10. Házi feladat (határidő: 2017-11-17)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Adjuk meg az alábbi valós egyenletrendszer sortérbe eső egyetlen megoldását, és ennek segítségével írjuk fel az összes megoldást!

$$\begin{aligned} x - \ y + \ z &= -2 \\ 2x + \ y + 3z &= \ \ 1 \\ x + 2y + 2z &= \ \ 3 \end{aligned}$$

2. Adjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lináris egyenletrendszer összes megoldását $\mathbb{Z}_3^3$-ban! Melyek esnek ezek közül $\mathbf{A}$ sorterébe?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3\times 3} \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_3^3$$

3. Tegyük fel, hogy $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ páronként merőleges vektorok $\mathbb{R}^n$-ben.
   a) Mi a $\mathbf{v}_i$ vektorok skaláris szorzata az $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{v}_j$-vel?
   b) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ lineárisan függetlenek!

4. Legyenek megadva az alábbi mátrixok:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 2+i \\ 2 & 3-i \\ 3 & 4i \end{bmatrix}.$$

   Végezzük el az alábbi műveleteket, ha lehet:
   $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{D}^2$, $\mathbf{DD}^T$, $\overline{\mathbf{D}}$, $\mathbf{BC}$.

5. Keressünk olyan 2×2-es és 3×3-as $\mathbf{C}$ valós mátrixokat, melyekre: $\mathbf{C}^2 = \mathbf{O}$, de $\mathbf{C} \neq \mathbf{O}$.

6. Legyenek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ tetszőleges $n \times n$-es mátrixok. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ mátrix főátlójában az elemek összege 0.

7. Oldjuk meg szimultán lineáris egyenletrendszerrel az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ mátrixegyenletet, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

8. Keressük meg az összes olyan 2×2-es valós $\mathbf{X}$ mátrixot, amelyik felcserélhető az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

   mátrixszal! (Írjuk át az $\mathbf{AX} = \mathbf{XA}$ mátrixegyenletet az $\mathbf{X}$ elemeire vonatkozó lineáris egyenletrendszerré!)

9. Bizonyítsuk be, hogy az $n \times n$-es szigorú felsőháromszög-mátrixok n-edik hatványa $\mathbf{O}$. (Szigorú felsőháromszög-mátrix az olyan négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix, amelynek a főátlójában és a főátló alatt is csupa 0 van, azaz $a_{ij} = 0$, ha $j - i \leq 0$.)

10. Hogyan változhat a mátrix rangja, ha egyetlen eleméhez hozzáadunk 1-et? Adjunk példát mindegyik esetre!

*11. Hány egy, illetve kétdimenziós altere van $\mathbb{Z}_p^3$-nek, ha p prím?

*12. Melyek azok az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixok, amelyek minden valós $n \times n$-es mátrixszal felcserélhetők?