9. Házi feladat (határidő: 2017-11-10)

A feladatokra teljes megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. Más megoldását lemásolni nem szabad!

1. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix és az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ bővített mátrix rangját $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ és $\mathbb{R}$ felett! Mit mondhatunk az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú lineáris egyenletrendszer megoldhatóságáról mindhárom esetben!

2. Határozzuk meg a következő mátrix rangját!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2i & 1+2i \\ 3 & i & 3-i \\ 4i & -3 & -1+4i \end{bmatrix}$$

3. Függetlenek-e az $(1,2,-1,0)$, $(1,1,2,1)$, $(2,0,1,3)$ és az $(1,0,-4,1)$ vektorok? Ha nem, akkor adjuk meg közülük az általuk generált altér egy bázisát és fejezzük ki segítségükkel a többi vektort. Írjuk fel mindegyik vektor koordinátavektorát e bázisra nézve!

4. Oldjuk meg a következő szimultán egyenletrendszert!

$$\begin{array}{lll} 2x+3y=1 & 2u+3v=3 & 2a+3b=0 \\ 4x+6y=2 & 4u+6v=0 & 4a+6b=0 \end{array}$$

5. Állítsuk elő a $\mathbf{v}_1 = (1,0,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = (2,1,-1,3)$ és $\mathbf{v}_3 = (0,1,-2,-1)$ vektorok lineáris kombinációjaként az $\mathbf{a} = (0,-1,3,-1)$, $\mathbf{b} = (1,1,0,1)$ és $\mathbf{c} = (3,2,-2,3)$ vektorok közül azokat, amelyeket lehet! (Használjunk szimultán egyenletrendszert!)

6. Bizonyítsuk be, hogy két altér metszete mindig altér, de két altér uniója pontosan akkor altér, ha a kettő közül valamelyik tartalmazza a másikat!

7. Az alábbi részhalmazok valamelyike alteret alkot-e $\mathbb{R}^3$-ben? Amelyik altér, annak adjuk meg egy bázisát is!
   (a) $\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{v}| = 1\}$
   (b) $\{(x,y,z) \mid x+2y+z=0\}$
   (c) $\{(x,y,z) \mid x+2y+z=1\}$

8. Tekintsük a $\mathcal{B} = \{(1,3,-1),\ (0,1,1),\ (2,-1,0)\}$ bázist $\mathbb{R}^3$-ben. Melyik az a $\mathbf{v}$ vektor, amelynek $\mathcal{B}$ szerinti koordinátavektora $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (1,2,-1)$, és mi a $\mathbf{w} = (3,0,-3)$ vektor koordinátavektora $\mathcal{B}$ szerint?

9. Adjuk meg az alábbi mátrix kitüntetett altereinek egy-egy bázisát!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

10. Adjuk meg az $\langle(1,2,-1)\rangle \leqslant \mathbb{R}^3$ altér merőleges kiegészítő alterének egy bázisát!

*11 Mutassuk meg, hogy minden *egész elemű* négyzetes mátrix megadott műveletekkel

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

alakra hozható, ahol csak a főátlóban vannak nem nulla elemek, és ha ezek $d_1, d_2, \dots, d_n$ jelöli, akkor $d_i \mid d_{i+1}$ $(1,\dots,n-1)$. Az átalakítás közben csak a következő elemi sor- és oszlopműveletek használhatók: sorcsere, sor szorzása -1-gyel, egy sor egész számmal való szorzatának egy másikhoz adása, és ugyanezen műveletek oszlopokra vonatkozó változatai.

*12 A c paraméter értékétől függően mennyi a rangja annak a valós $n \times n$-es mátrixnak, amelynek a főátlójában csupa c, az összes többi helyén 1 van?