



BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM



Bevezetés az algebrába 1

BMETE92AX23



Egyenletrendszerek megoldása

H406 – 2017-10-25



Wetttl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK

Az $\mathbb{R}^n$ vektortér

D Halmaz hatványa

Egy tetszőleges H halmaz elemeiből képzett rendezett elem- n -esek halmazát H^n -nel jelöljük.

- $H = \{0,1\}$ elemeiből képzett rendezett elemhármakok:

$$H^3 = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}.$$

- Sík pontjai és vektorai $\mathbb{R}^2$, téré $\mathbb{R}^3$
- Halmaz hatványa $\neq$ hatványhalmaz (halmaz összes részhalmazának halmaza)

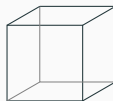
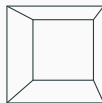
- 4-dimenziós kocka

1D: _____

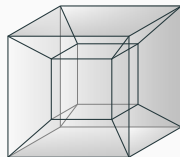
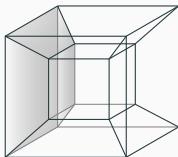
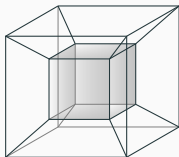
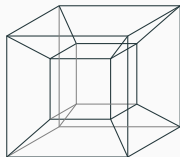
2D:



3D:



4D:



Az $\mathbb{R}^n$ vektortér

Vektorműveletek $\mathbb{R}^n$ -ben

D Vektorműveletek definíciói

Legyen $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ az $\mathbb{R}^n$ két tetszőleges vektora. Két vektor összegén és egy vektor c -szeresén az

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$$

$$c\mathbf{u} = (cu_1, cu_2, \dots, cu_n).$$

$\mathbb{R}^n$ -beli vektorokat értjük.

Az $\mathbb{R}^n$ vektortér alaptulajdonságai

T Az összeadás és skalárral szorzás tulajdonságai

! $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges, $c, d \in \mathbb{R}$, jelölje $\mathbf{0}$ a $(0, 0, \dots, 0)$ vektort. Ekkor

A1	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$	fölcserélhető (kommutatív)
A2	$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$	csoportosítható (asszociatív)
A3	$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$	zérusvektor
M1	$c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$	a két szorzás kompatibilis
M2	$0\mathbf{u} = \mathbf{0}$	szorzás 0-val
M3	$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$	szorzás 1-gyel
D1	$c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$	disztributív
D2	$(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$	disztributív

B Mindegyik visszavezethető a valós számok algebrai tulajdonságaira. Pl: $A1$ bizonyítása:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \\ &= (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \dots, v_n + u_n) \\ &= \mathbf{v} + \mathbf{u}.\end{aligned}$$

m $\mathbf{u}$ ellentettjén a $-\mathbf{u}$ -val jelölt vektort értjük, melyet $\mathbf{u}$ -hoz adva a nullvektort kapjuk: $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0} \rightsquigarrow$

$$-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u} = (-u_1, -u_2, \dots, -u_n) \rightsquigarrow \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}).$$

- A skalár hátra is írható: $c\mathbf{u} = \mathbf{u}c$, $\mathbf{u}/c = \frac{1}{c}\mathbf{u}$
- $A1-A3$ az összeadás (addíció), $M1-M3$ a szorzás (multiplikáció), $D1-D2$ a két művelet közös disztributív tulajdonságait írják le.
- A vektortér általános fogalma erre épül, mivel sok matematikai objektum rendelkezik e tulajdonságokkal. Például a folytonos valós függvények, a differenciálható valós függvények, a polinomok, a legfőbb 3-adfokú polinomok,...

Vektorok lineáris függetlensége

D Lineáris kombináció

Vektorok **lineáris kombinációján** skalárszorosaik összegét értjük. Konkrétan: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ egy lineáris kombinációja a $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k$ vektor, ahol $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok.

D Vektorok lineáris függetlensége

Azt mondjuk, hogy egy $\mathbf{v}$ vektor **lineárisan független** a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ ($k \geq 1$) vektoroktól, ha $\mathbf{v}$ nem fejezhető ki e vektorok lineáris kombinációjaként. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ ($k \geq 2$) vektorok **lineárisan függetlenek** ha e vektorok egyike sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként. Az egyetlen vektorból álló vektorrendszert lineárisan függetlennek tekintjük, ha a vektor nem a zérusvektor.

D Vektorok lineáris összefüggősége

Egy vektorrendszer **lineárisan összefüggő**, ha nem független. (≥ 2 vektorból álló vektorrendszer lineárisan öf., ha legalább egyikük kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként [**lineárisan függ** a többitől], az egy vektorból álló vektorrendszer lin. öf., ha a zérusvektorból áll.)

D Generátorrendszer

Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok **generátorrendszert** alkotnak, ha a vektortér minden vektora előáll ezek lineáris kombinációjaként.

D Bázis

Egy vektortér független vektorokból álló generátorrendszerét **bázisnak** nevezzük.

A standard bázis

D Standard bázis

Az $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ vektorokból álló halmazt az $\mathbb{R}^n$ vektortér **standard bázisának** nevezzük.

T A standard bázis bázis

Az $\mathbb{R}^n$ -beli $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ vektorok bázist alkotnak.

B **Függetlenek:** $\mathbf{e}_1$ nem áll elő a többi vektor lineáris kombinációjaként, hisz azok első koordinátája 0, így bármely lineáris kombinációjukban is 0 az első koordináta, $\mathbf{e}_1$ -ben pedig 1. Hasonlóan a többire.

Generátorrendszer: egy tetszőleges $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ vektorra

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + \dots + v_n \mathbf{e}_n,$$

tehát minden vektor előáll az $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ lin. komb.-jaként.

T Lineáris függetlenség

Tetszőleges $\mathbb{R}^n$ -beli $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ vektorrendszerre az alábbi két állítás ekvivalens:

1. $\mathcal{A}$ lineárisan független.
2. A **zérusvektor csak egyféleképp** – a triviális módon – áll elő $\mathcal{A}$ lineáris kombinációjaként. Másként fogalmazva, a $c_1, c_2, \dots, c_k$ skalárokkal vett lineáris kombináció csak akkor lehet a nullvektor, azaz

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

csak akkor állhat fenn, ha $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$.

B Tfh a vektorrendszer csak egyetlen **a** vektorból áll.

Ekkor a tétel azt állítja, hogy e vektor pontosan akkor lineáris független, azaz pontosan akkor nem a nullvektor, ha a $c\mathbf{a} = \mathbf{0}$ csak $c = 0$ esetén állhat fenn. Ez nyilvánvaló ✓

Tfh a vektorrendszer legalább két vektorból áll.

Kontrapozícióval bizonyítunk: $A \Rightarrow B$ (ha A , akkor B) állítást a vele ekvivalens $\neg B \Rightarrow \neg A$ (ha nem B , akkor nem A) állítással.

($\Leftarrow$) Megmutatjuk, hogy ha $c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ csak

$c_1 = \dots = c_k = 0$ esetén állhat fenn, akkor semelyik $\mathbf{a}_i$ sem fejezhető ki a többi lin kombjaként ($i = 1, \dots, k$).

Tfh valamelyik – pl. a $\mathbf{a}_1$ – kifejezhető a többi lin kombjaként:

$$\mathbf{a}_1 = d_2\mathbf{a}_2 + \dots + d_k\mathbf{a}_k,$$

vagyis átrendezés után

$$(-1)\mathbf{a}_1 + d_2\mathbf{a}_2 + \dots + d_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

a $\mathbf{0}$ -t előállítottuk nemtrivi lin kombként.

($\Rightarrow$) Megmutatjuk, hogy ha a vektorrendszer egyik vektora sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként, akkor egyedül csak a csupa zérus együtthatójú lineáris kombinációja lehet zérusvektor.

Ismét kontrapozícióval bizonyítunk: ha van olyan – nem csupa 0 együtthatójú – lineáris kombináció, mely a nullvektorral egyenlő, azaz

$$c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \dots + c_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0},$$

de valamelyik együttható – például a c_1 – nem 0, akkor $\mathbf{a}_1$ kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{c_2}{c_1} \mathbf{a}_2 - \dots - \frac{c_k}{c_1} \mathbf{a}_k,$$

ami bizonyítja az állítást.

Skaláris szorzás

D Skaláris szorzás $\mathbb{R}^n$ -ben

Legyen $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ az $\mathbb{R}^n$ tér két tetszőleges vektora. Skaláris szorzatukon a következő kifejezést értjük:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n.$$

P Legyen $\mathbf{u} = (2, 3, 4, 14)$ és $\mathbf{w} = (0, 3, 6, -2)$. Számítsuk ki $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ és $\sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$ értékét!

M $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 14 \cdot (-2) = 5$.

- $\sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 14 \cdot 14} = \sqrt{225} = 15$.

A skaláris szorzás alaptulajdonságai

T A skaláris szorzás alaptulajdonságai

Legyen $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ az $\mathbb{R}^n$ három tetszőleges vektora, és legyen c egy tetszőleges valós. Ekkor

- | | | |
|----|--|----------------------------|
| S1 | $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ | kommutatív |
| S2 | $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ | disztributív |
| S3 | $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ | kompatibilis a két szorzás |
| S4 | $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ és $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}$ | pozitív definit |

B A valósok tulajdonságaiból könnyen adódnak, pl. S1-et:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n \\ &= v_1u_1 + v_2u_2 + \dots + v_nu_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}.\end{aligned}$$

m E négy tulajdonság vezet majd az euklideszi tér fogalmához.

Az $\mathbb{R}^n$ vektortér

Lineáris alakzatok egyenletei

		Explicit vektoregyenlet	Implicit egyenlet(rendszer)
Síkban	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$Ax + By = C$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y = C_1$ $A_2x + B_2y = C_2$
Térben	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	$Ax + By + Cz = D$
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ $A_3x + B_3y + C_3z = D_3$
$\mathbb{R}^n$ -ben	hipersík	???	$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$
	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	???
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	???
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	???

Egyenletrendszerek

Egyenletrendszerek

Alapfogalmak

Lineáris egyenlet

D Az

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \quad (1)$$

alakra hozható egyenletet az $x_1, x_2, \dots, x_n$ ismeretlenekben **lineáris egyenletnek** nevezzük, ahol $a_1, a_2, \dots$ és a_n , valamint b konstansok. Az $a_1, a_2, \dots$ és a_n konstansokat az egyenlet **együtthatóinak**, b -t az egyenlet **konstans tagjának** nevezzük.

P Lineárisak-e az x, y , illetve az x, y és z változóiban?

- $xz - y = 0, x + 2y = 3^z,$
- $x \sin z + y \cos z + y = z^2, 0 = 2,$
- $x = y, x = 3 - y + 2z, x - y + 0z = 0, x + y - 2z = 3$
- $\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 2 = 0, x + y + 2z = 0?$

Lineáris egyenletrendszer

- D **Lineáris egyenletrendszer**en ugyanazokban a változóiban lineáris egyenletek egy véges halmazát értjük. Általános alakja:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array} \quad (*)$$

ahol $x_1, x_2, \dots, x_n$ az ismeretlenek, a_{ij} együttható, b_i konstans tag. Ha mindegyik egyenlet konstans tagja 0, a lineáris egyenletrendszer **homogén**, egyébként **inhomogén**.

- Lineáris az x és y változóiban:

$$\begin{array}{ccccccc} ax + y = 2a & 3x - y = 0 & & & & & \\ x - \frac{1}{a}y = 0 & -x + 2y = 0 & x + y = 1 & & & & \\ & 0 = 0 & 0 = 2 & x + y = 1 & & & \end{array}$$

Lineáris egyenletrendszer megoldása

- D** Azt mondjuk, hogy a rendezett $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ szám- n -es (vagy vektor) **megoldása** (**megoldásvektora**) a $(*)$ ersz-nek, ha megoldása minden egyenletnek (minden egyenletet kielégít az $x_1 = u_1, x_2 = u_2, \dots, x_n = u_n$ helyettesítés). Az összes megoldás halmaza a **megoldáshalmaz**. Egy ersz **konzisztens** (vagy **megoldható**), ha megoldáshalmaza nem üres. Ellenkező esetben az ersz **inkonzisztens** (**nem megoldható**).
- m** **Túlhatározott**, ha az egyenletek száma nagyobb az ismeretlenekénél, és **alulhatározott**, ha kisebb.
- P** Tekintsük az alábbi három egyenletrendszert:

$$\begin{array}{lll} x + y = 3 & x + y = 3 & x = 2 \\ x + 2y = 4 & y = 1 & y = 1 \end{array} \quad (2)$$

Mindháromnak $(x, y) = (2, 1)$ az egyetlen megoldása.

Ekvivalens lineáris egyenletrendszerek

- D Azonos ismeretlenekkel felírt két egyenletrendszert **ekvivalensnek** nevezünk, ha megoldásaik halmaza azonos.

T Ekvivalens átalakítások

Egyenletrendszert ekvivalens egyenletrendszerbe visznek át:

1. két egyenlet felcserélése;
2. egy egyenlet nem nulla számmal való szorzása;
3. egy egyenlet konstansszorosának egy másikhoz adása.
4. egy $0 = 0$ alakú egyenlet elhagyása (csökkenti az egyenletek számát!)

Mátrixok

- Fejléc nélküli táblázat: **mátrix** (elemei azonos algebrai struktúrából valók).
- Általános alakja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad \mathbf{A} = [a_{ij}]$$

- az első index jelöli a sor, a második az oszlop számát
- Az $\mathbf{A}$ mátrix i -edik sorára az $(\mathbf{A})_{i*}$, j -edik oszlopára az $\mathbf{a}_j$ vagy az $(\mathbf{A})_{*j}$, elemére az $(\mathbf{A})_{ij}$ jelölés is használatos.

Egyenletrendszer együtthatómátrixa és (bővített) mátrixa

- D egyenletrendszer **együtthatómátrixa** az egyenletek együtthatóit, míg **mátrixa** (**bővített** mátrixa) az egyenletek együtthatóit és konstans tagjait tartalmazza.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right] .$$

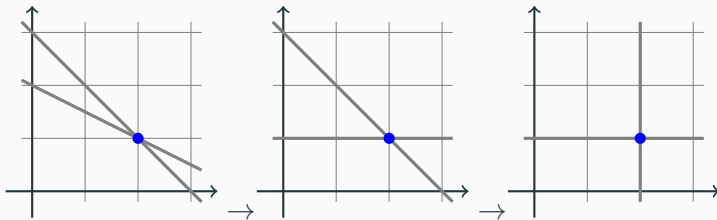
Egyenletrendszerek

Két geometriai modell

Sormodell 2 ismeretlennel: egyenesek metszete

P Egy egyenletrendszer és megoldása:

$$\begin{array}{lcl} x + y = 3 & \Rightarrow & x + y = 3 \\ x + 2y = 4 & \Rightarrow & y = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array}$$



Sormodell 2 ismeretlennel: egyenesek metszete

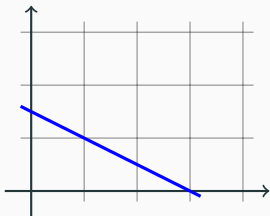
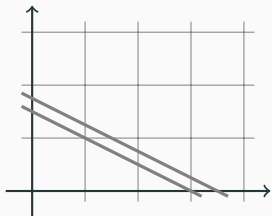
P Két másik egyenlet:

$$x + 2y = 3$$

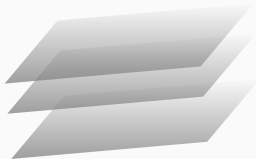
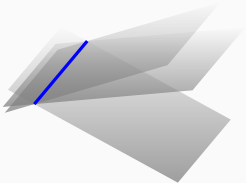
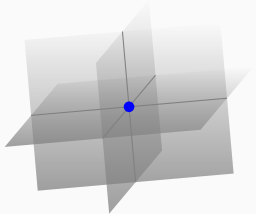
$$x + 2y = 3$$

$$2x + 4y = 7$$

$$2x + 4y = 6$$



Sormodell 3 ismeretlennel: síkok metszete



Á Sormodell: hipersíkok metszete

Ha egy $\mathbb{F}$ fölötti n -ismeretlenes lineáris egyenletrendszer m olyan egyenletből áll, melyek egyikének bal oldalán sem 0 minden együttható, akkor az egyenletrendszer megoldása a nekik megfelelő m hipersík közös része $\mathbb{F}^n$ -ben.

- Az i -edik egyenlet:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

- Skalárszorzat alakban:

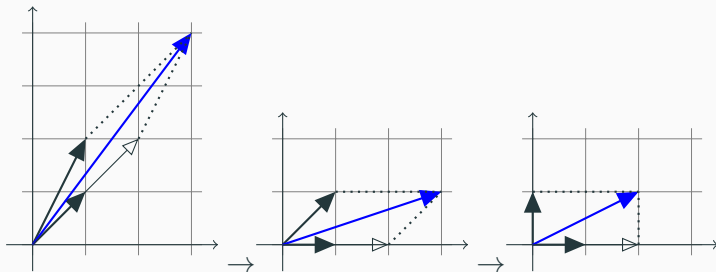
$$\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = b_i.$$

- Homogén esetben: $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = 0$, azaz a megoldásvektor merőleges az $\mathbf{a}_{i*}$ vektorok mindegyikére.

Oszlopmodell, 2 egyenlet: síkvektorok lineáris kombinációja

P Egy egyenletrendszer és megoldása:

$$\begin{array}{rcl} x + y = 3 & \Rightarrow & x + y = 3 \\ x + 2y = 4 & \Rightarrow & y = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x & = & 2 \\ y & = & 1 \end{array}$$

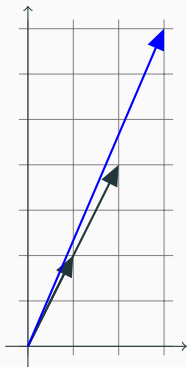


Oszlopmodell, 2 egyenlet: síkvektorok lineáris kombinációja

P Két másik egyenlet:

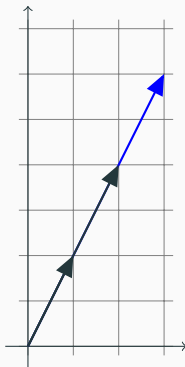
$$x + 2y = 3$$

$$2x + 4y = 7$$



$$x + 2y = 3$$

$$2x + 4y = 6$$



Á

Oszlopmodell

A (*) egyenletrendszer a következő vektoregyenlettel ekvivalens:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \dots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

- E modell szerint egy egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha az együtthatómátrix oszlopvektorainak összes lineáris kombinációjából álló halmazban a konstans tagokból álló vektor is szerepel.

Egyenletrendszerek

Kiküszöbölés: Gauss-módszer

Elemi sorműveletek

- Egy mátrix sorain végzett alábbi műveleteket **elemi sorműveleteknek** nevezzük:
 - **Sorcsere:** két sor cseréje ($S_i \leftrightarrow S_j$: az i -edik és a j -edik sorok cseréje.)
 - **Beszorzás:** egy sor beszorzása egy nemnulla számmal (cS_i : az i -edik sor beszorzása c -vel)
 - **Hozzáadás:** egy sorhoz egy másik sor konstansszorosának hozzáadása ($S_i + cS_j$: a j -edik sor c -szeresének az i -edik sorhoz adása).
- Hasonlóan definiálhatók az elemi oszlopműveletek ($O_i \leftrightarrow O_j$, cO_i , $O_i + cO_j$).

D Lépcsős alak

Egy mátrix (sor)lépcsős alakú, ha kielégíti a következő két feltételt:

- a csupa 0-ból álló sorok (ha egyáltalán vannak) a mátrix utolsó sorai;
- bármely két egymás után következő nem-0 sorban az alsó sor elején (legalább eggyel) több 0 van, mint a fölötte lévő sor elején.

A nemnulla sorok első zérustól különböző elemét főelemnek, vezéremnek vagy pivotelemnek hívjuk. Egy főelem oszlopának főoszlop vagy bázisoszlop a neve.

Gauss-módszer

- A következő mátrixok lépcsős alakúak:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- A Gauss-módszer, -kiküszöbölés vagy -elimináció: lineáris egyenletrendszer megoldása lépcsős alakra hozással (oszloponként haladva).

Gauss-módszer – egy megoldás

- Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-módszerrel:

$$\begin{array}{rcl} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 3z = 4 \\ x + 2y + z = 5 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{S_2 - 2S_1 \\ S_3 - S_1 \\ S_4 - S_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{S_4 - \frac{1}{2}S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{S_4 - \frac{3}{2}S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow$$

$$x + y + 2z = 0 \quad x = 1$$

$$2y + z = 4 \longrightarrow y = 3 \longrightarrow (x, y, z) = (1, 3, -2)$$

$$-z = 2 \quad z = -2$$

Gauss-módszer – végtelen sok megoldás

- Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-módszerrel:

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{S_2 - S_1 \\ S_3 - 3S_1}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{S_3 - 2S_2} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_3 + x_4 = -1 \end{array} \end{array}$$

- Köött változók: x_1 és x_3 , szabad változók: x_2, x_4, x_5 , értékük tetszőleges: pl. $x_2 = s, x_4 = t, x_5 = u$.
- $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u, s, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, t, u)$.

Gauss-módszer – végtelen sok megoldás

- Írjuk fel oszlopok lineáris kombinációjaként!

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

F Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert!

$$x + 2y + 3z + 4w = 1$$

$$2x + 4y + 5z + 6w = 3$$

$$x + 2y + z = 3$$

Gauss-módszer – homogén lineáris egyenletrendszer

- Oldjuk meg az előző ersz-hez tartozó homogén ersz-t.

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 = 0 \end{array} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lépcsős alakra hozás

T Lépcsős alakra hozás

Bármely valós (vagy bármely test feletti) mátrix elemi sorműveletekkel **lépcsős** alakra hozható.

B Az algoritmus:

1. nulloszlop(ok) letakarása a mátrix bal oldalán
2. sorcsere után $a_{11} \neq 0$
3. $S_j - \frac{a_{j1}}{a_{11}} S_1$ után a_{11} alatt minden elem 0.
4. takarjuk le az első oszlopot és az első sort, és ha nincs több sor, VÉGE, ha van, menjünk az 1. pontra.

Egyenletrendszerek

Kiküszöbölés: Gauss–Jordan-módszer

Redukált lépcsős alak (rref: reduced row echelon form)

D Redukált lépcsős alak

Egy mátrix **redukált lépcsős alakú**, ha

1. lépcsős alakú;
2. minden főelem egyenlő 1-gyel;
3. minden főelem oszlopában a főelemen kívüli elemek 0-k;

- Vezéregyes
- A következő mátrixok redukált lépcsős alakúak:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Redukált lépcsős alakra hozás

- m Algoritmus: oszloponként haladva először **a vezérelemek alatt**, majd utána az **utolsó oszloptól kezdve fölttük** eliminálunk!

P Hozzuk redukált lépcsős alakra az $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ mátrixot!

$$\text{M1} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{S_2 - S_1 \\ S_3 - 2S_1}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}S_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{S_3 + 4S_2 \\ S_1 - 3S_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{M2} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{S_2 - S_1 \\ S_3 - 2S_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}S_2 \\ S_1 - S_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gauss-Jordan-módszer

$$\begin{array}{l}
 - \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{\dots} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{array}{c} 1/2 S_2 \\ -S_3 \end{array}]{\begin{array}{c} 1/2 S_2 \\ -S_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{array}{c} S_2 - \frac{1}{2} S_3 \\ S_1 - 2S_3 \end{array}]{\begin{array}{c} S_2 - \frac{1}{2} S_3 \\ S_1 - 2S_3 \end{array}} \\
 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{S_1 - S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 3 \\ z & = & -2 \end{array}
 \end{array}$$

- Tehát az egyenletrendszer egyetlen megoldása $(x, y, z) = (1, 3, -2)$.

Gauss-Jordan-módszer – végtelen sok megoldás

$$- \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\dots} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[S_1 - S_2]{1/2 S_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_4 + x_5 = \frac{3}{2} \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 = -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$- (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u, s, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, t, u \right),$$

$$- \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A redukált lépcsős alak egyértelműsége

T A redukált lépcsős alak egyértelmű

Egy test elemeiből képzett minden mátrix redukált lépcsős alakra hozható. Ez az alak egyértelmű.

B Indirekt: **R** és **S** két redukált lépcsős alak. Válasszuk ki az első oszlopot, melyben különböznek, és az összes megelőző bázisoszlopot:

$$\hat{R} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & r_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{vagy} \quad \hat{R} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right]$$

A redukált lépcsős alak egyértelműsége 2.

$$\hat{\mathbf{S}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & s_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array} \right] \quad \text{vagy} \quad \hat{\mathbf{S}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array} \right]$$

- Mivel oszlopok kihagyása nem változtat a sorokvivalencián, ezért az $\hat{\mathbf{R}}$ és $\hat{\mathbf{S}}$ mátrixok ekvivalensek, azaz a hozzájuk tartozó két egyenletrendszernek ugyanaz a megoldása
 - $\rightsquigarrow$ vagy minden $i = 1, \dots, k$ indexre $r_i = s_i$, vagy egyik egyenletrendszer sem oldható meg, tehát $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{S}}$, ellentmondás.
- m** **rref(A)** az a függvény, mely egy $m \times n$ -es mátrixhoz a redukált lépcsős alakjából a zérussorok elhagyásával kapott mátrixot rendeli.

Egyenletrendszerek

Példák

Szimultán egyenletrendszerek

$$\begin{array}{lll} x + y + z = 3 & u + v + w = 3 & r + s + t = 0 \\ - \quad 2x + 3y + 2z = 7 & 2u + 3v + 2w = 7 & 2r + 3s + 2t = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 6 & 2u + 2v + 3w = 7 & 2r + 2s + 3t = 1 \end{array}$$

$$- \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 7 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 7 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{S_2 - 2S_1 \\ S_3 - 2S_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{S_1 - S_2 \\ S_1 - S_3}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

- Ebből leolvasható mindhárom egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Egyenletrendszer paraméterrel

- P Az a paraméter mely értékei mellett van az alábbi egyenletrendszernek 0, 1, illetve ∞ sok megoldása?

$$\begin{array}{l} - \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & a^2 \end{array} \right] \xrightarrow[S_3 - aS_1]{S_2 - S_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & a^2-a \end{array} \right] \xrightarrow{S_3 + S_2} \end{array}$$

- $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2) & (a+1)(a-1) \end{array} \right]$$
- $a = 1$: az egyenletrendszer az $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Ennek megoldása: $(x_1, x_2, x_3) = (1 - s - t, s, t)$, azaz

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $a = -2$: az utolsó egyenlet $0 = 3$, az egyenletrendszer nem konzisztens!

Lineáris kombináció meghatározása

- P** Állítsuk elő az $\mathbf{u} = (-1, 2, -3, 6)$ és $\mathbf{w} = (-1, 2, -3, 4)$ vektort (ha lehet) a $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, -2, 1)$ és $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 1)$ lineáris kombinációjaként!
- M** $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}$ ($= \mathbf{w}$) megoldását keressük. A szimultán egyenletrendszer mátrixa $[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3 \mid \mathbf{u} \ \mathbf{w}]$.

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 & 4 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

amiből $(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, -2)$, és $\mathbf{w}$ valóban nem áll elő lineáris kombinációként, mert a $\mathbf{w}$ -t tartalmazó egyenletrendszer inkonzisztens.

Lineáris függetlenség eldöntése

Á L! $A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_k]$! Ekvivalens állítások:

- az $a_1, a_2, \dots, a_k$ vektorok lineárisan függetlenek;
- az A együtthatómátrixú homogén lineáris egyrsz-nek a triviálison kívül nincs más megoldása;
- A lépcsős alakjának $\forall$ oszlopában van főelem, azaz $r(A) = k$.

P Mutassuk meg, hogy a 4-dimenziós $(1, 2, 3, 4)$, $(0, 1, 0, 1)$ és $(1, 1, 1, 0)$ vektorok lineárisan függetlenek.

M A vektorokból képzett mátrix és lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eszerint a homogén lineáris egyrsz-nek csak egyetlen megoldása van, azaz az oszlopvektorok lineárisan függetlenek.