Vektorok

1. Melyek egyenlőek az alábbi vektorok közül? *(a)* $(1,2,0)$, *(b)* az $(1,0,1)$ pontból a $(2,2,1)$ pontba mutató vektor, *(c)* $(-2,1,1)\times(-2,1,2)$, *(d)* $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\end{bmatrix}$, *(e)* $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$.

2. Írjuk fel az $x+y+2z=0$ és az $x-y+z=0$ egyenletű síkok metszésvonalának explicit vektoregyenletét és egyenletrendszerét! Adjunk megoldást egyenletrendszerek megoldása segítségével és adjunk egy másikat vektori szorzás segítségével!

3. Írjuk fel az $x+y+2z=1$ és az $x-y+z=2$ egyenletű síkok metszésvonalának explicit vektoregyenletét és egyenletrendszerét!

4. Határozzuk meg az $(1,1,0)$, $(-1,1,2)$ és $(2,3,4)$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát és orientációját!

5. Határozzuk meg az $(3,5)$ és a $(2,3)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területét és orientációját!

6. Írjuk fel a $(2,3)$ ponton átmenő, $(3,1)$ irányvektorú egyenes explicit és implicit vektoregyenletét és egyenlet(rendszer)eit!

7. Írjuk fel a $(2,3)$ ponton átmenő, $(3,1)$ normálvektorú egyenes explicit és implicit vektoregyenletét!

8. Írjuk fel a $(2,3,0)$ ponton átmenő, $(3,1,1)$ irányvektorú egyenes explicit és implicit vektoregyenletét és egyenlet(rendszer)eit!

9. Írjuk fel a $(2,3,0)$, $(3,4,1)$ és $(3,1,1)$ pontokon átmenő sík explicit és implicit vektoregyenletét és egyenlet(rendszer)eit!

10. Melyek igazak, melyek hamisak az $\mathbb{R}^3$ térben?
    a) Ha három vektor a térben lineárisan összefüggő, akkor bármelyikük a másik kettő lineáris kombinációja.
    b) Megadható a térben három vektor, hogy egyikük sem lineárisan független a többitől.
    c) Megadható a térben három vektor, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$, hogy $\mathbf{a}$ független a $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektoroktól, de $\mathbf{b}$ nem független az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ vektoroktól.
    d) A tér bármely legalább 4 vektora lineárisan összefüggő.
    e) Megadható a térben 5 olyan vektor, melyek közül pontosan kettőre igaz az, hogy független a többi négy vektortól.

Az $\mathbb{R}^n$ vektortér

11. Melyek igazak, melyek hamisak?
    a) Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok hajlásszöge α, akkor $\mathbf{a}$ és $-\mathbf{b}$ hajlásszöge $\pi-\alpha$.
    b) Ha A és B két adott pont, akkor az $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ vektor független az O megválasztásától.
    c) Ha A és B két adott pont, akkor az $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ vektor független az O megválasztásától.
    d) Ha két vektor egyirányú, akkor egyikük a másik skalárszorosa.
    e) Ha két vektor egyike a másik skalárszorosa, akkor egyirányúak.
    f) Ha két vektor egyike a másik skalárszorosa, akkor párhuzamosak.

12. Határozzuk meg az alábbi vektorok összegét, skalárszorzatát, és hajlásszögét!
    a) $\mathbf{u}=(1,1,2,2)$, $\mathbf{v}=(0,1,2,0)$
    b) $\mathbf{x}=(1,1,2,2)$, $\mathbf{y}=(0,-1,-2,0)$
    c) $\mathbf{u}=(1,0,1,0,\dots)$, $\mathbf{v}=(1,-1,1,-1,\dots)\in\mathbb{R}^n$, n páros

13. Bontsuk fel a $\mathbf{b}$ vektort $\mathbf{a}$-val párhuzamos és rá merőleges összetevőkre. Határozzuk meg a $\mathbf{b}$ vektor $\mathbf{a}$ egyenesére eső merőleges vetületének hosszát!
    a) $\mathbf{a}=(1,2,-2)$, $\mathbf{b}=(4,6,-1)$,
    b) $\mathbf{a}=(2,3,6)$, $\mathbf{b}=(5,-3,8)$,
    c) $\mathbf{a}=(1,1,1,1)$, $\mathbf{b}=(1,4,0,3)$,
    d) $\mathbf{a}=(1,2,2,4)$, $\mathbf{b}=(4,3,6,7)$.

14. Legyenek $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$.
    a) Mit állíthatunk a vektorokról, ha $|\mathbf{u}|=3$, $|\mathbf{v}|=2$ és $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=7$?
    b) Mennyi $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, ha $|\mathbf{u}|=2$, $|\mathbf{v}|=3$ és $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|=6$?
    c) Mennyi $d(\mathbf{u},\mathbf{v})$ értéke, ha $|\mathbf{u}|=8$, $|\mathbf{v}|=15$, és $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0$?

Testek

15. Alakítsuk át az alábbi komplex számokat algebraiból trigonometriaiba vagy trigonometriai alakból algebraiba. *a)* $-\mathrm{i}$, *b)* -1, *c)* $1-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}$, *d)* $4(\cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6})$.

16. Legyen $z=3+4\mathrm{i}$, $w=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$. Végezzük el az alábbi műveleteket! *a)* $z+2w$, *b)* zw, *c)* z/w, *d)* w/z, *e)* w^{10}, *f)* $\sqrt[5]{w}$.

17. Végezzük el az alábbi műveleteket a megadott struktúrában:
    a) $4^{100}\cdot 3^2+2\cdot(2-4)$, $\mathbb{Z}_5$,
    b) $(1,0,0,1,1)\cdot(1,1,1,1,0)$, $\mathbb{Z}_2^5$.

18. Jelölje $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ az összes $a+b\sqrt{2}$ alakú számok halmazát, ahol a és b racionális számok, azaz $a,b\in\mathbb{Q}$. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ a szokásos összeadás és szorzás műveletekkel testet alkot.

Egyenletrendszerek

19. Melyek igazak, melyek hamisak? Válaszunkat indokoljuk!
    a) Az $Ax+By=C$ lehet egy sík egyenlete!
    b) Az $Ax+By=C$ egyenletű sík normálvektora (A,B,C).
    c) Az $x+y=0$, $z+w=0$ egyenletrendszer egy $\mathbb{R}^4$-beli sík egyenletrendszere.
    d) Az $x=0$, $y=0$ egyenletrendszer egy $\mathbb{R}^4$-beli sík egyenletrendszere.
    e) Az $x_1+3x_3+5x_5=2$ egyenletű $\mathbb{R}^5$-beli hipersík normálvektora $(1,0,3,0,5)$.
    f) $\mathbb{R}^4$-ben van olyan két sík, melyek egyetlen pontban metszik egymást!
    g) A bővített mátrixon végrehajtott elemi sorműveletek közben az egyenletrendszer megoldáshalmaza nem változik.

h) Egy lineáris egyenletrendszer nem konzisztens, ha több egyenletből áll, mint ahány ismeretlenes.
i) Ha egy valósegyütthatós lineáris egyenletrendszernek van két különböző megoldása, akkor végtelen sok is van.
j) Egy homogén lineáris egyenletrendszer mindig konzisztens.

20. Melyek lineáris egyenletek az x, y és z változókban az alábbiak közül? *a)* $3x - (\ln 2)y + e^3 z = 0.4$, *b)* $a^2x - b^2y = 0$, *c)* $xy - yz - zx = 0$, *d)* $(\sin 1)x + y - \pi z = 0$, *e)* $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, *f)* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

21. Rajzoljuk fel a következő két egyenletrendszerhez tartozó sormodell és oszlopmodell szerinti ábrát!

a) $\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ 3x - 2y &= 4 \end{aligned}$ *b)* $\begin{aligned} 2x + 4y &= 3 \\ 3x + 6y &= 4 \end{aligned}$

22. A három elemi sorművelet egyike elvégezhető a másik kettő segítségével is. Melyik és hogyan?

23. Használjuk a Gauss-módszert:

a) $\begin{aligned} 7x + 14y - 21z &= 7 \\ x + 2y - 3z &= 1 \\ 5x + 10y + 15z &= 5 \\ 3x + 6y - 9z &= 3 \end{aligned}$ *b)* $\begin{aligned} 7x + 14y - 21z &= 0 \\ x + 2y - 3z &= 0 \\ 5x + 10y + 15z &= 0 \\ 3x + 6y - 9z &= 0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$ *d)* $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_4 &= 3 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 5 \end{aligned}$

24. Oldjuk meg az alábbi szimultán egyenletrendszereket Gauss–Jordan-módszerrel:

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 5 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 5 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$

25. Fogalmazzunk meg olyan feladatokat, melyekben vektorok függetlenségét vagy összefüggőségét kell eldönteni, vagy amelyben egy vektort más vektorok lineáris kombinációjaként kell előállítani és amelyre a választ a fenti egyenletrendszerek megoldása adja.

26. Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

a) Ha egy 10-ismeretlenes egyenletrendszer 6 egyenletből áll, akkor végtelen sok megoldása van.
b) Ha egy 10-ismeretlenes egyenletrendszer 20 egyenletből áll, akkor nem oldható meg!
c) Ha egy 10-ismeretlenes egyenletrendszer 20 egyenletből áll, akkor nem lehet végtelen sok megoldása.
d) $\mathbb{R}^n$ bármely három alterének metszete altér.
e) Ha az $\mathcal{U}$ altér altere a $\mathcal{V}$ és a $\mathcal{W}$ altérnek is, akkor altere metszetüknek is.
f) Alterek egyesítése altér.
g) Minden altérnek eleme a zérusvektor.
h) Minden altérnek van legalább egy nemzérus vektora.
i) Egy lineáris egyenletrendszer megoldásai vektorteret alkotnak.
j) Egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai vektorteret alkotnak.
k) Rögzített $\mathbf{A}$ mátrix mellett vektorteret alkotnak azok a $\mathbf{b}$ vektorok, melyekre az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ egyenletrendszer konzisztens.
l) Egy egyenletrendszer megoldásvektorainak különbségeként kapott vektorok halmaza vektorteret alkot.
m) Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathbf{b}$ előáll $\mathbf{A}$ oszlopainak lineáris kombinációjaként.
n) Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer bármely két megoldásának különbsége megoldása a homogén $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ egyenletrendszernek.
o) Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer bármely megoldása előáll a homogén $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ mátrixú egyenletrendszer két megoldásának különbségeként.
p) Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \leq \mathrm{r}(\mathbf{A})$.
q) Az n-ismeretlenes $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$.

27. Mennyi lehet az $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ rang, ha az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ bővített mátrixú egyenletrendszerről tudjuk, hogy

a) 2-ismeretlenes és megoldásainak száma végtelen;
b) inkonzisztens, és $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 4$;
c) egyetlen megoldása van és $\mathbf{A}$ 5×3-as;
d) inkonzisztens, n-ismeretlenes és 2 egyenletből áll.

28. Határozzuk meg az alábbi mátrixok kitüntetett altereinek bázisát! $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

29. Keressünk bázist az alábbi vektortérhez a megadott vektorok közül, majd írjuk fel a vektorok e bázisra vonatkozó koordinátás alakjait!

a) $\mathrm{span}((1,2,3),(-2,-4,-6),(1,1,1),(0,1,2),(2,1,0))$,
b) $\mathrm{span}((1,2,3,4),(0,1,2,3),(3,1,-1,1),(2,0,4,0))$,
c) $\mathrm{span}((1,2,3,4),(0,1,2,3),(1,1,1,1),(-1,0,1,2))$.

30. Keressük meg az alábbi egyenletrendszerek sortérbe eső egyetlen megoldását, és annak segítségével írjuk fel összes megoldását!

a) $\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + y - z &= 2 \\ 3x + 2y &= 5 \end{aligned}$ *b)* $x + 4y + 8z + 12w = 225$

Mátrixok

31. Legyenek megadva az alábbi mátrixok:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 2+i \\ 2 & 3-i \\ 3 & 4i \end{bmatrix}.$$

Végezzük el az alábbi műveleteket, ha lehet:
$\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{D}^2$, $\mathbf{DD}^T$, $\overline{\mathbf{D}}$, $\mathbf{BC}$.

32. Legyen az $\mathbf{A}_{m\times n}$ mátrix redukált lépcsős alakja (a zérussorok elhagyása után) $[\mathbf{I}_r|\mathbf{B}]$, ahol r a mátrix rangja. Írjuk fel az $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer összes megoldását mátrixszorzat alakban!

33. Legyenek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ tetszőleges $n\times n$-es mátrixok. Igazoljuk, hogy az $\mathbf{AB}-\mathbf{BA}$ mátrix főátlójában az elemek összege 0.

34. Oldjuk meg szimultán lineáris egyenletrendszerrel az $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ mátrixegyenletet, ahol

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&3&2\\0&1&1\\2&1&0\end{bmatrix}\quad\text{és}\quad\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&1&0\\-1&1&1\\0&-1&2\end{bmatrix}$$

35. Legyen

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{bmatrix}\qquad\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&2&2\\3&3&3\\1&1&1\end{bmatrix}$$

Melyik oldalról kell megszorozni és milyen permutáló mátrixszal az $\mathbf{A}$ mátrixot, hogy a $\mathbf{B}$ mátrixot kapjunk? E permutáló mátrix milyen elemi mátrixok szorzataként írható föl?

36. Bizonyítsuk be, hogy a 4×4-es szigorú felsőháromszög-mátrixok 4-edik hatványa $\mathbf{O}$. (Szigorú felsőháromszög-mátrix az olyan négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix, amelynek a főátlójában és a főátló alatt is csupa 0 van, azaz $a_{ij}=0$, ha $j-i\le0$. Igaz-e az állítás 4 helyett tetszőleges pozitív n-re?)

37. Legyen $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}$ és $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&5\\1&1\end{bmatrix}$. Számítsuk ki az alábbi szorzatot 4×4-es mátrixok szorzataként, és a blokkmátrixos felbontás használatával is!

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{I}&-\mathbf{I}\\\hline\mathbf{O}&-\mathbf{I}\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{B}&\mathbf{A}\\\hline\mathbf{B}&\mathbf{O}\end{array}\right]$$

38. Elemi sorműveletekkel számítsuk ki a következő mátrix inverzét!

$$\begin{bmatrix}1&0&2\\0&3&5\\-1&1&0\end{bmatrix}$$

39. Adjuk meg az alábbi mátrix LU-felbontását:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{bmatrix}$$

40. Oldjuk meg az $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ egyenletrendszert LU-felbontás segítségével, ahol $\mathbf{A}$ az előző feladatbeli mátrix és $\mathbf{b}=(5,-1,3,7)$.

41. Bontsuk fel az alábbi mátrixot egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus (antiszimmetrikus) mátrix összegére!

$$\begin{bmatrix}1&2&3&0\\4&2&0&0\\5&2&2&0\\2&2&2&2\end{bmatrix}$$

42. Határozzuk meg az $\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}^n$ mátrixot ($n\in\mathbb{N}$)!

43. Legyen

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&1&-3&4\\-1&-2&0&4&-5\\2&4&5&-3&5\end{bmatrix}.$$

(a) Határozzuk meg $\mathbf{A}$ bázisfelbontását!

(b) Ezt felhasználva bonsuk fel $\mathbf{A}$-t $\mathrm{r}(\mathbf{A})$ darab diád összegére!

44. Legyen $\mathcal{A}:=\{(1,0,1),(1,1,1),(1,-1,0)\}$, $\mathcal{B}:=\{(1,2,2),(-1,0,1),(1,1,-1)\}$.

(a) Mutassuk meg, hogy ezek $\mathbb{R}^3$ két bázisa!

(b) Írjuk fel a $\mathbf{T}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ áttérési mátrixot!

(c) Legyen $[\mathbf{v}]_{\mathcal{A}}=(1,1,-1)$ egy $\mathbf{v}$ vektor koordinátavektora az $\mathcal{A}$ bázisban. Mi lesz $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$?

45. Legyen $\mathbb{R}^4$ standard bázisa $\mathcal{C}$, és egy alterének bázisa $\mathcal{B}=\{(1,0,1,-1),(1,1,0,0)\}$.

(a) Írjuk fel az $\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ áttérés mátrixát!

(b) Írjuk fel $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$-t ha $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$

Determinánsok

46. Elemi sorműveletek alkalmazásával számítsuk ki az alábbi determinánsokat!

a) $\begin{vmatrix}2&3\\1&5\end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&1&1&1\\1&2&3&4\end{vmatrix}$

47. Határozzuk meg az elemi mátrixok determinánsát!

48. Legyen az 5×5-ös $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa 3, az 5×5-ös C mátrixé $c\neq0$. Mi lesz a determinánsa a következő mátrixoknak: *a)* $2\mathbf{A}^{-1}$, *b)* $(2\mathbf{A})^{-1}$, *c)* $\mathbf{A}^2\mathbf{A}^T\mathbf{A}^{-1}$, *d)* $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$.

49. Számítsuk ki a következő $n\times n$-es determináns értékét! (Ötlet: a második sort vonjuk ki az összes többiből.)

$$\begin{vmatrix}1&2&2&\dots&2\\2&2&2&\dots&2\\2&2&3&\dots&2\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\2&2&2&\dots&n\end{vmatrix}$$

50. Számítsuk ki a

$$\begin{vmatrix}b&a&a\\a&b&a\\a&a&b\end{vmatrix}$$

determináns értékét! Hogyan lehet ezt általánosítani? (Ötlet: adjuk az összes oszlopot az első oszlophoz.)

51. Számítsuk ki az alábbi mátrix determinánsát és inverzét aldeterminánsok segítségével:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&3&5\\-1&1&0\end{bmatrix}$$

52. Cramer szabály alkalmazásával oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert, ha $\mathbf{A}$ az előző feladatbeli mátrix, $\mathbf{b} = [1\ 1\ -1]^T$.

53. Oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ és az $\mathbf{x}^T\mathbf{A} = \mathbf{b}^T$ egyenletrendszert $\mathbf{A}^{-1}$-vel való beszorzással az előző feladatbeli $\mathbf{A}$-val és $\mathbf{b}$-vel.

54. Határozzuk meg az alábbi mátrix determinánsát:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -3 & 9 & -27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

55. Határozzuk meg az alábbi $2n \times 2n$-es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ \mathbf{O} & \mathbf{X} \end{bmatrix}$$

blokkmátrix determinánsát és inverzét, ahol $\mathbf{I}, \mathbf{O}, \mathbf{X} \in \mathrm{M}_n[\mathbb{R}]$, $\mathbf{O}$ a nullmátrix, $\mathbf{I}$ az egységmátrix, és $\mathbf{X}$ mellékátlójában -1-esek, egyebütt nullák állnak.

56. Határozzuk meg az alábbi két mátrix determinánsát (a nem zérus értékű) kígyók determinánsának összegére való bontással:

$$a)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

57. Számítsuk ki az alábbi összeget!

$$\sum_{k=1}^{10} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ (-1)^k 2k & (-1)^k 3k & 2 \end{vmatrix}.$$

58. Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját a maximális méretű nem nulla aldetermináns méretének meghatározásával:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Lineáris leképezések

46. Vektorteret alkotnak-e standard összeadás és skalárral szorzással

(1) a $[0,1]$-en differenciálható valós függvények $\mathbb{R}$ fölött,

(2) az $\mathbb{F}_2$ elemeiből képzett végtelen sorozatok az $\mathbb{F}_2$ fölött,

(3) az $\mathbb{N}$ elemeiből képzett végtelen sorozatok az $\mathbb{N}$ fölött,

(4) az $\mathbb{N}^3$ elemei $\mathbb{Q}$ fölött,

(5) $\mathbb{C}$ elemei $\mathbb{R}$ fölött,

(6) $\mathbb{C}^2$ elemei $\mathbb{C}$ fölött,

(7) $\mathbb{R}^{n^2}$-ben a valós felsőháromszög-mátrixok $\mathbb{R}$ fölött.

47. Melyek lineárisak az alábbi leképezések közül? Amelyik igen, annak írjuk fel a standard mátrixát! Mi a lineáris leképezés magtere és képtere (adjuk meg a bázisát)?

(a) $(x, y, z) \mapsto (x - 2y, z, x + y + z)$

(b) $(x, y, z) \mapsto (x + 2y, 3x - y)$

(c) $(x, y, z) \mapsto (1, x, x^2 y)$

48. Tekintsük az $(1, 2, 3, 2)$ és a $(1, 2, 0, 1)$ vektorok által kifeszített alteret $\mathbb{R}^4$-ben. Írjuk fel az altérre való merőleges vetítés mátrixát. Vetítsünk egy altérbe eső és egy altérbe nem eső vektort az altérre e mátrixszal való szorzással. Mekkora az altérbe nem eső vektornak az altértől való távolsága?

49. Írjuk fel a síkot az origó körül $30°$-kal elforgató transzformáció, valamint a teret a z-tengely körül, ill. az y-tengely körül $30°$-kal elforgató transzformáció mátrixát.

50. Írjuk fel a síkot az $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ egyenletű egyenesre tükröző transzformáció mátrixát!

51. Írjuk fel annak az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ lineáris leképezésnek a mátrixát, mely a standard bázis elemeit rendre a $(0, 1, 1, 1)$, $(1, 0, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 0)$ vektorokba viszi.

52. Írjuk fel annak az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ lineáris leképezésnek a mátrixát, mely az $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 0, 1)$ vektorokat rendre a $(0, 1, 1, 1)$, $(1, 0, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 0)$ vektorokba viszi.

53. Számítsuk ki az $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ és az $[1\ 1\ 1\ 1]$ mátrixok pszeudoinverzét!

54. Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} x \qquad + z + 2w &= 3 \\ 2x + y + z + 2w &= 2 \\ x + y \qquad\qquad &= -4 \end{aligned}$$

egyenletrendszer összes optimális megoldását a normálegyenlet segítségével, valamint válasszuk ki közülük az egyetlen sortérbe eső megoldást.

55. Adjuk meg ellenőrzésül az előző egyenletrendszer sortérbe eső egyetlen optimális megoldását, ha ismerjük az egyenletrendszer együtthatómátrixának pszeudoinverzét, ami

$$\frac{1}{33} \begin{bmatrix} -3 & 6 & 9 \\ -8 & 5 & 13 \\ 5 & 1 & -4 \\ 10 & 2 & -8 \end{bmatrix}.$$

56. Határozzuk meg a rangját, nullitását, determinánsát, nyomát

(a) az $\mathbb{R}^2$ sík

(1) α szögű elforgatásának,

(2) egy egyenesre való tükrözésének,

(3) egy egyenesre való merőleges vetítésének,

(b) az $\mathbb{R}^3$ tér

(4) egy egyenes körül való α-szögű elforgatásának,

(5) egy egyenesre való merőleges vetítésének,

(6) egy síkra való merőleges vetítésének,

(7) egy síkra való merőleges tükrözésének!

(c) az $\mathbb{R}^5$ tér

(8) egy síkjára való (merőleges) vetítésnek,

(9) valamely bázisának vektorait ciklikusan megcseréli, azaz amely a $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5\}$ vektorokat a $\{\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_1\}$ vektorokba viszi.

57. Legyen $\mathbf{a}_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$, $\mathbf{a}_2 = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$, $\mathbf{a}_3 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$, $\mathbf{a}_4 = \frac{1}{2}(1,-1,-1,1)$. [Útmutatás a következő kérdésekhez: egy tetszőleges $\mathbf{x}$ vektor standard bázisra vonatkozó valamely koordinátáját hogyan tudnánk egy egyszerű skalárszorzattal kifejezni?]

(a) Igazoljuk, hogy $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ ortonormált bázis $\mathbb{R}^4$-ben!

(b) Írjuk fel egy minél egyszerűbb képletet, mely megadja egy standard bázisban megadott tetszőleges $\mathbf{x}$ vektor fenti bázisra vonatkozó i-edik koordinátáját ($i = 1,2,3,4$)!

(c) Számítsuk ki az $\mathbf{x} = (1,2,3,4)$ vektornak a $\mathcal{V} = \operatorname{span}(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ altérre való merőleges vetületét!

58. Melyik ortogonális az alábbi mátrixok közül? Számítsuk ki az inverzeiket!

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

59. Adjuk meg a $\mathcal{V} = \operatorname{span}((1,1,0,0),(1,1,1,1))$ és a $\mathcal{W} = \operatorname{span}((1,0,1,0),(0,1,0,1))$ terek összegének egy bázisát. Igaz-e, hogy $\mathcal{V} + \mathcal{W} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$?

Sajátérték, sajátaltér

60. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{A}$ minden sor- vagy oszlopösszege c, akkor c az $\mathbf{A}$ egy sajátértéke. [Útmutatás: melyik vektor lehet sajátvektor?]

61. Határozzuk meg a következő lineáris transzformációk sajátértékeit és sajátvektorait!

a) Az $(1,2,-3)$ irányvektorú, origón átmenő egyenesre való tükrözés az $\mathbb{R}^3$-ben.

b) A transzponálás a 2×2-es valós mátrixok absztrakt terében.

62. Tekintsük a következő mátrixokat!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Adjuk meg mindegyikük sajátértékeit és azok algebrai és geometriai multiplicitását!

(b) Melyik mátrix diagonalizálható $\mathbb{R}$ fölött?

(c) Adjuk meg a $\mathbf{C}$ mátrixához a sajátalterek egy-egy bázisát! Adjunk meg $\mathbb{R}^3$-ben egy a $\mathbf{C}$ mátrix sajátvektoraiból álló ortonormált bázist és ennek felhasználásával adjuk meg $\mathbf{C}$ sajátfelbontását! [Útmutatás: $\mathbf{C}$ szimmetrikus.]

63. Számítsuk ki az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix 100-adik hatványát a sajátfelbontás segítségével! Ellenőrzésül az eredmény:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(3^{100}+1) & \frac{1}{2}(3^{100}-1) \\ \frac{1}{2}(3^{100}-1) & \frac{1}{2}(3^{100}+1) \end{bmatrix}$$

64. Írjuk fel az alábbi mátrixok karakterisztikus polinomját, sajátértékeit, és azok algebrai és geometriai multiplicitását! [Útmutatás: a sajátvektorokat nem kell meghatározni, elég a sajátaltér dimenziója]

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *(b)* $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

65. Az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix két elemét nem ismerjük, de tudjuk, hogy az egyik sajátértéke 3. Mi a másik két sajátértéke?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ * & * & 1 \end{bmatrix}$$

[Útmutatás: használjuk a sajátértékek, determináns és nyom közti összefüggéseket!]

Jordan-féle normálalak

66. Mi lehet a Jordan-normálalakja annak a komplex mátrixnak, amelynek

(a) karakterisztikus polinomja $-x^3(x+1)^4$, a sajátértékekhez tartozó sajátalterekre $\dim \mathcal{V}_0 = 1$, és $\dim \mathcal{V}_{-1} = 3$;

(b) karakterisztikus polinomja $-(x-\lambda)^5$, $\dim \mathcal{V}_\lambda = 3$ (itt több megoldás is lehetséges).

67. Mi lesz az alábbi mátrixok Jordan-féle normálalakja?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *(b)* $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ *(c)* $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *(e)* $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

68. Egy 10×10-es $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei λ_1, λ_2. Az $\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 8, 6, 5, 4, 4. Az $\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I}$ hatványainak rangja rendre 7, 6, 6. Írjuk fel $\mathbf{A}$ Jordan-alakját!

69. Tekintsük a következő mátrixokat!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Határozzuk meg mindkettőjük Jordan-féle normálalakját és egy Jordan-bázisát!

(b) Határozzuk meg $e^{\mathbf{J}}$ értékét, ahol $\mathbf{J}$ az $\mathbf{A}$, illetve a $\mathbf{B}$ Jordan-féle normálalakja!

(c) Határozzuk meg $e^{3\mathbf{A}}$ és $e^{3\mathbf{B}}$ értékét!