Egy $\mathbb{R}^n$-beli vektorokból álló vektorrendszer rangján a vektorokból képzett mátrix rangját, vagy ami ezzel egyenlő, az általuk kifeszített altér dimenzióját értjük.

P Határozzuk meg az **A** mátrix sorterének és nullterének dimenzióját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

M Az **A** redukált lépcsős alakja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A mátrix rangja 2, így sorterének dimenziója 2. A nulltér dimenziója = az egyrsz megoldásterének dimenziójával, ami = a szabad változók számával, ez 3.

Mátrixok terei

m Az $\mathbb{R}^{m\times n}$, vagyis az $m \times n$-es mátrixok tekinthetők mn hosszú vektoroknak, vagyis $\mathbb{R}^{mn}$ elemeinek.

P Alteret alkotnak-e az $\mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixok terében a szimmetrikus mátrixok, és ha igen, adjuk meg egy bázisukat. Mennyi az altér dimenziója?

M Szimmetrikus mátrxokhoz tartozó vektorok összege és skalárszorosa olyan vektort ad, melyhez szimmetrikus mátrix tartozik, tehát alteret alkotnak.

\- A főátlóban egy 1-es, egyebütt 0 alakúak, valamint a főátló alatt és fölött szimmetrikus helyzetben egy 1-es, egyebütt 0 alakú mátrixok kifeszítik ezt az alteret.

\- Az altér dimenziója = bázis elemszáma = $\frac{n(n+1)}{2}$.

T **Dimenziótétel – rang-nullitási tétel**

Tetszőleges $\mathbb{F}$ test és bármely $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ mátrix esetén a sortér dimenziójának és a nulltér dimenziójának (más szóval a mátrix rangjának és nullitásának) összege n, azaz

$$\dim(\mathcal{S}(\mathbf{A})) + \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = n \quad (\mathrm{r}(\mathbf{A}) + \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = n).$$

B A mátrix sorterének dimenziója = a mátrix rangja = az $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ mátrixú egyenletrendszerben a kötött változók száma.

\- A redukált lépcsős alakból való származtatás következtében a nullteret kifeszítő minden megoldásvektorban az összes szabad változóhoz tartozó koordináta 0, azt az egyet kivéve, amelyikhez a vektor tartozik. Így viszont mindegyik vektor független a többitől, vagyis e vektorok függetlenek, és mivel kifeszítik a nullteret, számuk megadja a nulltér dimenzióját.

Alterek tulajdonságai és az egyenletrendszerek

A lineáris algebra alaptétele és a 4 kitüntetett altér

Vektorokra merőleges altér

P Határozzuk meg az összes olyan vektort $\mathbb{R}^4$-ben, mely merőleges a $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 2)$ és $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, -2, 1)$ vektorok mindegyikére!

M Olyan $\mathbf{x}$ vektort keresünk, melyre $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x} = 0$ és $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x} = 0$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

amiből $\mathbf{x} = (-s - 2t, (s - 3t)/2, s, t)$, azaz

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A megoldás tehát két vektor által kifeszített altér összes vektora.

A sortér és a nulltér merőlegessége

Á **A sortér és a nulltér merőlegessége**

A valós $\mathbf{A}$ mátrix sorterének bármely $\mathbf{s}$ vektora és nullterének tetszőleges $\mathbf{x}$ vektora merőleges egymásra, azaz $\mathbf{s} \cdot \mathbf{x} = 0$.

B A sortér minden vektora az $\mathbf{A}$ sorvektorainak valamely $c_1, \ldots, c_m$ skalárokkal vett lineáris kombinációja.

$$\begin{aligned}
\mathbf{s} \cdot \mathbf{x} &= (c_1\mathbf{a}_{1*} + c_2\mathbf{a}_{2*} + \cdots + c_m\mathbf{a}_{m*}) \cdot \mathbf{x} \\
&= c_1\mathbf{a}_{1*} \cdot \mathbf{x} + c_2\mathbf{a}_{2*} \cdot \mathbf{x} + \cdots + c_m\mathbf{a}_{m*} \cdot \mathbf{x} \\
&= c_1 0 + c_2 0 + \cdots + c_m 0 = 0.
\end{aligned}$$

Alterek merőlegessége

D

Merőleges alterek

Egy vektortér két altere merőleges, ha bárhogy választva egy vektort az egyik és a másik altérből, azok merőlegesek egymásra.

D

Altér merőlegese

A $\mathcal{V}$ vektortér egy $\mathcal{W}$ alterére merőleges vektorok alterét a $\mathcal{W}$ merőlegesének nevezzük és $\mathcal{W}^{\perp}$-pel jelöljük (amit olvashatunk „W merőlegesének” vagy „W perp”-nek).

D

Kiegészítő alterek

A $\mathcal{V}$ vektortér egy $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ altere kiegészítő alterek, ha $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$, és $\mathcal{V}$ minden vektora előáll egy $\mathcal{U}$- és egy $\mathcal{W}$-beli vektor összegeként.

T **A lineáris algebra alaptétele**

Minden valós mátrix sortere és nulltere merőleges kiegészítő alterei egymásnak.

B Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Láttuk, hogy a sortér merőleges kiegészítő altere a nulltér, azaz $\mathcal{S}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A})$.

- Ha $\mathbf{v} \in \mathcal{N}(A)^\perp$, akkor azt új sorként hozzárakva $\mathbf{A}$-hoz, a $\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{v}^\mathsf{T} \end{array}\right]$ együtthatómátrixú egyenletrendszernek ugyanaz lesz a megoldáshalmaza, vagyis $\mathcal{N}(\mathbf{B}) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$, tehát a dimenziótétel miatt az új sortér dimenziója is ugyanaz, mint a régié, azaz $\dim(\mathcal{S}(\mathbf{B})) = \dim(\mathcal{S}(\mathbf{A}))$.
- Mivel $\mathcal{S}(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{S}(\mathbf{B})$, így $\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \mathcal{S}(\mathbf{B})$, tehát $\mathbf{v} \in \mathcal{S}(\mathbf{A})$, azaz $\mathcal{N}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{S}(\mathbf{A})$.

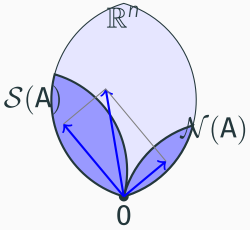
B folyt. (egyértelmű felbonthatóság merőleges összetevőkre)

- A sortér és a nulltér egy-egy bázisának uniója $\mathbb{R}^n$ egy bázisa.
- a sortér egy $\{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_k\}$ bázisa és a nulltér egy $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-k}\}$ bázisa együtt a tér bázisát adják ($n-k$ ld. dimenziótétel), ui.

$$\underbrace{c_1\mathbf{s}_1 + \cdots + c_r\mathbf{s}_r}_{\mathbf{c}} + \underbrace{d_1\mathbf{e}_1 + \cdots + d_{n-r}\mathbf{e}_{n-r}}_{\mathbf{d}} = \mathbf{0}$$

lineáris kombináció csak úgy állhat fenn, ha $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$ a két altér metszetében van, így azok mindketten a nullvektorok, és így $c_1 = \cdots = c_r = d_1 = \cdots = d_{n-r} = 0$.

K $\mathbb{R}^n$ minden vektora egyértelműen áll elő sortér- és nulltérbeli vektorok összegeként (hisz a fenti bázisbeli felbontásuk egyértelmű).



Valós mátrix négy kitüntetett altere

T

A négy kitüntetett altér

Tekintsük az $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixot. Akkor a következő állítások teljesülnek:

1. $\mathcal{S}(\mathsf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathsf{A})$, $\mathcal{O}(\mathsf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathsf{A}^\mathsf{T})$.
2. $\mathbb{R}^n$ minden vektora egyértelműen felbomlik egy $\mathcal{S}(\mathsf{A})$- és egy $\mathcal{N}(\mathsf{A})$-beli vektor összegére,
3. $\mathbb{R}^m$ minden vektora egyértelműen felbomlik egy $\mathcal{O}(\mathsf{A})$- és egy $\mathcal{N}(\mathsf{A}^\mathsf{T})$-beli vektor összegére.

A lineáris egyenletrendszer megoldásainak jellemzése

T **Lineáris egyenletrendszer megoldásai**

Minden valós együtthatós megoldható (konzisztens) lineáris egyenletrendszerre igazak a következő állítások:

1. egyetlen megoldása esik az együtthatómátrix sorterébe;
2. a sortérbe eső megoldás az összes megoldás közül a legkisebb abszolút értékű;
3. az összes megoldás előáll úgy, hogy a sortérbe eső megoldáshoz hozzáadjuk a homogén rész vmely megoldását.

B homogén lineáris egyenletrendszerekre semmitmondó, mert csak a nullvektor esik a sortérbe.

A lineáris egyenletrendszer megoldásainak jellemzése 2

1 Tfh $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{S}(\mathbf{A})$ két megoldása az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ egyenletrendszernek. $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = b_i$, így $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x}_1 = b_i$ és $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x}_2 = b_i$ $(i = 1, 2, \ldots m)$, így $\mathbf{a}_{i*} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = b_i - b_i = 0$, vagyis $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$, metszete a sortérrel a $\mathbf{0}$-vektor, azaz $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, vagyis $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Legyen az $\mathbf{x}$ mo. felbontása sortérbeli és nulltérbeli vektor összegére

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\mathcal{S}} + \mathbf{x}_{\mathcal{N}}.$$

E megoldásvektort beírva az i-edik egyenletbe kapjuk, hogy

$$b_i = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a}_{i*} \cdot (\mathbf{x}_{\mathcal{S}} + \mathbf{x}_{\mathcal{N}}) = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x}_{\mathcal{S}} + \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x}_{\mathcal{S}}.$$

Eszerint bármely megoldás sortérbeli összetevője is megoldása az egyenletrendszernek!

A lineáris egyenletrendszer megoldásainak jellemzése 3

3 Egyúttal beláttuk, hogy az összes megoldás e sortérbeli megoldás és a homogén egy megoldásának összege. Az előző egyenlőségekből az is kiolvasható, hogy az $\mathsf{x}_{\mathcal{S}}$ megoldáshoz bármely nulltérbeli vektort adva az egyenletrendszer egy megoldását kapjuk.

2 $\mathsf{x}_{\mathcal{S}} \perp \mathsf{x}_{\mathcal{N}}$, így a Pithagorász-tétel szerint

$$\mathsf{x}^2 = \mathsf{x}_{\mathcal{S}}^2 + \mathsf{x}_{\mathcal{N}}^2 \geq \mathsf{x}_{\mathcal{S}}^2, \text{ azaz } |\mathsf{x}| \geq |\mathsf{x}_{\mathcal{S}}|.$$

A sortérbe eső megoldás meghatározása

P Oldjuk meg az $x + 4y + 8z + 12w = 450$ egyenletrendszert úgy, hogy a partikuláris megoldás minimális abszolút értékű legyen!

M A sorteret az $(1, 4, 8, 12)$ vektor feszíti ki, ennek egy skalárszorosát keressük.
Mivel $1^2 + 4^2 + 8^2 + 12^2 = 15^2 = 225$, ezért a sortérbe eső egyetlen megoldás $(x, y, z, w) = 2 \cdot (1, 4, 8, 12) = (2, 8, 16, 24)$.
A homogén egyenletrendszer összes megoldását meghatározva majd hozzáadva kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 16 \\ 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

az összes megoldás.

A sortérbe eső megoldás meghatározása 2

P Állítsuk elő a következő egyenletrendszer összes megoldását a sortérbe eső egyetlen megoldás segítségével.

$$x + y + z + w = 3$$
$$x + y - z - w = 1$$

M A bővített mátrix és redukált lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

\- Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - s \\ s \\ 1 - t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

A sortérbe eső megoldás meghatározása 3

- A nullteret a $(-1,1,0,0)$ és a $(0,0,-1,1)$ vektorok feszítik ki. A sortérbe eső megoldásvektor ezekre merőleges:

$$\begin{aligned} -x+y \qquad\qquad &= 0 \\ -z+w &= 0 \end{aligned}$$

- Ezekkel kibővítve az egyenletrendszert, majd megoldva

$$\left[\begin{array}{rrrrr} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{rrrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right]$$

tehát a sortérbe eső mo.: $(1,1,1/2,1/2)$, az összes mo.:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$