Tartalomjegyzék

I. A lineáris algebra forrásai 17

1 Vektorok 19

Vektorok a 2- és 3-dimenziós térben 19

Irányított szakasz, kötött és szabad vektor 19 • Vektor magadása egy irányított szakasszal 20 • Vektor megadása hossz és irány segítségével 21 • Vektorműveletek a 2- és 3-dimenziós térben 21 • A lineáris kombináció definíciója 23 • Lineáris függetlenség 25 • Speciális lineáris kombinációk* 26

Távolság, szög, orientáció 30

Skaláris szorzás 30 • Hosszúság és szög 31 • Három tétel vektorok hosszáról 32 • Egységvektorral való szorzás és a merőleges vetítés 33 • Merőlegesség és orientáció 34 • Vektori szorzás 35 • Paralelepipedon térfogata és előjeles térfogata 37 • Vegyes szorzat 38

Vektorok koordinátás alakban 40

Descartes-féle koordináta-rendszer 40 • Műveletek koordinátás alakban megadott vektorokkal 41 • A derékszögű koordináta-rendszer 42 • Az $\mathbb{R}^n$ halmaz 44 • Vektorok összeadása és skalárral szorzása $\mathbb{R}^n$-ben 45 • Lineáris kombináció, lineáris függetlenség, lineáris összefüggőség 46 • Skaláris szorzás $\mathbb{R}^n$-ben 48 • Távolság és szög $\mathbb{R}^n$-ben 49

Megoldások 54

2 Lineáris egyenletrendszerek és megoldásuk 59

Egyenes és sík egyenletei 59

Alakzatok implicit és explicit egyenletrendszerei 59 • Síkbeli egyenes egyenletei 61 • Síkbeli pont egyenletei 63 • A 3-dimenziós tér síkjainak egyenletei 64 • A térbeli egyenes egyenletei 66 • Térbeli pont egyenletei 68 • Egyenletek $\mathbb{R}^n$-ben 69

A lineáris egyenletrendszer és két modellje 71

Lineáris egyenlet és egyenletrendszer 71 • Ekvivalens lineáris egyenletrendszerek 73 • Mátrixok 73 • Egyenletrendszer mátrixa és bővített mátrixa 75 • Sormodell: hipersíkok metszete 76 • Oszlopmodell: vektor előállítása lineáris kombinációként 77

Megoldás kiküszöböléssel 80

Elemi sorműveletek és a lépcsős alak 80 • Gauss-módszer 81 • Redukált lépcsős alak 85 • Gauss–Jordan-módszer 86 • A redukált lépcsős alak egyértelműsége 87 • Szimultán egyenletrendszerek 88 • Kiküszöbölés $\mathbb{Z}_p$-ben* 89

Megoldás a gyakorlatban 93

A kiküszöbölés műveletigénye 93 • Numerikusan instabil egyenletrendszerek 94 • Részleges főelem-kiválasztás 95 • Skálázás 97 • Iteratív módszerek 98 • Jacobi-iteráció 99 • Gauss–Seidel-iteráció 100 • Az iterációk konvergenciája 101

Megoldások 104

3 *Megoldhatóság és a megoldások tere* 109

Homogén és inhomogén egyenletrendszerek megoldásai 109

Kötött változók száma, mátrix rangja 109 • Egyenletrendszer megoldhatóságának feltétele 111 • Homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai 113 • Vektortér és altér 114 • Kifeszített altér 116 • Az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai 117 • Vektorok lineáris függetlensége 119

Alterek tulajdonságai és az egyenletrendszerek 121

Sor- és oszloptér 121 • Bázis 122 • Bázis és vektor rá vonatkozó koordinátás alakjának maghatározása 123 • Dimenzió és rang 125 • Mátrix kitüntetett alterei és a lineáris algebra alaptétele 128 • A lineáris egyenletrendszer megoldásainak jellemzése 130 • Elemi bázistranszformáció* 132

Megoldások 136

II. Mátrixok algebrája és geometriája **139**

4 *Mátrixműveletek definíciói* 141

Műveletek táblázatokkal – műveletek mátrixokkal 141

Táblázatok összeadása és skalárral szorzása 141 • Táblázatok szorzása 142 • Lineáris helyettesítések kompozíciója 143 • Elemenkénti mátrixműveletek 144 • Mátrixszorzás 146 • Műveletek blokkmátrixokkal 147 • Kroneceker-szorzat és a vec-függvény* 148 • Hipermátrixok* 149

A mátrixszorzás használata 153

Skaláris szorzat és diadikus szorzat mátrixszorzatos alakja 153 • Lineáris egyenletrendszer mátrixszorzatos alakja 154 • Lineáris helyettesítés mátrixszorzatos alakja 155 • Szorzás vektorral 155 • A báziscsere mátrixszorzatos alakja 157 • Bázisfelbontás* 158 • Egységmátrix, elemi mátrixok 160 • Vektorokra particionált mátrixok 162 • * 165

Megoldások 166

5 *Mátrixműveletek algebrája* 171

Az alapműveletek tulajdonságai 171

Az összeadás és a skalárral való szorzás tulajdonságai 171 • A szorzás tulajdonságai 171 • Mátrix hatványozása 174 • A transzponálás tulajdonságai 176 • Mátrixszorzás inverze – mátrixok osztása* 176 • Mátrix inverze 177 • Elemi mátrixok inverze 179 • Az inverz kiszámítása 179 • Az inverz tulajdonságai 182 • Az invertálhatóság és az egyenletrendszerek megoldhatósága 183 • Invertálhatóság és bázis 185 • Báziscsere 186 • Gyorsszorzás* 188

Műveletek speciális mátrixokkal 191

Diagonális mátrixok 191 • Permutáló mátrixok és kígyók 191 • Háromszögmátrixok 193 • Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok 194

Mátrixfelbontások 197

Az LU-felbontás 197 • Egyenletrendszer megoldása LU-felbontással 200 • Mátrix invertálása LU-felbontással 201 • Az LU-felbontás a gyakorlatban 202 • PLU-felbontás* 203

Megoldások 209

6 *Determináns* 213

Parallelogramma előjeles területe 213 • Parallelepipedon előjeles térfogata 214

A determináns mint sorvektorainak függvénye 214

A determináns definíciója 214 • Mikor 0 a determináns értéke 216 • A determináns értékének kiszámítása 218 • Elemi mátrixok determinánsa 219 • Permutáló mátrix determinánsa* 220 • Mátrixműveletek és determináns 221 • Determinánsok soronkénti additivitása 223

A determináns mint elemeinek függvénye 229

Kígyók determinánsa 229 • A determináns definíciója kígyókkal* 231 • Előjeles aldetermináns 232 • Determináns kifejtése 235 • Vandermonde-determináns 236 • Cramer-szabály és a mátrix inverze 238 • Blokkmátrixok determinánsa* 242

Megoldások 247

7 *Mátrixleképezések és geometriájuk* 253

Mátrixleképezés, lineáris leképezés 253

A mátrixleképezés fogalma 253 • Műveletek mátrixleképezések között 254 • Mátrixleképezések tulajdonságai 255 • Lineáris leképezés 256 • $\mathbb{R}^n$-ből $\mathbb{R}^m$-be képző lineáris leképezések 257 • A mátrixleképezés hatásának szemléltetései 259 • Mátrix nyoma* 261

2- és 3-dimenziós geometriai transzformációk mátrixa 264

Forgatás a síkban 264 • Egyenes körüli forgatás a térben* 266 • Merőleges vetítés 267 • Tükrözés 269 • Vetítés 269 • Eltolás 270

Hasonlóság 273

Lineáris transzformáció mátrixa különböző bázisokban 273 • Mátrixok hasonlósága 274 • Lineáris leképezés mátrixa különböző bázispárokban 276 • Lineáris leképezés rangja, nullitása, lineáris transzformáció determinánsa és nyoma 277

Merőleges vetítés és a legjobb közelítés 280

Alterek összege és direkt összege 280 • Merőleges vetítés $\mathbb{R}^n$ egy alterére 283 • Melyik mátrix merőleges vetítés mátrixa? 284 • Altértől való távolság 285 • Egyenletrendszer optimális megoldása 286 • Lineáris és polinomiális regresszió 289 • Vetítés 291

*Pszeudoinverz** 295

A pszeudoinverz fogalma 295 • A pszeudoinverz tulajdonságai 299 • A pszeudoinverz és a minimális abszolút értékű optimális megoldás 300

Ortonormált bázis – ortogonális mátrix 304

Ortogonális és ortonormált bázis 304 • Ortogonális mátrixok 306 • Ortogonális mátrixok geometriája 308 • A 2- és 3-dimenziós tér ortogonális transzformációi 310 • Givens-forgatás, Householder-tükrözés* 311 • Gram–Schmidt-ortogonalizáció* 313 • A QR-felbontás* 314 • QR-felbontás primitív ortogonális transzformációkkal* 317 • Egyenletrendszer optimális megoldása QR-felbontással* 319

*Komplex és véges test feletti terek** 323

Komplex vektorok skaláris szorzata 323 • Komplex mátrixok kitüntetett alterei 325 • Önadjungált mátrixok 326 • Távolság és a merőleges vetítés komplex terekben 326 • Unitér mátrixok 327 • Fourier-mátrixok 329 • Diszkrét Fourier-transzformáció 332 • Periodikus összetevők szűrése 334 • Gyors Fourier-transzformáció 335 • Vektorok konvolúciója 339

Megoldások 339

*Alkalmazás: differenciálhatóság** 343

Vektor-vektor függvények differenciálhatósága 343 • Jacobi-mátrix 345 • Jacobi-determináns és az integrál transzformációja 349 • Függvények kompozíciójának deriváltja 351

III. Mátrixok sajátságai 355

8 *Sajátérték, diagonalizálás* 357

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér 357

A sajátérték és a sajátvektor fogalma 357 • Karakterisztikus polinom 359 • A valós 2×2-es mátrixok sajátaltereinek jellemzése 361 • Mátrix összes sajátértékének és sajátvektorának meghatározása 362 • A karakterisztikus egyenlet komplex gyökei 365 • A karakterisztikus egyenlet többszörös gyökei: az algebrai és a geometriai multiplicitás 366 • Sajátértékek és a mátrix hatványai 367 • Speciális mátrixok sajátértékei 368

Hasonlóság, diagonalizálhatóság 371

Lineáris transzformációk sajátértékei 371 • Hasonló mátrixok sajátértékei 372 • Mátrixok diagonalizálása és sajátfelbontása 373 • Bal sajátvektorok és a sajátfelbontás diadikus alakja* 375 • Diagonalizálható mátrixok polinomjai és a Cayley–Hamilton-tétel* 376 • Különböző sajátértékek sajátalterei 378 • Sajátértékek multiplicitása és a diagonalizálhatóság* 380 • Diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontása* 382 • Sajátalterek direkt összege 384

A sajátérték kiszámítása 388

Gersgorin-körök 388 • Hatványmódszer 390

Megoldások 394

9 *Diagonalizálás ortonormált bázisban* 395

Ortogonális és unitér diagonalizálás 395

Valós mátrixok ortogonális diagonalizálása, valós spektráltétel 395 • Schur-felbontás* 399 • Mátrixok unitér diagonalizálása* 402 • Valós normális mátrixok* 404

Kvadratikus alakok 407

Homogén másodfokú polinomok mátrixszorzatos alakja 407 • Főtengelytétel 409 • Kvadratikus alakok és mátrixok definitsége 410 • Pozitív (szemi)definit mátrixok faktorizációi 412 • Definitség és főminorok 415 • Szélsőérték 416

Megoldások 418

10 *Szinguláris érték* 419

Szinguláris érték, szinguláris vektor, SVD 419

Szinguláris érték, szinguláris vektor 419 • Szinguláris felbontás 421 • Szinguláris felbontás geometriai interpretációja 425 • Polárfelbontás 427 • Pszeudoinverz 429

Vektor- és mátrixnorma 432

Vektor abszolút értéke – az euklideszi norma 432 • A p-norma 432 • A norma általános fogalma 433 • Vektornormák ekvivalenciája 435 • Vektornormák mátrixokon 436 • A mátrixnorma általános fogalma 438 • Indukált norma 438 • Az 1-, 2- és ∞-norma mátrixokra 440 • Kis rangú approximáció 441

Megoldások 444

11 *Jordan-féle normálalak* 447

Normálalak és invariáns altér 447

Invariáns alterek 447 • Invariáns alterek és blokkmátrixok 448 • Általánosított sajátvektorok és a Jordan-blokk 449 • Jordan-normálalak 452 • A Jordan-alak egyértelműsége 455 • Minimálpolinom* 458 • Kísérő mátrix* 460 • A Jordan-bázis konstrukciója* 461

Mátrixfüggvények 467

Diagonalizálható mátrixok függvényei 467 • Mátrixfüggvény kiszámítása a Jordan-alakból 468 • Mátrixfüggvény kiszámítása polinominterpolációval 471

Megoldások 474

12 *Nemnegatív mátrixok* 477

A Perron–Frobenius-elmélet 477

Mátrixok összehasonlítása 477 • Pozitív mátrixok 478 • Nemnegatív mátrixok 480 • Irreducibilis mátrixok 483 • Primitív és imprimitív mátrixok 485

Sztochasztikus mátrixok 489

Markov-láncok, sztochasztikus mátrixok 489 • Duplán sztochasztikus mátrixok 489 • A Leontief-modell 490

Megoldások 493

IV. Absztrakció és alkalmazás 495

13 *Terek* 497

Vektortér 497

A vektortér absztrakt fogalma 497 • Lineáris leképezések 499 • Bázis és dimenzió 502 • Képtér, magtér 506 • Faktortér 507 • Duális tér 510 • Adjungált és ortogonalitás 512 • Vektorterek direkt összege és direkt szorzata 513

Multilineáris leképezések 517

Bilieáris függvények 517 • Komplex bilineáris (szeszkvilineáris) függvények 517 • Bilineáris és szeszkvilineáris függvény mátrixa 518 • Speciális bilineáris függvények 520 • Szimmetrikus bilineáris alak diagonalizálhatósága 521 • Sylvester-féle tehetetlenségi tétel 522 • Bilineáris függvények és kvadratikus alakok kapcsolata 523 • Multilineáris leképezések és függvények 524 • Bázis keresése multilineáris függvények megadásához 525 • Tenzorszorzat, tenzorok 529 • Vektortér kontravariáns és kovariáns vektoraiból képzett tenzorok 531

Euklideszi tér 534

Skaláris szorzat 534 • Komplex skaláris szorzás 535 • Norma 536 • Ortogonalitás euklideszi terekben 537 • Hilbert-terek* 539 • Adjungált 539

Megoldások 542

A *Függelék* 543

Testek, gyűrűk 544

Test 544 • Gyűrű 545 • Egyműveletes struktúrák* 545

Prímelemű testek 546

Aritmetika véges halmazon 546

Lebegőpontos számábrázolás 551

A lebegőpontos számábrázolás 551 • Műveletek lebegőpontos számokkal 552 • Algoritmusok műveletigénye: flop és flops 554

Komplex számok 556

Polinomok 556

Irodalomjegyzék 557

Tárgymutató 559

Listák

Tételek, állítások, következmények

1.2. Paralelogramma-módszer . . . 22
1.5. A vektorműveletek tulajdonságai . . . 23
1.7. Vektorral párhuzamos vektorok . . . 24
1.8. Két vektorral egy síkba eső vektorok . . . 24
1.9. Térbeli vektorok . . . 25
1.11. Síkbeli vektor felbontása . . . 26
1.12. Térbeli vektor felbontása . . . 26
1.13. Két ponton átmenő egyenes jellemzése . . . 26
1.14. Intervallum pontjainak jellemzése . . . 27
1.17. Mikor 0 a skaláris szorzat? . . . 30
1.18. A skaláris szorzás műveleti tulajdonságai . . . 31
1.19. Pithagorász-tétel . . . 32
1.20. Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség 32
1.21. Háromszög-egyenlőtlenség . . . 32
1.22. Egységvektorral való szorzás geometriai jelentése 33
1.23. Vektor felbontása merőleges összetevőkre . . . 33
1.27. Mikor $\mathbf{0}$ a vektori szorzat? . . . 36
1.28. Vektori szorzat abszolút értékének geometriai jelentése . . . 37
1.29. Vektori szorzás műveleti tulajdonságai . . . 37
1.30. Paralelepipedon térfogata . . . 37
1.34. Vektorműveletek koordinátás alakja . . . 42
1.36. Skaláris szorzat ortonormált koordináta-rendszerben . . . 43
1.37. Vektori szorzat ortonormált koordináta-rendszerben . . . 43
1.38. Paralelogramma területe . . . 43
1.41. Az összeadás és skalárral szorzás tulajdonságai 45
1.42. $\mathbb{R}^n$ standard bázisa . . . 46
1.44. Lineáris függetlenség . . . 46
1.45. Lineáris összefüggőség . . . 47
1.47. A skaláris szorzás alaptulajdonságai . . . 48
1.50. Vektorral párhuzamos és merőleges összetevő . 50
1.51. Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség 50
1.52. Háromszög-egyenlőtlenség $\mathbb{R}^n$-ben . . . 51
1.53. Polarizációs formulák $\mathbb{R}^n$-ben . . . 51
1.54. Ortogonális vektorrendszer lineáris függetlensége . . . 51
1.55. Ekvivalenciareláció . . . 53
2.5. Síkbeli egyenes explicit vektoregyenlete . . . 61
2.6. Síkbeli egyenes implicit vektoregyenlete . . . 61
2.7. Síkbeli egyenes explicit egyenletrendszere . . . 62
2.8. Síkbeli egyenes (implicit) egyenlete . . . 62
2.10. Sík explicit vektoregyenlete . . . 64
2.11. Sík implicit vektoregyenlete . . . 64
2.12. Sík explicit egyenletrendszere . . . 64
2.13. Sík implicit egyenlete . . . 65
2.15. Térbeli egyenes explicit vektoregyenlete . . . 66
2.16. Térbeli egyenes explicit egyenletrendszere . . . 66
2.17. Térbeli egyenes implicit egyenletrendszere . . . 66
2.23. Ekvivalens átalakítások . . . 73
2.27. Sormodell . . . 77
2.29. Oszlopmodell . . . 78
2.34. Lépcsős alakra hozás . . . 83
2.41. A redukált lépcsős alak egyértelmű . . . 87
2.46. A kiküszöbölés műveletigénye . . . 93
2.51. Banach-féle fixponttétel . . . 98
2.56. Elégséges feltétel az iterációk konvergenciájára . 102
3.1. Főelemek oszlopai . . . 109
3.4. Kötött és szabad változók száma . . . 110
3.5. A megoldhatóság mátrixrangos feltétele . . . 111
3.6. Homogén lineáris egyenletrendszer megoldhatósága . . . 112
3.8. Megoldások lineáris kombinációja . . . 113
3.13. A kifeszített altér altér . . . 116
3.14. Megoldások altere . . . 116
3.16. Homogén és inhomogén egyenletrendszer megoldásai . . . 117
3.18. Inhomogén egyenletrendszer megoldhatósága . 118
3.20. Lineáris függetlenség eldöntése . . . 119
3.22. Elemi sorműveletek hatása a sor- és oszlopvektorokra . . . 121
3.23. Mátrix lépcsős alakjának vektorai . . . 121

3.25. Bázis ekvivalens definíciói 122
3.29. Bázis-tétel 125
3.31. Dimenzió = rang 126
3.33. Dimenziótétel (rang-nullitási tétel) 127
3.35. A sortér és a nulltér merőlegessége 128
3.37. A lineáris algebra alaptétele 129
3.38. A négy kitüntetett altér 130
3.39. Lineáris egyenletrendszer megoldásai 130
3.41. Elemi bázistranszformáció 133
4.9. Műveletek blokkmátrixokkal 147
4.10. A Kronecker-szorzat tulajdonságai 148
4.11. A Kronecker-szorzat és a vec-függvény tulajdonságai 148
4.17. Lineáris egyenletrendszer mátrixszorzatos alakja 154
4.19. Mátrixszorzás és lineáris kombináció 155
4.21. Mátrix elemeinek, sor- és oszlopvektorainak előállítása 156
4.24. Koordináták változása a bázis cseréjénél 157
4.26. Bázisfelbontás 158
4.31. Elemi sorműveletek mátrixszorzással 161
4.32. A szorzat oszlopai és sorai 163
4.33. Szorzat rangja 163
5.1. Mire vigyázzunk a mátrixszorzásnál? 172
5.2. Mátrixszorzás algebrai tulajdonságai 172
5.3. Hatványozás azonosságai 174
5.6. Transzponálás tulajdonságai 176
5.9. Sorművelet inverzének mátrixa 179
5.10. Az inverz létezéséhez elég egy feltétel 179
5.11. Inverz kiszámítása elemi sorműveletekkel 180
5.13. 2×2-es mátrix inverze 181
5.14. Az inverz alaptulajdonságai 182
5.15. Az invertálhatóság és az egyenletrendszerek . . 183
5.19. Invertálhatóság és bázis 186
5.20. Szinguláris mátrixok 186
5.21. Az áttérés mátrixának inverze 186
5.24. Műveletek diagonális mátrixokkal 191
5.26. Műveletek permutáló mátrixokkal 192
5.28. Műveletek háromszögmátrixokkal 194
5.31. Műveletek (ferdén) szimmetrikus mátrixokkal . 194
5.32. Felbontás szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrix összegére 194
5.33. $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ szimmetrikus 195
5.37. Az LU-felbontás létezése és egyértelműsége . . 199
6.2. Ránézésre 0 determinánsok 216
6.3. Zérus értékű determináns 216
6.5. Egyenletrendszer megoldhatósága és a determináns 217
6.6. Háromszögmátrix determinánsa 218
6.8. Elemi mátrixok determinánsa 219
6.9. Permutáló mátrix determinánsa 220
6.10. Determinánsok szorzásszabálya 221
6.12. Transzponált determinánsa 222
6.14. Soronkénti additivitás 223
6.15. Felbontás kígyók determinánsainak összegére . 230
6.16. Determinánsfüggvény létezése 231
6.21. Determináns rendjének csökkentése 233
6.23. Determinánsok kifejtési tétele 235
6.27. Vandermonde-determináns értéke 238
6.28. Cramer-szabály 239
6.30. Mátrix inverzének elemei 240
6.32. Determinánsok szorzata blokkmátrixban 242
6.33. 2×2-es blokkmátrix determinánsa 243
7.2. Mátrixleképezések alapműveletei 254
7.3. Inverz mátrixleképezések 255
7.4. Mátrixleképezések alaptulajdonságai 255
7.7. Síkbeli forgatás, tükrözés, vetítés 257
7.8. Lineáris leképezés ekvivalens definíciói 257
7.9. Az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezések mátrixleképezések 257
7.13. A nyom lineáris leképezés 261
7.14. A nyom tulajdonságai 261
7.15. A forgatás mátrixa 264
7.19. Egyenes körüli forgatás – Rodrigues-formula . . 266
7.21. Egyenesre való merőleges vetítés mátrixa 267
7.22. Síkra való merőleges vetítés mátrixa 268
7.24. Síkbeli tükrözés mátrixa 269
7.25. Síkra való tükrözés mátrixa 269
7.27. Lineáris transzformáció mátrixai közti kapcsolat 274
7.30. Hasonló mátrixok hatása 275
7.31. Hasonlóságra invariáns tulajdonságok 275
7.32. Lineáris leképezés mátrixai közti kapcsolat . . . 276
7.33. Lineáris leképezések mátrixai 276
7.38. Dimenziótétel lineáris leképezésekre 278
7.39. Lineáris transzformáció determinánsa és a térfogat 278
7.40. Alterek összege 280
7.41. Kiegészítő alterek tulajdonságai 280
7.43. A merőleges kiegészítő altér tulajdonságai . . . 282
7.44. Altérre való vetítés mátrixa 283
7.46. Merőleges vetítés mátrixai 284
7.48. Legjobb közelítés tétele 285
7.49. Vektor felbontása összetevőkre 286
7.51. Egyenletrendszer optimális megoldása 287
7.53. Lineáris regresszió 290
7.54. Linearizálható regressziós modellek 290
7.57. A projekció tulajdonságai 292
7.59. A vetítés ekvivalens definíciója 293
7.60. Mikor merőleges egy vetítés? 293
7.63. A pszeudoinverz mátrixa 296
7.65. Moore–Penrose-tétel 299
7.66. $\mathbf{A}^+\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}\mathbf{A}^+$ merőleges vetítés 300
7.67. Optimális megoldás pszeudoinverzzel 300

7.70. Ortogonális vektorok függetlensége 304
7.71. Legjobb közelítés ONB esetén 305
7.75. Szemiortogonális mátrixok ekvivalens definíciói 307
7.76. Ortogonális mátrixok ekvivalens definíciói . . . 307
7.78. Ortogonális mátrixhoz tartozó mátrixleképezés 308
7.79. Ortogonális mátrixok tulajdonságai 309
7.80. 310
7.82. Egy vektor tükrözése egy másikba 312
7.84. Gram–Schmidt-ortogonalizáció 313
7.88. QR-felbontás létezése és egyértelműsége 316
7.91. Legkisebb négyzetek QR-felbontással 320
7.95. Az adjungált tulajdonságai 324
7.96. A komplex skaláris szorzás tulajdonságai 324
7.97. Komplex mátrix kitüntetett alterei 326
7.99. Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség 326
7.101Fourier-összeg helyettesítési értékei 329
7.102A Fourier-mátrixok tulajdonságai 331
7.104A DFT tulajdonságai 333
7.107Gyors Fourier-transzformáció 337
7.109Jacobi-mátrix 345
7.112Láncszabály 351
8.4. A sajátvektorok alterei 358
8.8. Háromszögmátrixok sajátértékei 360
8.9. Determináns, nyom és a sajátértékek 361
8.11. A 2×2-es szimmetrikus mátrixok sajátalterei . 362
8.16. Mátrix invertálhatósága és a 0 sajátérték 367
8.17. Mátrix hatványainak sajátértékei és sajátvektorai 367
8.18. Mátrix hatványainak hatása 368
8.19. Speciális mátrixok sajátértéke 369
8.20. Speciális komplex mátrixok sajátértékei 369
8.23. Sajátérékhez kapcsolódó invariánsok 372
8.25. Diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltétele 373
8.28. Diagonalizálható mátrix polinomja 376
8.29. Cayley–Hamilton-tétel 377
8.30. Különböző sajátértékek sajátvektorai 378
8.31. Különböző sajátértékek és a diagonalizálhatóság 379
8.33. Algebrai és geometriai multiplicitás kapcsolata . 380
8.34. Diagonalizálhatóság és a geometriai multiplicitás 381
8.36. Diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontása . 383
8.39. A direkt összeg tulajdonságai 385
8.40. Diagonalizálható mátrixok sajátalterei 385
8.42. Gersgorin-körök tulajdonságai 388
8.44. Domináns főátlójú mátrix invertálhatósága . . . 390
8.46. Hatványmódszer 392
9.2. Szimmetrikus mátrix sajátalterei 396
9.3. Valós spektráltétel 396
9.5. Schur-felbontás 399
9.7. Valós mátrix komplex sajátértéke 400
9.8. Valós Schur-felbontás 401
9.11. Unitér diaginalizálhatóság 403
9.12. Valós normális mátrixok blokkdiagonalizálhatósága 404
9.13. Ortogonálisan blokkdiagonalizálható mátrixok . 404
9.16. Főtengelytétel 409
9.20. Definitség meghatározása a sajátértékekből . . . 412
9.21. Pozitív szemidefinit mátrixok faktorizációi . . . 412
9.23. Pozitív definit mátrixok faktorizációi 413
9.25. A definitség és a főminorok kapcsolata 415
10.1. 420
10.7. Az SVD létezése és $\mathbf{\Sigma}$ egyértelműsége 425
10.8. Egységgömb képe 426
10.9. Polárfelbontás 427
10.11A pszeudoinverz kiszámítása 429
10.17Minden vektornorma ekvivalens 436
10.19Frobenius-norma ekvivalens alakjai 437
10.20. 437
10.24Indukált norma tulajdonságai 439
10.251-, 2- és ∞-norma kiszámítása 440
10.26Kis rangú approximáció tétele – Eckart–Young-tétel 442
11.2. Blokkmátrixok és az invariáns alterek 448
11.4. Jordan-lánc által kifeszített altér 449
11.7. Jordan-normálalak 452
11.8. Jordan-normálalak 453
11.9. A Jordan-alak egyértelműsége 455
11.13A minimálpolinom tulajdonságai 459
11.14Jordan normálalak és minimálpolinom 459
11.15. 460
11.16. 461
11.19Mátrix polinomja 468
11.23Spektrumon azonos értékeket adó polinomok . 471
11.26A definíciók ekvivalenciája 473
12.2. Perron-tétel: pozitív sajátérték és sajátvektor . . 478
12.3. Perron-tétel: egyszeres és domináns sajátérték . 480
12.4. Perron–Frobenius-tétel – gyenge változat 481
12.5. Collatz–Wielandt-tétel 481
12.6. Nemnegatív mátrixok spektrálsugarának becslése 482
12.7. Reducibilis és irreducibilis mátrixok 483
12.9. Perron–Frobenius-tétel – erős változat 485
12.10Feltétel mátrix primitivitására 485
12.12Perron–Frobenius-tétel – sajátértékek a spektrálkörön 487
12.13Sztochasztikus mátrix sajátértékei 489
12.14Frobenius–Kőnig-tétel 490
12.15Pozitív kígyó 490
12.16Birkhoff-tétel 490
13.2. Vektortér alaptulajdonságai 498
13.3. Függvényterek 498
13.5. Lineáris leképezések tere 501
13.6. Lineáris leképezések kompozíciója 501

13.7. Lineáris leképezés inverze 501
13.10Független halmaz bővíthetősége 503
13.11Steinitz kicserélési lemmája 504
13.12Kicserélési tétel 504
13.13A Steintz-lemma következményei 505
13.14Lineáris leképezés megadása egy bázison 505
13.15A véges dimenziós tér $\mathbb{F}^n$-nel izomorf 505
13.16Alterek metszetének és összegének dimenziója . 506
13.17Dimenziótétel (rang–nullitási-tétel) 506
13.18. 507
13.20A faktortér vektortér 508
13.21Faktortér dimenziója 508
13.22Izomorfizmustétel 509
13.24Duális bázis 510
13.25Áttérés mátrixa a duális térben 511
13.26Duális tér duálisa – biduális tér 511
13.27Kvadratúra-szabály 512
13.29Adjungált mátrixa 513
13.34Bilineáris függvény Gram-mátrixa 518
13.35Bilineáris függvény mátrixa báziscsere után . . . 519
13.38Alternáló és szimplektikus függvények 520
13.39Speciális bilineáris függvények mátrixai 520
13.40A diagonalizálhatóság feltétele 521
13.43Sylvester-féle tehetetlenségi tétel 522
13.44Polarizációs formulák 523
13.45Kvadratikus alak és bilineáris függvény 524
13.47Multilineáris leképezések tere 525
13.48Multilineáris leképezések terének dimenziója . . 526
13.49Multilineáris függvény mint lineáris kombináció 527
13.51Lineáris leképezések, mint tenzorok 530
13.53Tenzor koordinátái másik bázisban 531
13.55$\mathbb{R}^n$ skaláris szorzatai 535
13.57A norma alaptulajdonságai 536
13.58A norma további tulajdonságai 536
13.59Ortonormált vektorhalmazok 537
13.60Euklideszi terek izomorfiája 537
13.61Riesz reprezentációs tétele 538
13.63Véges dimenziós euklideszi tér Hilbert-tér . . . 539
13.65Adjungált leképezés létezése 539
13.66Az adjungált leképezések tulajdonságai 540
13.67Az adjungált transzformációk tulajdonságai . . 541
13.69Speciális transzformációk és mátrixaik 541

Definíciók

. Irányított szakasz, kötött vektor 19
. Vektor 20
. Zérusvektor 20
. Vektor hossza 21
. Vektorok szöge 21
1.1. Két vektor összege – háromszögmódszer 21
1.3. Vektorok különbsége 22
1.4. Vektor szorzása skalárral 23
1.6. Lineáris kombináció 23
1.10. Vektorok függetlensége 25
1.15. Két vektor skaláris szorzata 30
. Egységvektor 33
1.24. Vektori szorzás 35
1.31. Vegyes szorzat 38
. Vektor koordinátás alakja 2D-ben 40
. Vektor koordinátás alakja 3D-ben 40
1.39. 44
1.40. Vektorműveletek $\mathbb{R}^n$-ben 45
1.43. Standard bázis 46
1.46. Skaláris szorzás $\mathbb{R}^n$-ben 48
1.48. Abszolút érték, szög, merőlegesség, távolság . . 49
2.3. Alakzat implicit egyenletrendszere 60
2.4. Alakzat explicit egyenletrendszere 60
. Hipersík 69
2.19. Lineáris egyenlet 71
2.20. Lineáris egyenletrendszer 72
2.21. Lineáris egyenletrendszer megoldása 72
2.22. Ekvivalens egyenletrendszerek 73
2.30. Elemi sorműveletek 80
2.31. Lépcsős alak 80
2.37. Redukált lépcsős alak 85
. rref függvény 88
2.42. Szimultán egyenletrendszerek 88
2.55. Soronként domináns főátlójú mátrix 101
3.2. Mátrix rangja 110
3.9. Vektortér 114
3.10. Altér 114
3.12. Kifeszített altér 116
3.15. Nulltér 116
3.17. Sortér, oszloptér 118
3.24. Bázis 122
3.30. Dimenzió 126
. Vektorrendszer rangja 126
. Nullitás 126
. Merőleges altér és merőleges kiegészítő altér . . 129
3.36. Kitüntetett alterek 129
4.1. Lineáris helyettesítés 143
. Adott típusú mátrixok tere 144
. Mátrixok egyenlősége 144
4.3. Mátrixok összege, különbsége 144
4.4. Zérusmátrix 145
4.5. Mátrix szorzása skalárral 145
4.7. Mátrixok szorzása 146
4.12. Hipermátrix 149
4.13. Hipermátrix transzponáltja 149
4.15. Diadikus szorzat 153
4.23. Áttérés mátrixa 157

4.28. Egységmátrix . . . 160
4.29. Elemi mátrixok . . . 160
5.7. Mátrix inverze . . . 178
. . . . 178
5.25. Permutáló mátrix, kígyó . . . 192
5.27. Háromszögmátrix . . . 193
5.29. Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok 194
5.34. LU-felbontás . . . 197
5.40. PLU-felbontás . . . 203
. . . . 213
6.1. Determináns . . . 215
6.17. Determináns . . . 231
6.19. Előjeles aldetermináns . . . 232
6.26. Vandermonde-determináns . . . 237
. . . . 253
7.5. Lineáris leképezés . . . 256
7.12. Mátrix nyoma . . . 261
7.29. Hasonlóság . . . 274
7.35. Lineáris leképezés rangja és nullitása . . . 277
7.36. Lineáris transzformáció determinánsa és nyoma 277
. Kiegészítő altér . . . 280
7.42. Direkt összeg . . . 282
. Altérre való merőleges vetület . . . 283
. Teljes oszloprangú vagy sorrangú mátrix . . . 283
. Optimális megoldás . . . 287
. Normálegyenlet-rendszer . . . 287
. Regressziós egyenes . . . 289
7.56. Vetítés altérre . . . 291
7.61. A Moore–Penrose-féle pszeudoinverz . . . 295
. Ortogonális és ortonormált bázis . . . 304
7.73. Ortogonális és szemiortogonális mátrix . . . 306
. Givens-forgatás . . . 311
. Householder-tükrözés . . . 312
7.86. QR-felbontás . . . 315
7.93. Komplex mátrix adjungáltja . . . 323
7.94. Komplex vektorok skaláris szorzata . . . 324
. . . . 326
. Komplex vektorok hossza, távolsága, merőlegessége . . . 326
7.100Unitér mátrix . . . 327
. . . . 329
7.103Diszkrét Fourier-transzformáció (DFT) . . . 332
. . . . 335
7.108Differenciálhatóság . . . 344
8.2. Sajátérték, sajátvektor . . . 358
8.5. Sajátaltér . . . 358
. . . . 359
8.21. Lineáris transzformáció sajátértéke, sajátvektora 371
8.24. Diagonalizálhatóság . . . 373
. Bal sajátvektor . . . 375
8.38. Alterek direkt összege . . . 384
. Gersgorin-körök . . . 388
. Szigorúan domináns sajátpár . . . 390
9.1. Ortogonális diagonalizálhatóság . . . 395
9.9. Unitér diagonalizálhatóság . . . 402
9.10. Normális mátrix . . . 402
. . . . 407
9.15. Kvadratikus alak . . . 408
9.18. Kvadratikus alakok és mátrixok definitsége . . . 410
. Főminor, vezető főminor . . . 415
10.2. Szinguláris érték . . . 420
10.4. Redukált szinguláris felbontás és diadikus alakja 422
10.5. Szinguláris felbontás . . . 423
. Polárfelbontás . . . 427
10.13Euklideszi norma . . . 432
10.14p-norma . . . 433
10.15Norma . . . 434
10.16Normák ekvivalenciája . . . 436
10.18Frobenius-norma . . . 437
10.21Mátrixnorma . . . 438
10.22. . . . 438
10.23Indukált norma . . . 438
11.1. Invariáns altér . . . 447
11.3. Általánosított sajátvektor . . . 449
11.6. Jordan-blokk . . . 452
11.12Minimálpolinom . . . 458
11.20Spektrumon definiált függvény . . . 469
11.21Mátrixfüggvény a Jordan-alakból . . . 469
11.24Mátrixfüggvény interpolációs polinommal . . . 471
12.1. Primitív, ireducibilis és reducibilis mátrixok . . . 477
. . . . 479
. Sztochasztikus vektorok és mátrixok . . . 489
. Duplán sztochasztikus mátrixok . . . 489
13.1. Vektortér . . . 497
13.4. Lineáris leképezés . . . 499
13.8. Izomorfizmus . . . 502
13.9. Lineáris függetlenség, generátorrendszer, bázis . 502
13.19Faktortér . . . 507
13.23Duális tér . . . 510
13.28Lineáris leképezés adjungáltja . . . 513
13.30Vektorterek direkt szorzata és összege . . . 514
13.31Bilineáris függvény . . . 517
13.32Szeszkvilineáris függvény . . . 518
13.33Gram-mátrix . . . 518
13.36Kongruens mátrixok . . . 519
13.37Speciális bilineáris függvények . . . 520
13.42Bilineáris függvény tehetlensége (szignatúrája) . 522
13.46Multilineáris leképezés . . . 524
13.50Tenzorszorzat . . . 529
13.52. . . . 531
13.54Skaláris szorzás, euklideszi tér . . . 534
13.56Komplex skaláris szorzás, euklideszi tér . . . 535

13.62 Hilbert-tér . . . 539
13.64 Lineáris leképezés adjungáltja . . . 539
13.68 Speciális transzformációk . . . 541
1.1. Test . . . 544
1.5. $\mathbb{Z}_m$ . . . 548
1.9. Lebegőpontos számok . . . 551

Kidolgozott példák

1.16. Skaláris szorzat . . . 30
1.25. Vektori szorzat meghatározása . . . 36
1.26. **i**, **j**, **k** vektori szorzata . . . 36
1.32. Vegyes szorzat . . . 38
1.33. Vektorok koordinátái . . . 40
1.35. Skaláris szorzás koordináta-rendszerben . . . 42
1.49. Vektorok szöge és távolsága . . . 49
2.1. Az $x + y = 1$ egyenlet . . . 59
2.2. Az $x^2 + y^2 = 1$ egyenlet . . . 59
2.9. Síkbeli egyenes egyenletei . . . 63
2.14. Sík egyenletei . . . 65
2.18. Térbeli egyenes egyenletrendszerei . . . 67
2.24. Mátrixok és elemeik . . . 74
2.25. Mátrix használata a megoldáshoz . . . 75
2.26. Sormodell két kétismeretlenes egyenlettel . . . 76
2.28. Oszlopmodell . . . 78
2.32. Gauss-módszer, egy megoldás . . . 81
2.33. Gauss-módszer, végtelen sok megoldás . . . 81
2.35. Homogén lineáris egyenletrendszer megoldása . 83
2.36. Síkok metszésvonalának meghatározása . . . 84
2.38. Redukált lépcsős alakra hozás . . . 85
2.39. Gauss – Jordan-módszer, egy megoldás . . . 86
2.40. Gauss – Jordan-módszer, végtelen sok megoldás 86
2.43. Szimultán egyenletrendszer megoldása . . . 88
2.44. Egyenletrendszer $\mathbb{Z}_2$ fölött . . . 89
2.45. Egyenletrendszer $\mathbb{Z}_5$ fölött . . . 90
2.47. Instabil egyenletrendszer . . . 94
2.48. Gauss-módszer lebegőpontos számokkal . . . 95
2.49. Részleges főelem-kiválasztás . . . 96
2.50. Sor szorzása . . . 97
2.52. Jacobi-iteráció . . . 99
2.53. Gauss – Seidel-iteráció . . . 100
2.54. Divergens iteráció . . . 101
3.3. Mátrix rangjának kiszámítása . . . 110
3.7. Egyenletrendszer megoldásainak száma . . . 112
3.11. Altér . . . 115
3.19. Kifeszített altér vektorai . . . 118
3.21. Vektorok lineáris függetlenségének eldöntése . . 119
3.26. Altér bázisának meghatározása . . . 123
3.27. Vektor felírása a bázisvektorok lineáris kombinációjaként . . . 123
3.28. Vektor koordinátás alakja a $\mathcal{B}$ bázisban . . . 124
3.32. Dimenzió kiszámítása . . . 127
3.34. Vektorokra merőleges altér . . . 128
3.40. Lineáris egyenletrendszer sortérbe eső megoldása . . . 131
3.42. Egyenletrendszer megoldása elemi bázistranszformációval . . . 133
4.2. Lineáris helyettesítések kompozíciója . . . 143
4.6. Mátrixok lineáris kombinációja . . . 145
4.8. Mátrixok szorzása . . . 146
4.14. Mátrixok szorzása . . . 151
4.16. Skaláris és diadikus szorzat . . . 153
4.18. Szimultán egyenletrendszer mátrixszorzatos alak 154
4.20. Nulltér felírása mátrixszorzással . . . 155
4.22. Áttérés standard bázisra . . . 157
4.25. Áttérés mátrixa . . . 158
4.27. Bázisfelbontás . . . 159
4.30. Mátrix balról szorzása elemi mátrixszal . . . 161
5.4. Mátrix hatványozása . . . 174
5.5. Polinom helyettesítési értéke . . . 175
5.8. $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ inverze nilpotens $\mathbf{A}$ esetén . . . 178
5.12. Az inverz kiszámítása . . . 180
5.16. Egyenletrendszer megoldása mátrixinvertálással 184
5.17. Mátrixegyenlet megoldása mátrixinvertálással . 184
5.18. Mátrix elemi mátrixok szorzatára bontása . . . 185
5.22. Az áttérés mátrixának inverze . . . 186
5.23. Áttérés mátrixa . . . 187
5.30. Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok 194
5.35. Az LU-felbontás kiszámítása . . . 198
5.38. Egyenletrendszer megoldása LU-felbontással . . 200
5.39. Mátrix invertálása LU-felbontással . . . 201
5.41. PLU-felbontás . . . 204
5.42. . . . 205
6.4. Zérus értékű determinánsok . . . 216
6.7. Determináns kiszámítása háromszög alakra hozással . . . 219
6.11. Determináns kiszámolása PLU-felbontásból . . 222
6.13. Determináns kiszámítása elemi oszlopműveletekkel . . . 223
6.18. Polinomok determinánsa . . . 231
6.20. Előjeles aldetermináns . . . 233
6.22. Determináns rendjének csökkentése . . . 234
6.24. Kifejtési tétel . . . 236
6.25. Interpoláció másodfokú polinomokra . . . 236
6.29. Cramer-szabály . . . 239
6.31. Mátrix inverze . . . 241
7.1. Vektori szorzással definiált mátrixleképezés . . 254
7.6. A deriválás és az integrálás lineáris leképezés . 256
7.10. . . . 258
7.11. Mátrixleképezés ábrázolása az egységnégyzetrács képével . . . 259
7.16. Forgatás egy tetszőleges pont körül . . . 264

7.17. Koordinátatengely körüli forgatás a térben . . . 265
7.18. A forgatás mátrixának inverze 265
7.20. Forgatás mátrixa 267
7.23. Síkra eső merőleges vetület kiszámítása 268
7.26. Vetítés síkra 269
7.28. Lineáris transzformáció mátrixa másik bázisban 274
7.34. Lineáris leképezés mátrixa másik bázisban . . . 276
7.37. Rang, nullitás, determináns, nyom 277
7.45. Merőleges vetület kiszámítása 283
7.47. 285
7.50. 286
7.52. Egyenletrendszer optimális megoldásai 288
7.55. 290
7.58. Projekció mátrixa 292
7.62. Néhány pszeudoinverz 295
7.64. A pszeudoinverz kiszámítása 298
7.68. Egyenletrendszer optimális megoldása 301
7.69. Egyenletrendszer optimális megoldása 301
7.72. Egy pont síkra való merőleges vetülete 306
7.74. Ortogonális mátrixok 306
7.77. Ortogonális mátrixok inverze 308
7.81. Forgatás tengelye és szöge 310
7.83. Householder-tükrözés 313
7.85. Gram–Schmidt-ortogonalizáció 314
7.87. QR-felbontás kiszámítása 316
7.89. QR-felbontás Givens-forgatásokkal 317
7.90. QR-felbontás Householder-tükrözéssel 319
7.92. Egyenletrendszer optimális megoldása 320
7.98. Önadjungált mátrixok 326
7.105DFT kiszámítása 334
7.106Magas frekvenciájú összetevők szűrése 334
7.110Jacobi-mátrix kiszámítása 346
7.111Függvényérték becslése Jacobi-mátrixszal 348
7.113Láncszabály 351
8.1. Jó bázis tükrözéshez 357
8.3. Sajátérték, sajátvektor 358
8.6. Sajátaltér bázisának meghatározása 358
8.7. Karakterisztikus polinom felírása 360
8.10. 2×2-es mátrixok sajátvektorainak szemléltetése 361
8.12. Az összes sajátérték és sajátvektor meghatározása 363
8.13. Magasabbfokú karakterisztikus egyenlet 364
8.14. Komplex sajátértékek és komplex elemű sajátvektorok 365
8.15. Sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása . 366
8.22. Lineáris transzformáció sajátértéke, sajátaltere . 371
8.26. Mátrix diagonalizálása 374
8.27. Sajátfelbontás diadikus alakja és a bal sajátvektorok 375
8.32. Diagonalizálhatóság megállapítása 379
8.35. Lineáris transzformáció diagonalizálása 381
8.37. Spektrálfelbontás 384
8.41. Gersgorin-körök 388
8.43. Gersgorin-körök használata 389
8.45. 391
9.4. Mátrix ortogonális diagonalizálása 398
9.6. Schur-felbontás 400
9.14. Másodfokú polinom mátrixszorzatos alakja . . . 407
9.17. Főtengely-transzformáció 410
9.19. Definitség meghatározása a sajátértékekből . . . 411
9.22. Felbontás $\mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}$ és $\mathbf{B}^2$ szorzattá 413
9.24. Cholesky-felbontás 414
10.3. Szinguláris értékek és vektorok 421
10.6. Szinguláris felbontás meghatározása 423
10.10Polárfelbontás kiszámítása 428
10.12A pszeudoinverz kiszámítása SVD-ből 429
11.5. Jordan-lánc és Jordan-bázis keresése 450
11.10Jordan-blokkok mérete 457
11.11Jordan-blokkok mérete 457
11.17Jordan-bázis előállítása 463
11.18Mátrixok hatványai 467
11.22Mátrix exponenciális függvénye 470
11.25Exponenciális függvény Hermite-polinommal . 473
11.27Fourier-mátrix függvényei 474
12.8. 483
12.11Primitív mátrixok 486
12.17Leontief zárt modell 491
12.18Leontief nyílt modell 492
13.41Bilineáris függvény diagonalizálása 521
1.2. Műveletek paritásokkal 546
1.3. XOR és AND 547
1.4. Számolás az órán 547
1.6. Számolás $\mathbb{Z}_m$-ben 548
1.7. Művelettábla 548
1.8. Osztás, reciprok 549
1.10. Lebegőpontos számok értéke 552
1.11. Lebegőpontos számok halmaza 552
1.12. Alapműveletek lebegőpontos számokkal 553
1.13. Flop és flops 554

I. rész

A lineáris algebra forrásai

A lineáris algebra két fő forrásának egyike a geometria, másika az algebra vidékéről ered. Mindkét forrás jól jellemezhető egy-egy elemi fogalommal: az egyik a vektor, a másik a lineáris egyenletrendszer. E könyv első része e két fogalmat vizsgálja egészen elemi, középiskolai szintről indulva. A lineáris algebra mélyebb fogalmai már itt fölbukkannak, de csak nagyon egyszerű és a legkevésbé absztrakt formájukban. Az első rész végére látni fogjuk, hogy e két forrás már ezen a bevezető szinten szétválaszthatatlanul egyetlen folyammá válik.

Hang gliding @ Pule (CC) on flickr by purplemattfish

1

Vektorok

Általánosan elterjedt nézet szerint a természeti jelenségek leírásakor sok összefüggést számszerű adatokkal, ún. *skalárokkal* vagy *skalármennyiségekkel* fejezünk ki, míg mások leírásához a számadat mellett egy irány megadása is szükséges; ez utóbbiakat nevezzük *vektoroknak*. A valóság ennél sokkal színesebb: a téridő 4-dimenziós vektoraitól, a bitvektorokon, a gazdasági számításokban használt többszázezer-dimenziós, vagy az internetkeresők által kezelt sokmillió-dimenziós vektorokon át a matematika különböző területein gyümölcsöző absztrakt vektorfogalomig széles a skála.

Vektorok a 2- és 3-dimenziós térben

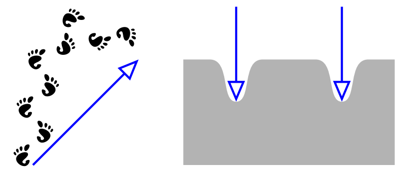
E szakaszban a vektor szemléletes, geometriai fogalmával ismerkedünk. A vektorok összeadásán és skalárral való szorzásán keresztül a lineáris kombináció és a lineáris függetlenség fogalmáig jutunk. E szakasz kulcsfogalma: egy vektor lineárisan független vektorok lineáris kombinációként való előállítása.

Irányított szakasz, kötött és szabad vektor Tekintsünk egy sárkányrepülőt repülés közben. Számtalan skalár- és vektormennyiség írja le állapotát. A földtől való távolság, a légnyomás, a légellenállási együttható vagy az emelkedés szöge skalármennyiségek, míg vektormennyiségek a sebesség- és gyorsulásvektor, a szárnyra ható felhajtóerő, a gravitációs erő, a szél ereje vagy az elmozdulást leíró vektor.

A vektor fogalma kapcsolatban van az irányított szakasz fogalmával. Irányított szakaszon olyan szakaszt értünk, melynek végpontjain megadunk egy sorrendet, azaz kijelöljük, hogy melyik a *kezdő-* és melyik a *végpontja*. Más szóhasználatban az irányított szakaszt szokás *kötött vektornak* is nevezni. Az A kezdőpontú és B végpontú irányított szakaszt $\overrightarrow{AB}$ jelöli.

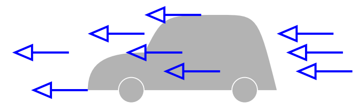
Skalár, skaláris: a *lépcső*, *létra* jelentésű latin scalae (scālae) szóból ered. E szó származéka a skála szó is, mely jól őrzi az eredeti jelentést. A skalár vagy skaláris szót a matematikában szám vagy számszerű értelemben használjuk, például olyankor, amikor egy mennyiségről azt akarjuk hangsúlyozni, hogy irány nélküli, azaz nem vektor jellegű.

Több jelenség leírására a kötött vektor alkalmas. Természetes példa az elmozdulásvektor, mely megadja, hogy egy tárgy a tér mely pontjából melyik pontjába jutott. Másik példa kötött vektorra a rugalmas testen alakváltozást okozó erőt leíró vektor (1.1. ábra).



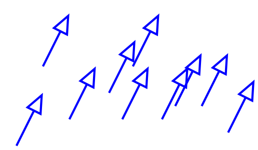
1.1. ábra: Kötött vektorok: *(a)* elmozdulásvektor (lábnyomokkal), *(b)* rugalmas testen alakváltozást okozó erő vektora

Alkalmazásokban gyakran előfordul, hogy egy jelenség különböző irányított szakaszokkal is ugyanúgy leírható. Például ha egy tárgy mozgását egy olyan irányított szakasszal jellemezzük, melynek hossza az időegység alatt megtett út hosszával egyenlő, iránya pedig a mozgás irányát jelzi, akkor mindegy hogy a tér melyik pontjából indítjuk e szakaszt, a mozgást ugyanúgy leírja (1.2. ábra). Ekkor tehát nem a két pont, hanem azok viszonya a kérdés, azaz hogy az egyik pont a másiktól milyen *távolságra*, és milyen *irányban* van. Az, hogy a két pont pontosan hol van, nem lényeges. Ekkor bármely két irányított szakasz, mely párhuzamosan egymásba tolható, ugyanazt a viszonyt fejezi ki. Az így kapott fogalmat a fizikában *szabad vektornak* nevezik. Ez a lineáris algebra vektor-fogalmának egyik forrása: a *vektor* a geometriában irányított szakasszal reprezentálható azt hozzávéve, hogy két irányított szakasz pontosan akkor reprezentálja ugyanazt a vektort, ha párhuzamosan egymásba tolhatók (ld. 1.3 ábra).



1.2. ábra: Példa szabad vektorra

VEKTOR: a *hordozó*, *vivő*, *utazó* jelentésű latin *vector* szóból származik. A tudomány más területein hordozó anyag, az élettanban vírushordozó értelemben használják.

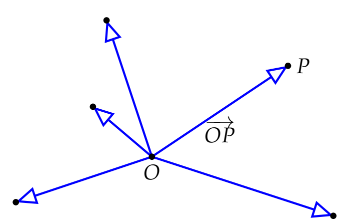


1.3. ábra: Ugyanazt a vektort reprezentáló irányított szakaszok

Vektorok jelölésére félkövér kisbetűket használunk, pl. **x**, **u**, **v**, stb. A műszaki és fizikai szakirodalomban a félkövér nagy betű is előfordul, pl. az **F** erő, a **B** indukció is vektormennyiségek.

VEKTOROK JELÖLÉSE: Műszaki, fizikai szövegek szedésének tipográfiai szabályait az ISO 31-11 szabvány írja le. Eszerint a vektorok félkövér betűkkel szedendők. Kézírásban aláhúzással, vagy fölé írt nyíllal szokás jelezni a vektort (pl. $\underline{x}$, $\underline{u}$, $\vec{v}$,...), de körültekintő jelölésrendszer és jegyzetelés esetén elhagyhatók a jelzések. Felsőbb matematikai művek nem használják e szabványt, mondván, kiderül a szövegből, hogy vektort jelölnek-e a betűk (x, u, v,...).

Vektor magadása egy irányított szakasszal Egy vektor megadható egy irányított szakasszal, azaz két pont és a köztük lévő sorrend kijelölésével. Valójában ennyi adat felesleges, hisz egy irányított szakasz önmagával párhuzamosan eltolva ugyanazt a vektort adja meg, ezért például kiköthető, hogy a kezdőpont a sík (tér) egy előre kijelölt rögzített pontja legyen. Ezt a közös kezdőpontot nevezzük *origónak*. Egy origóból induló irányított szakaszt egyértelműen definiál a végpontja, így a vektorok megadásához elég egyetlen pont, a végpont megadása. Ezzel a sík vagy tér pontjai és vektorai közt kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesíthetünk (1.4. ábra). Az origóból egy P pontba húzott irányított $\overrightarrow{OP}$ szakaszt a ponthoz tartozó *helyvektornak* is szokás nevezni. Világos, hogy minden vektor reprezentánsai közt pontosan egy helyvektor van.



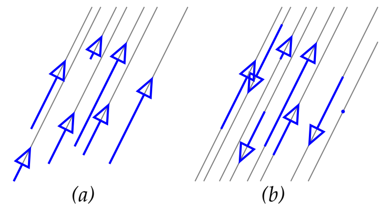
1.4. ábra: A sík pontjai és vektorai közti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés: egy P pontnak az $\overrightarrow{OP}$ vektor felel meg, az origónak a nullvektor.

A későbbiekben gyakran fogunk egy ponthalmazt az origóból a ponthalmaz pontjaiba mutató vektorokkal jellemezni. Amikor vektorok végpontjairól beszélünk, mindig a vektorokat megadó, az origóból indított irányított szakaszok végpontjaira gondolunk.

Az olyan vektort, melynek kezdő és végpontja egybeesik, *zérusvektornak* vagy *nullvektornak* nevezzük. A zérusvektort általában félkövér zérussal, azaz **0**-val jelöljük. A pontok és vektorok közti megfeleltetésben a zérusvektornak az origó felel meg.

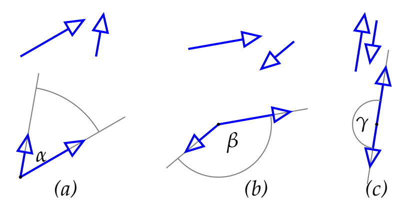
Vektor megadása hossz és irány segítségével Ha tudunk távolságot mérni és irányt meghatározni, akkor a vektor megadható hosszával és irányával is. A vektor *hosszát*, azaz két végpontjának távolságát, a vektor *abszolút értékének* is nevezzük. Az $\mathbf{a}$ vektor abszolút értékét $|\mathbf{a}|$ jelöli. Vektor abszolút értékét a vektor *euklideszi normájának* is nevezik, ugyanis speciális esete egy általánosabb fogalomnak, a normának. Az $\mathbf{a}$ vektor (euklideszi) normájának jelölése az abszolút értékre emlékeztet: $\|\mathbf{a}\|$.

Az irány fogalmát az 1.73. feladatban definiáljuk. Itt megelégszünk annyival, hogy két nemzérus vektort *azonos irányú*nak vagy *egyirányú*nak nevezünk, ha a kezdőpontjukból induló, és a végpontjukon áthaladó félegyenesek párhuzamos eltolással fedésbe hozhatók (1.5 *(a)* ábra). Két nemzérus vektort *kollineáris*nak vagy *párhuzamos*nak nevezünk, ha az őket tartalmazó egyenesek párhuzamosak. Két vektort, amely párhuzamos, de nem egyirányú, *ellenkező irányú*nak nevezünk (1.5 *(b)* ábra). A zérusvektor irányát tetszőlegesnek tekintjük, így az bármely vektorral egyirányú. Belátható, hogy a vektort egyértelműen meghatározza hossza és iránya.



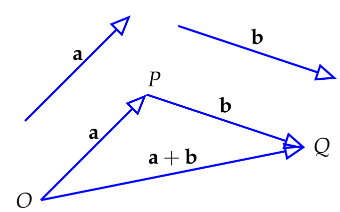
1.5. ábra: *(a)* egyirányú vektorok, *(b)* kollineáris (párhuzamos) vektorok, vannak köztük egyirányúak és ellenkező irányúak

Vektor irányának meghatározásakor gyakran hívjuk segítségül a szög fogalmát. Két vektor szögén azt a szöget értjük, melyet a sík vagy tér egy tetszőleges pontjából kiinduló és az adott vektorokkal egyirányú félegyenesek zárnak be (1.6. ábra). Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok szögét $(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle$ jelöli. Két vektor szöge tehát mindig $0°$ és $180°$ – radiánban mérve 0 és π – közé esik, beleértve a határokat is. Egyirányú vektorok szöge 0, ellenkező irányúaké π.



1.6. ábra: Két vektor szöge ($0 \le \alpha, \beta, \gamma \le \pi$). Az ábra felső felén a két adott vektor, alatta szögük meghatározásának módja szerepel.

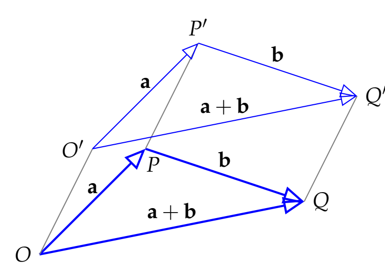
Vektorműveletek a 2- és 3-dimenziós térben A vektorműveletek – az összeadás és a számmal való szorzás – definíciója természetes módon adódik, ha a vektorok tipikus alkalmazásaira gondolunk. Pl. magától értetődő, hogy két elmozdulás összegén az elmozgatások egymás után való elvégzését, egy eltolás kétszeresén egy azonos irányú, de kétszer olyan hosszú eltolást értsünk.



1.7. ábra: Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor összege

1.1. DEFINÍCIÓ (KÉT VEKTOR ÖSSZEGE – HÁROMSZÖGMÓDSZER). *Legyen adva két vektor,* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$. *Vegyünk föl egy tetszőleges* O *pontot. Indítsunk belőle egy* $\mathbf{a}$*-val egyenlő* $\overrightarrow{OP}$ *vektort, ennek végpontjából pedig egy* $\mathbf{b}$*-vel egyenlő* $\overrightarrow{PQ}$ *vektort. Az* $\overrightarrow{OQ}$ *vektort az* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektorok összegének nevezzük és* $\mathbf{a}+\mathbf{b}$*-vel jelöljük (ld. 1.7. ábra).*

Könnyen belátható, hogy az eredmény független az O pont megválasztásától, tehát vektorok összeadásának művelete definiálható e módszerrel (a bizonyítás leolvasható az 1.8. ábráról).

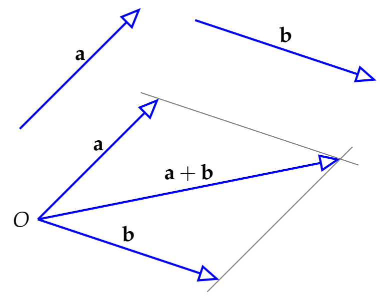


1.8. ábra: Az összeg független az O pont megválasztásától, ugyanis $\overrightarrow{OQ}$ és $\overrightarrow{O'Q'}$ azonos vektort reprezentál.

Egy másik módszert is ismertetünk két nem kollineáris vektor összegének megszerkesztésére:

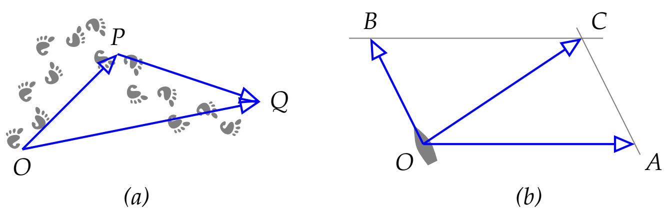
1.2. ÁLLÍTÁS (PARALELOGRAMMA-MÓDSZER). *A közös kezdőpontból indított* **a** *és* **b** *vektorok összege megkapható abból a paralelogrammából, melynek két szomszédos oldala* **a** *és* **b**, *ekkor az összeg a közös kezdőpontból indított és a paralelogramma szemközti csúcsába futó vektor.*

► Ha **a** és **b** *nem kollineárisak*, akkor összegük megkapható pl. úgy, hogy **a** végpontján át egy **b** egyenesével, **b** végpontján át egy **a** egyenesével párhuzamos egyenest húzunk. A közös kezdőpontból e két egyenes metszéspontjába futó vektor lesz az összeg (ld. 1.9. ábra).



1.9. ábra: Paralelogramma-módszer

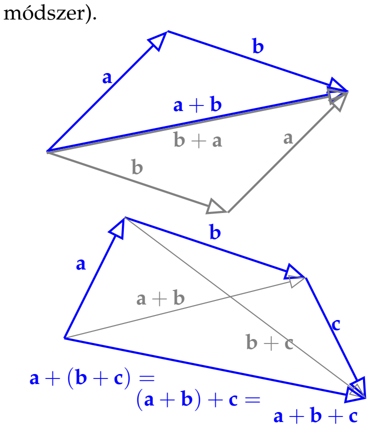
Az alkalmazásokban hol a háromszög-, hol a paralelogramma-módszer tűnik kézenfekvőbbnek (ld. 1.10).



1.10. ábra: Az *(a)* ábrán a lábnyomok O-ból P-be, majd onnan Q-ba vezetnek. Az $\overrightarrow{OP}$ és a $\overrightarrow{PQ}$ elmozdulásvektorok összege $\overrightarrow{OQ}$ (háromszögmódszer). A *(b)* ábrán a csónak az $\overrightarrow{OB}$ irányba evez, de a folyó $\overrightarrow{OA}$ irányba folyik. A két sebesség eredője, azaz összege $\overrightarrow{OC}$ (paralelogramma módszer).

Ha **a** és **b** két térbeli vektor, akkor a háromszögmódszerben és a paralelogramma-módszerben is az **a**, **b** és $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ vektorokat reprezentáló irányított szakaszok egy síkba esnek. Általában azt mondjuk, hogy néhány térbeli vektor egy síkba esik, más szóval *komplanáris*, ha van olyan sík, hogy mindegyik vektort reprezentáló irányított szakasz párhuzamosan betolható e síkba. Eszerint tehát az **a**, **b** és $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ vektorok mindig komplanárisak.

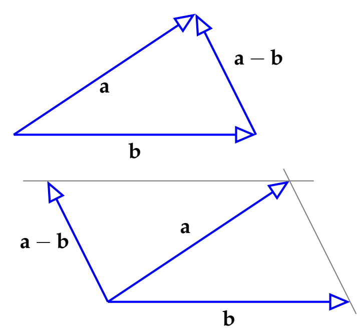
A vektorösszeadás kommutatív ($\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{b}+\mathbf{a}$) és asszociatív ($\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$). Igaz voltuk leolvasható az 1.11. ábráról. Az asszociativitás következtében több tag összeadásánál elhagyható a zárójel, például az ábrabeli három vektor összegére $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ írható.



1.11. ábra: A vektorösszeadás kommutativitása és asszociativitása.

Az **a** és **b** vektorokat közös kezdőpontból indítva – a háromszögmódszerrel – azonnal látható, hogy csak egyetlen olyan **x** vektor létezik, melyre $\mathbf{a} = \mathbf{b}+\mathbf{x}$ (ld. 1.12 (a) ábra). Ennek felhasználásával definiálható vektorok különbsége.

1.3. DEFINÍCIÓ (VEKTOROK KÜLÖNBSÉGE). *Adva van az* **a** *és* **b** *vektor. Azt az egyértelműen létező* **x** *vektort, melyre* $\mathbf{a} = \mathbf{b}+\mathbf{x}$, *az* **a** *és* **b** *különbségének nevezzük és* $\mathbf{a}-\mathbf{b}$*-vel jelöljük.*



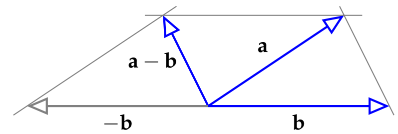
1.12. ábra: A különbségvektor meghatározása háromszög- és paralelogramma-módszerrel.

Könnyen fejben tartható a különbségvektor megszerkesztése akár a háromszög-, akár a parallelogrammamódszerrel (ld. 1.12. ábra), ha a definícióra gondolunk, azaz arra, hogy $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ az a vektor, melyet **b**-hez adva **a**-t kapunk, azaz

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + (\mathbf{a} - \mathbf{b}).$$

Az 1.13. ábráról az is leolvasható, hogy ha a $\mathbf{b}$ vektorral egyenlő hosszúságú, de ellenkező irányú vektort $-\mathbf{b}$ jelöli, akkor fönnáll az $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ összefüggés, és így az is igaz, hogy $\mathbf{b} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{0}$.

Érdekes megjegyezni, hogy ha P és Q két tetszőleges pont, akkor az $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ vektort akkor is ismerjük, ha az O pontot nem, hisz az a $\overrightarrow{PQ}$ vektor. Sok hasonló jelenség vezetett a *torzor* fogalmához, melyet egy rövid széljegyzetben ismertetünk.



1.13. ábra: Az $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$ szemléltetése.

TORZOR: a modern matematika fogalma. Néhány példa, mielőtt definiálnánk: (1) Az energiát a newtoni fizikában nem tudjuk mérni, csak az energiakülönbséget. Ha viszont megállapodunk abban, hogy egy adott rendszernek melyik állapota tartozik a 0 energiaszinthez, beszélhetünk a rendszer energiájáról is. (2) A pontba mutató vektor fogalmának nincs értelme, amíg nincs kijelölve az origó, viszont két pontba mutató vektor különbségét az origótól függetlenül is meg tudjuk határozni. (3) Egy f függvény I intervallumon vett határozatlan integrálja $F + C$ alakú, ahol C konstans. Nincs értelme megkérdezni, hogy f egy konkrét primitív függvényében mennyi a C értéke, de két primitív függvény különbsége mindig egy konstans. (4) Egy hasonló jelenség a zenéből: bármely két hang közti távolság meghatározható, de azt nem mondhatjuk egy hangra, hogy az a „fá”, amíg nem rögzítjük, melyik a „dó”.

A torzort egy *kommutatív csoport* nevű algebrai struktúrával definiálhatjuk, mely egy kommutatív, asszociatív, nullelemes, invertálható művelettel ellátott és e műveletre zárt halmaz. Kommutatív csoport például a valósok az összeadásra nézve, a vektorok az összeadásra nézve, vagy $\mathbb{Z}_{12}$ az összeadásra nézve (ld. a **??**. példát és az 1.5.. definíciót). Legyen G egy kommutatív csoport, és X egy nem üres halmaz, melyen definiálva van bármely két elem különbsége, ami G-beli. Ekkor X-et G-*torzornak* nevezzük, ha bármely $x_0, x_1, x_2 \in X$ elem esetén, ha $x_1 - x_0 = g_1$ és $x_2 - x_0 = g_2$, akkor $x_1 - x_2 = g_1 - g_2$. Másként fogalmazva, X őrzi G struktúráját a zéruselem nélkül úgy, hogy bármely elemét zéruselemnek választva azonnal megkapjuk G-t.

1.4. DEFINÍCIÓ (VEKTOR SZORZÁSA SKALÁRRAL). *Legyen k valós szám. Az $\mathbf{a}$ vektor k-szorosán azt a vektort értjük, melynek hossza az $\mathbf{a}$ hosszának $|k|$-szorosa, iránya*
- *tetszőleges, ha $k = 0$ vagy $\mathbf{a} = \mathbf{0}$,*
- *megegyezik $\mathbf{a}$ irányával, ha $k > 0$, és*
- *ellentétes, ha $k < 0$ (ld. 1.14. ábra).*

A skalárral való szorzás definíciójából azonnal látszik, hogy minden $\mathbf{a}$ vektorra $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$ és $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$.

E paragrafus végén összefoglaljuk a vektorműveletek legfontosabb tulajdonságait, melyek segítségével később általánosítani fogjuk a vektor fogalmát. Az eddig nem bizonyított tulajdonságok igazolását az Olvasóra hagyjuk.

1.5. TÉTEL (A VEKTORMŰVELETEK TULAJDONSÁGAI). *Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ a 2- vagy 3-dimenziós tér tetszőleges vektorai, $\mathbf{0}$ a zérusvektor és r, s két tetszőleges valós szám, akkor fönnállnak az alábbi azonosságok:*

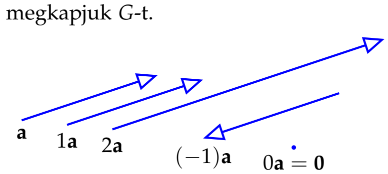
a)	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$	*e)*	$r(s\mathbf{a}) = (rs)\mathbf{a}$
b)	$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$	*f)*	$r(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = r\mathbf{a} + r\mathbf{b}$
c)	$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$	*g)*	$(r + s)\mathbf{a} = r\mathbf{a} + s\mathbf{a}$
d)	$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$	*h)*	$1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ *és* $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$

A lineáris kombináció definíciója Ha vektorokra a skalárral való szorzás és az összeadás műveletét alkalmazzuk, akkor e vektorok egy lineáris kombinációját kapjuk. Pontosabban:

1.6. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS KOMBINÁCIÓ). *Az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,…, $\mathbf{a}_k$ vektorok* lineáris kombináció*ján egy*

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_k\mathbf{a}_k$$

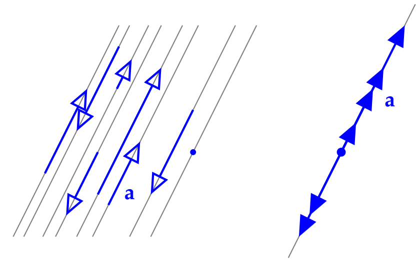
alakú vektort értünk, ahol $c_1, c_2, \ldots, c_k$ valós számok. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v}$ vektor előáll *az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,…, $\mathbf{a}_k$ vektorok lineáris kombinációjaként, ha vannak olyan $c_1, c_2, \ldots, c_k$ valós számok, hogy $\mathbf{v} = c_1\mathbf{a}_1 + \ldots + c_k\mathbf{a}_k$.*



1.14. ábra: Vektor skalárszorosai

Ha egy vektort egy skalárral beszorzunk, az előző definíció szerint egy lineáris kombinációját kapjuk, mely vele párhuzamos, azaz kollineáris. Így egy nemzérus vektor összes lineáris kombinációja csupa vele párhuzamos vektor (ld. 1.15. ábrát). Ennél több is igaz:

1.7. TÉTEL (VEKTORRAL PÁRHUZAMOS VEKTOROK). *Ha* $\mathbf{a}$ *nem zérusvektor, akkor bármely vele párhuzamos* $\mathbf{v}$ *vektor az* $\mathbf{a}$ *skalárszorosa, azaz van olyan* c *valós szám, hogy* $\mathbf{v} = c\mathbf{a}$*, más szóval* $\mathbf{v}$ *előáll az* $\mathbf{a}$ *valamely lineáris kombinációjaként. Ez az előállítás egyértelmű.*



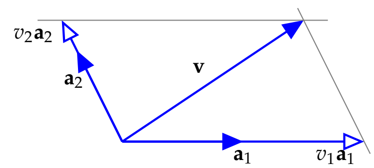
1.15. ábra: Egy nemzérus $\mathbf{a}$ vektor, és néhány lineáris kombinációja kétféle reprezentációban.

BIZONYÍTÁS. Ha a két vektor egyirányú, az előállításban szereplő c konstans egyszerűen a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{a}$ vektorok abszolút értékének hányadosa, ha ellenkező irányúak, e hányados (-1)-szerese. □

E tétel következménye, hogy ha $\mathbf{a}$ nem zérusvektor, akkor az $\mathbf{a}$ összes lineáris kombinációjának halmaza és az $\mathbf{a}$-val párhuzamos vektorok halmaza megegyezik. Másként fogalmazva: egy nemzérus vektor összes lineáris kombinációjának végpontja egy *origón átmenő egyenest ad*.

A háromszögmódszerből jól látszik, hogy tetszőleges két vektor bármely lineáris kombinációja velük komplanáris vektor lesz. Az állítás megfordítása is igaz:

1.8. TÉTEL (KÉT VEKTORRAL EGY SÍKBA ESŐ VEKTOROK). *Ha* $\mathbf{a}_1$ *és* $\mathbf{a}_2$ *nem párhuzamos vektorok, akkor bármely velük egy síkba eső* $\mathbf{v}$ *vektor előáll az* $\mathbf{a}_1$ *és* $\mathbf{a}_2$ *valamely lineáris kombinációjaként, azaz van olyan* v_1 *és* v_2 *konstans, hogy* $\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2$*. Ez az előállítás egyértelmű.*



1.16. ábra: A $\mathbf{v}$ egyértelműen előáll $\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2$ alakban, ha $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ nem párhuzamos.

BIZONYÍTÁS. A bizonyításnak a felbontás létezését biztosító része könnyen leolvasható az 1.16. ábráról. A $\mathbf{v}$ végpontjából húzzunk az $\mathbf{a}_1$ és az $\mathbf{a}_2$ vektorokkal párhuzamos egyeneseket. Az így létrejött – esetleg elfajuló – paralelogramma két oldala az előző tétel szerint $\mathbf{a}_1$, illetve $\mathbf{a}_2$ konstansszorosa, melyek összege a paralelogramma szabály szerint épp $\mathbf{v}$. Előállítottuk tehát $\mathbf{v}$-t $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ lineáris kombinációjaként. Meg kell még mutatnunk, hogy ez az előállítás egyértelmű. Legyen

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 = w_1\mathbf{a}_1 + w_2\mathbf{a}_2.$$

a $\mathbf{v}$ vektor két előállítása. Ekkor átrendezés után $(v_1 - w_1)\mathbf{a}_1 = (w_2 - v_2)\mathbf{a}_2$. Mivel $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ nem kollineárisak, konstansszorosaik csak akkor egyezhetnek meg, ha mindkettő a zérusvektor. Ugyanakkor $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}$, ezért az előző egyenlőség csak akkor áll fönn, ha $(v_1 - w_1) = (w_2 - v_2) = 0$, azaz ha $v_1 = w_1$ és $v_2 = w_2$. Tehát a felbontás egyértelmű. □

Látható tehát, hogy két nem párhuzamos vektor összes lineáris kombinációjának halmaza megegyezik a két vektorral komplanáris vektorok halmazával, egyszerűbben fogalmazva: két nem párhuzamos vektor összes lineáris kombinációjának végpontja *egy origón átmenő síkot ad*.

Abban nincs semmi meglepő, hogy a tér három nem egy síkba eső vektorának bármely lineáris kombinációja térbeli vektor, az állítás megfordítása viszont igen fontos:

1.9. TÉTEL (TÉRBELI VEKTOROK). *Ha* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ *és* $\mathbf{a}_3$ *nem egy síkba eső vektorok, akkor a tér bármely* $\mathbf{v}$ *vektora előáll az* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ *és* $\mathbf{a}_3$ *valamely lineáris kombinációjaként, azaz van olyan* v_1, v_2 *és* v_3 *konstans, hogy*

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3. \tag{1.1}$$

Ez az előállítás egyértelmű.

BIZONYÍTÁS. A $\mathbf{v}$ vektor V végpontján át párhuzamos egyenest húzunk az $\mathbf{a}_3$ vektorral, mely az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ vektorok síkját egy C pontban metszi (1.17. *(a)* ábra). Az $\overrightarrow{OC}$ vektor az előző tétel szerint egyértelműen előáll $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ lineáris kombinációjaként, azaz $\overrightarrow{OC} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2$ (ld. 1.17. *(b)* ábra). Másrészt $\mathbf{v} = \overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CV}$, ahol $\overrightarrow{CV} \parallel \mathbf{a}_3$, így $\overrightarrow{CV} = v_3\mathbf{a}_3$ valamely v_3 valósra. Tehát $\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3$.

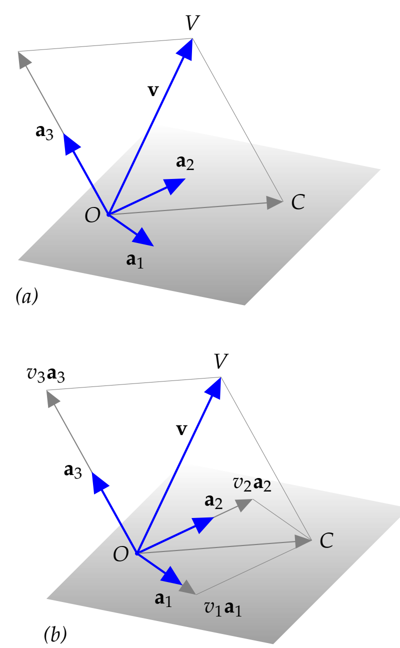
Be kell még látnunk az előállítás egyértelműségét! Tegyük fel, hogy

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3 = w_1\mathbf{a}_1 + w_2\mathbf{a}_2 + w_3\mathbf{a}_3$$

a $\mathbf{v}$ két felbontása. Ekkor $(v_1 - w_1)\mathbf{a}_1 + (v_2 - w_2)\mathbf{a}_2 + (v_3 - w_3)\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$. Így ha $v_1 \neq w_1$, akkor $\mathbf{a}_1$ kifejezhető $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{a}_1 = -\frac{v_2 - w_2}{v_1 - w_1}\mathbf{a}_2 - \frac{v_3 - w_3}{v_1 - w_1}\mathbf{a}_3.$$

Ez ellentmond annak, hogy $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ nem esnek egy síkba. Így tehát $v_1 = w_1$. Hasonlóan kapjuk, hogy $v_2 = w_2$ és $v_3 = w_3$, azaz az (1.1) előállítás egyértelmű. □

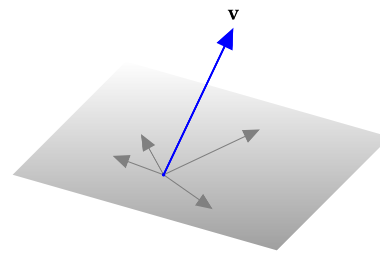


1.17. ábra: A térbeli $\mathbf{v}$ vektor előállítása három nem egy síkba eső vektor lineáris kombinációjaként.

Lineáris függetlenség Az előző két tételből világos, hogy a tér három vektora vagy egy síkba esik, ekkor valamelyikük a másik kettő lineáris kombinációja, vagy nem esik egy síkba, és akkor egyikük sem áll elő a másik kettő lineáris kombinációjaként. Ekkor viszont a tér minden vektora előáll az ő lineáris kombinációjukként. Látjuk, alapvető, hogy egy vektor kifejezhető-e más vektorok lineáris kombinációjaként.

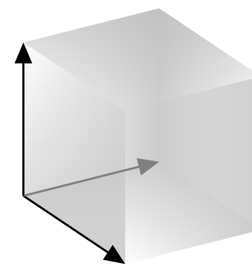
1.10. DEFINÍCIÓ (VEKTOROK FÜGGETLENSÉGE). *Azt mondjuk, hogy egy* $\mathbf{v}$ *vektor* lineárisan független *az* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,... $\mathbf{a}_n$ *(*$n \geq 1$*) vektoroktól, ha* $\mathbf{v}$ *nem fejezhető ki e vektorok lineáris kombinációjaként. Azt mondjuk, hogy az* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,... $\mathbf{a}_n$ *(*$n \geq 2$*) vektorok* lineárisan függetlenek *ha e vektorok egyike sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként. Ha legalább egyikük kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, azaz legalább egyikük* lineárisan függ *a többitől, akkor e vektorokat* lineárisan összefüggőknek *nevezzük. Az egyetlen vektorból álló vektorrendszert lineárisan függetlennek tekintjük, ha a vektor nem a zérusvektor.*

Például egy térbeli vektor, mely nem esik egy adott síkba, független a síkba eső vektorok bármely rendszerétől (1.18. ábra).



1.18. ábra: A síkba nem eső $\mathbf{v}$ vektor nem áll elő a síkbeli vektorok lineáris kombinációjaként.

Egy kocka egy csúcsból kiinduló élvektorai lineárisan függetlenek (1.19. ábra).


1.19. ábra: Egy kocka három egy csúcsból induló élvektora lineárisan független.

Általában: bármely két nem kollineáris vektor lineárisan független, hasonlóképp, a tér bármely három nem komplanáris, azaz nem egy síkba eső vektora lineárisan független.

Az 1.8. tétel tehát a következőképp fogalmazható át:

1.11. TÉTEL (SÍKBELI VEKTOR FELBONTÁSA). *Ha $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ egy sík két lineárisan független vektora, akkor a sík minden $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen előáll e vektorok lineáris kombinációjaként, azaz egyértelműen léteznek olyan v_1 és v_2 valós számok, hogy*

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2.$$

Hasonlóképp az 1.9. tétel így fogalmazható át:

1.12. TÉTEL (TÉRBELI VEKTOR FELBONTÁSA). *Ha $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ három lineárisan független térbeli vektor, akkor a tér minden $\mathbf{v}$ vektora egyértelműen előáll e vektorok lineáris kombinációjaként, azaz egyértelműen léteznek olyan v_1, v_2 és v_3 valós számok, hogy*

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3.$$

A koordinátákról szóló szakaszban e két tétel lesz alapja a koordináta-rendszer bevezetésének.

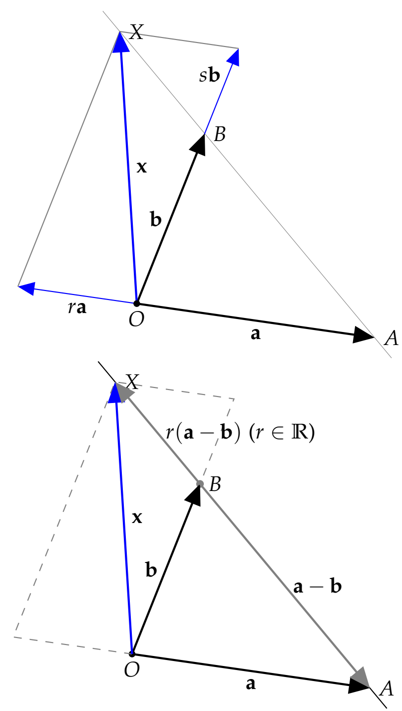
*Speciális lineáris kombinációk** A sík és a tér bizonyos konfigurációi jól jellemezhetők lineáris kombinációkkal, ha a kombinációs együtthatókra bizonyos feltételeket kötünk ki.

1.13. ÁLLÍTÁS (KÉT PONTON ÁTMENŐ EGYENES JELLEMZÉSE). *Legyen O, A és B a sík vagy a tér három pontja. Az $r\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}$ alakú lineáris kombináció végpontja pontosan akkor mutat az A és B ponton átmenő egyenes egy pontjába, ha $r + s = 1$.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, és $\mathbf{x}$ mutasson az AB egyenes valamely X pontjára, azaz legyen $\mathbf{x} = \overrightarrow{OB} + r\overrightarrow{BA}$ valamilyen r valós számra, tehát

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} + r(\mathbf{a} - \mathbf{b}), \text{ azaz } \mathbf{x} = r\mathbf{a} + (1 - r)\mathbf{b}.$$

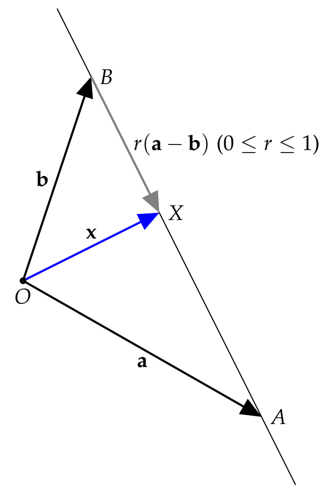
A fenti gondolatmenet lépésein visszafelé haladva látható, hogy minden valós r számra az $r\mathbf{a} + (1 - r)\mathbf{b}$ vektor végpontja az AB egyenesen van. Fogalmazhatunk úgy is, hogy az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok végpontján átmenő egyenes összes pontját pontosan azok az $r\mathbf{a} + s\mathbf{b}$ alakú lineáris kombinációk adják, amelyeknél $r + s = 1$ (ld. 1.20 ábra). □



1.20. ábra: Az X pont pontosan akkor van az AB egyenesen, ha azon r és s valósokra, melyekre $\overrightarrow{OX} = r\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}$, $r + s = 1$ teljesül. Ezen az ábrán $r = -0.5$, $s = 1.5$.

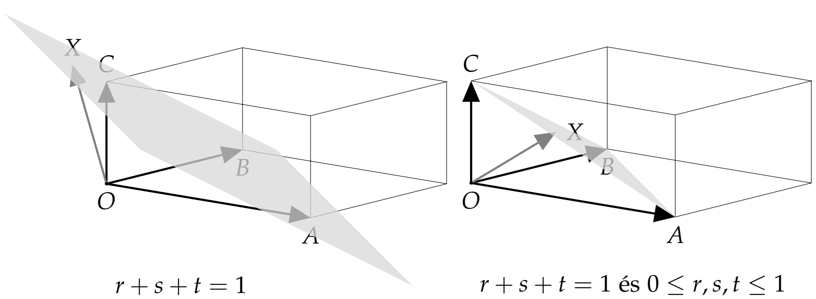
1.14. ÁLLÍTÁS (INTERVALLUM PONTJAINAK JELLEMZÉSE). *Legyen O, A és B a sík vagy a tér három pontja. Az $r\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}$ vektor pontosan akkor mutat az A és B pontot összekötő szakasz valamely pontjába, ha $r + s = 1$ és $0 \le r, s \le 1$.*

BIZONYÍTÁS. Megismételjük az előző feladat megoldását azzal a különbséggel, hogy itt a $\overrightarrow{BX} = r\overrightarrow{BA}$ összefüggés csak 0 és 1 közé eső r értékekre igaz. Tehát $\mathbf{x} = r\mathbf{a} + (1-r)\mathbf{b}$, ahol $0 \le r \le 1$. Másként fogalmazva az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok végpontjait összekötő szakasz összes pontját pontosan azok az $r\mathbf{a} + s\mathbf{b}$ alakú lineáris kombinációk adják, amelyekben $r + s = 1$ és $0 \le r, s \le 1$ (ld. 1.21 ábra). □



1.21. ábra: Az X pont pontosan akkor van az $\overline{AB}$ intervallumban, ha valamely 0 és 1 közé eső r és s valósokra $\overrightarrow{OX} = r\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}$, és $r + s = 1$.

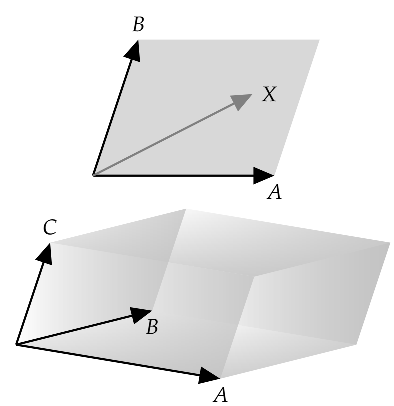
Hasonló összefüggés igaz három vektor esetén is, azaz megmutatható, hogy a nem kollineáris $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok végpontjaira fektetett sík pontjaiba pontosan azok a vektorok mutatnak, melyeket $r\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$ alakba írva $r + s + t = 1$. Ha még azt is kikötjük e három számról, hogy legyen $0 \le r, s, t \le 1$, akkor az $r\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$ alakú vektorok a három vektor végpontja által meghatározott háromszög pontjaiba mutatnak (ld. az 1.22. ábrát és az 1.27. feladatot).



1.22. ábra: Az X pont pontosan akkor esik az A, B és C pontokon átmenő síkba, ha $\overrightarrow{OX} = r\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$ és $r + s + t = 1$. Az X az ABC háromszögbe pedig pontosan akkor esik, ha ezen kívül még $0 \le r, s, t \le 1$ is fönnáll.

Szemléletesen világos, például a mellékelt 1.23. ábráról leolvasható, de nem bizonyítjuk, hogy két tetszőleges nem kollineáris vektor összes olyan lineáris kombinációja, amelyben az együtthatók 0 és 1 közé esnek, egy paralelogrammát ad. Pontosabban fogalmazva egy $r\mathbf{a} + s\mathbf{b}$ alakú vektor végpontja pontosan akkor tartozik az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által meghatározott (kifeszített) *paralelogrammához*, ha $0 \le r, s \le 1$.

Hasonló mondható három, nem egy síkba eső vektorról: egy $r\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$ alakú vektor végpontja pontosan akkor tartozik az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ által kifeszített *paralelepipedonhoz*, ha $0 \le r, s, t \le 1$ (1.23. ábra).



1.23. ábra: A *paralelogramma* és a *paralelepipedon* olyan lineáris kombinációkkal állítható elő, ahol az együtthatók 0 és 1 közé esnek.

Feladatok

Ellenőrző kérdések

1.1.• VEKTOROK: IGAZ – HAMIS Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

a) Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok hajlásszöge α, akkor $\mathbf{a}$ és $-\mathbf{b}$ hajlásszöge $\pi - \alpha$.

b) Ha A és B két adott pont, akkor az $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ vektor független az O megválasztásától.

c) Ha A és B két adott pont, akkor az $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ vektor független az O megválasztásától.

d) Ha két vektor egyirányú, akkor egyikük a másik skalárszorosa.

e) Ha két vektor egyike a másik skalárszorosa, akkor egyirányúak.

f) Ha két vektor egyike a másik skalárszorosa, akkor párhuzamosak.

1.2.• LINEÁRIS ÖSSZEFÜGGŐSÉG: IGAZ – HAMIS Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

a) Ha három vektor a térben lineárisan összefüggő, akkor bármelyikük a másik kettő lineáris kombinációja.

b) Megadható a térben három vektor, hogy egyikük sem lineárisan független a többitől.

c) Megadható a térben három vektor, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$, hogy $\mathbf{a}$ független a $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektoroktól, de $\mathbf{b}$ nem független az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ vektoroktól.

d) A tér bármely legalább 4 vektora lineárisan összefüggő.

e) Megadható a térben 5 olyan vektor, melyek közül pontosan kettőre igaz az, hogy független a többi négy vektortól.

1.3. Legyen O, A és B három tetszőleges nem egy egyenesbe eső pont. Tegyük fel, hogy P eleget tesz az

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{OB}$$

a) Egy egyenesbe esnek-e a P, A és B pontok? *b)* Az A vagy a B ponthoz esik a P közelebb? *c)* A P pont az $\overline{AB}$ szakasz belsejébe esik? Válaszoljuk meg e három kérdést arra a P pontra is, melyre

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{OB}.$$

1.4. Legyen O, A, B és C négy tetszőleges nem egy síkba eső pont. Tegyük fel, hogy P eleget tesz az

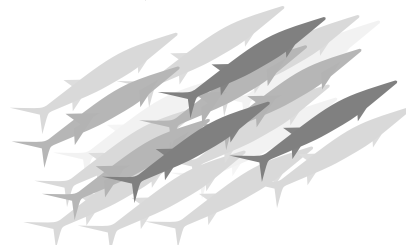
$$\overrightarrow{OP} = \frac{7}{13}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{13}\overrightarrow{OB} + \frac{9}{13}\overrightarrow{OC}$$

a) Egy síkba esnek-e a P, A, B és C pontok? *b)* A P pont az ABC háromszög belsejébe esik?

1.5. Benne van-e az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon belsejében a $\frac{2}{9}\mathbf{a} + \frac{3}{9}\mathbf{b} + \frac{2}{9}\mathbf{c}$ vektor végpontja?

Vektorműveletek a 2- és 3-dimenziós térben

1.6. Egy matematikán kívüli szemléltetés a vektor fogalmához: hogyan fejeznénk be az alábbi hasonlatot? „Ha az irányított szakasz a hal, akkor a vektor a…”



1.7. Adva van a síkban két tetszőleges vektor, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$. Szerkesszük meg a következő vektorokat: *a)* $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} + \mathbf{b}$, *b)* $\mathbf{d} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, *c)* $\mathbf{e} = \frac{2}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$, *d)* $\mathbf{f} = \frac{2}{5}\mathbf{a} + \frac{3}{5}\mathbf{b}$.

1.8. Legyen $\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$. Fejezzük ki az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor segítségével a következő vektorokat: *a)* $2\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$, *b)* $3\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$, *c)* $3\mathbf{u} - \mathbf{v}$, *d)* $2\mathbf{u} - \frac{1}{2}\mathbf{v}$.

1.9. Tekintsük az $ABCD$ négyzetet. Határozzuk meg a következő összegeket! *a)* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, *b)* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$, *c)* $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, *d)* $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$, *e)* $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$, *f)* $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB}$, *g)* $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

1.10. Tekintsük az $ABCD$ négyzetet. Jelölje a BC oldal felezőpontját E, a CD oldal felezőpontját F, a négyzet középpontját O. Fejezzük ki az egymásra merőleges $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ és $\mathbf{d} = \overrightarrow{AD}$ vektorok segítségével az $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{OF}$ vektorokat!

1.11. Tekintsük az $ABCD$ tetraédert! Határozzuk meg az

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$,

b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}$,

c) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$

vektorokat.

1.12. Tekintsük a szabályos $ABCDEF$ hatszöget, melynek geometriai középpontját jelölje O. Fejezzük ki az $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ és $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ vektorok segítségével az *a)* $\overrightarrow{OC}$, *b)* $\overrightarrow{OE}$, *c)* $\overrightarrow{OF}$, *d)* $\overrightarrow{AC}$, *e)* $\overrightarrow{BD}$, *f)* $\overrightarrow{BF}$, *g)* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF}$ vektorokat!

1.13.• Adva van n tetszőleges, nem feltétlenül különböző $P_1, P_2, \ldots, P_n$ pont a térben. Mivel egyenlő a

$$\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_3P_4} + \ldots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n}$$

és a

$$\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_3P_4} + \ldots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n} + \overrightarrow{P_nP_1}$$

összeg?

1.14. Mutassuk meg, hogy az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok pontosan akkor lehetnek egy (esetleg szakasszá vagy ponttá elfajuló) háromszög oldalvektorai, ha az

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}, \quad \mathbf{a}+\mathbf{b}-\mathbf{c}, \quad \mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}, \quad \mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}$$

vektorok legalább egyike zérus. Másként fogalmazva: ha a három vektor összege $\mathbf{0}$, vagy valamelyik vektor egyenlő a másik kettő összegével.

1.15. Legyen **a** és **b** két tetszőleges vektor. Mutassuk meg, hogy van olyan (esetleg elfajuló) háromszög, melynek oldalvektorai $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ és $3\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Lineáris kombináció, lineáris függetlenség

1.16. SÚLYVONAL Fejezzük ki az ABC háromszög (A, B, illetve C csúcsból induló) három súlyvonal-vektorát az $\mathbf{a} = \overrightarrow{CA}$ és a $\mathbf{b} = \overrightarrow{CB}$ vektorok lineáris kombinációjaként! Lehet-e e három vektor egy háromszög három oldalvektora?

1.17. Legyen $P_1P_2 \dots P_n$ egy szabályos n-szög, középpontját jelölje O. Nyilvánvaló, hogy az $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \dots + \overrightarrow{OP_n}$ összeg $\mathbf{0}$, ha n páros. Vajon $\mathbf{0}$-e az összeg akkor is, ha n páratlan?

1.18. NÉGYSZÖG OLDALFELEZŐI Vektoralgebrai eszközökkel igazoljuk, hogy egy tetszőleges (akár térbeli) négyszög oldalfelező pontjai paralelogrammát alkotnak.

1.19. Legyen $P_1P_2 \dots P_n$ egy tetszőleges páratlan csúcsú síkbeli n-szög, legyen O a sík egy tetszőleges pontja, és legyen F_k a P_kP_{k+1} szakasz felezőpontja ($k = 1, 2, \dots, n-1$), illetve F_n az P_nP_1 felezőpontja. Fejezzük ki az $\overrightarrow{OP_1}$ vektort az $\overrightarrow{OF_k}$ vektorok lineáris kombinációjaként!

1.20. Legyen az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ vektorrendszer lineárisan független, és legyen $\mathbf{v} = c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b} + c_3\mathbf{c}$, $\mathbf{w} = d_1\mathbf{a} + d_2\mathbf{b} + d_3\mathbf{c}$ két olyan lineáris kombináció, ahol d_1, d_2, d_3 egyike sem 0. Igazoljuk, hogy **v** és **w** akkor és csak akkor lineárisan összefüggők (kollineárisak), ha $\frac{c_1}{d_1} = \frac{c_2}{d_2} = \frac{c_3}{d_3}$.

1.21. Az alábbi **v** és **w** vektorok a c és d paraméterek mely értékeinél lineárisan összefüggők, ha **a**, **b** és **c** lineárisan függetlenek?

a) $\mathbf{v} = 3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $\mathbf{w} = 6\mathbf{a} + c\mathbf{b}$

b) $\mathbf{v} = 2\mathbf{a} + c\mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{w} = 4\mathbf{a} + 2c\mathbf{b} - 2\mathbf{c}$

c) $\mathbf{v} = -2\mathbf{a} + \mathbf{b} + c\mathbf{c}$, $\mathbf{w} = c\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$

d) $\mathbf{v} = \mathbf{a} + c\mathbf{b} + d\mathbf{c}$, $\mathbf{w} = 3\mathbf{a} + d\mathbf{b} + 6\mathbf{c}$

e) $\mathbf{v} = \mathbf{a} + c\mathbf{b} + d\mathbf{c}$, $\mathbf{w} = 3\mathbf{a} + 3d\mathbf{b} + 3c\mathbf{c}$

f) $\mathbf{v} = \mathbf{a} - c\mathbf{b} + d\mathbf{c}$, $\mathbf{w} = 2\mathbf{a} - 2c\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$

1.22. Függetlenek-e az **r**, **s**, **t** vektorok, ha **a**, **b** és **c** lineárisan függetlenek?

a) $\mathbf{r} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{s} = \mathbf{a} - 3\mathbf{b} - \mathbf{c}, \mathbf{t} = \mathbf{0}0$

b) $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{s} = \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{t} = \mathbf{c}$

c) $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{s} = \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{t} = 2\mathbf{a} + \mathbf{c}$

d) $\mathbf{r} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}, \mathbf{s} = \mathbf{a} - 3\mathbf{b} - \mathbf{c}, \mathbf{t} = \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$.

1.23.★ Jelölje az $ABCD$ paralelogramma BC oldalának felezőpontját E, a CD oldalét F, az AE és BF szakaszok metszéspontját M. Állítsuk elő az $\overrightarrow{AM}$ vektort az $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ és $\mathbf{d} = \overrightarrow{AD}$ vektorok lineáris kombinációjaként!

Speciális lineáris kombinációk

1.24.• SZAKASZT $m:n$ ARÁNYBAN OSZTÓ PONT Ha az $\overline{AB}$ szakaszt a P pont úgy bontja ketté, hogy $|\overline{AP}| : |\overline{PB}| = m : n$, akkor bármely O pontra igaz, hogy

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}.$$

Speciálisan, az $\overline{AB}$ szakasz felezőpontjába az

$$\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

vektor mutat.

1.25. HÁROMSZÖG SÚLYPONTJA Igazoljuk, hogy a háromszög súlyvonalai egy pontban (melyet súlypontnak nevezünk), harmadolva metszik egymást! Egy tetszőleges (akár térbeli) O pontból a súlypontba mutató vektor a csúcsokba mutató vektorok összegének harmada.

1.26. TETRAÉDER SÚLYPONTJA Igazoljuk, hogy a tetraéder súlyvonalai egy ponton mennek át, és negyedelve metszik egymást! E metszéspontot nevezzük a tetraéder súlypontjának. Egy tetszőleges O pontból a súlypontba mutató vektor a csúcsokba mutató vektorok összegének negyede.

1.27. HÁROMSZÖG PONTJAIBA MUTATÓ VEKTOROK Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C és tőlük különböző O pontra egy P pont pontosan akkor esik az ABC háromszög belsejébe, ha van olyan

$$\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}$$

lineáris kombináció, hogy $0 \le a, b, c \le 1$ és $a + b + c = 1$.

1.28. Az ABC derékszögű háromszög C csúcsból induló magasságvonala messe az AB átfogót a D pontban. Jelölje a két befogó hosszát a és b. Állítsuk elő a $\overrightarrow{CD}$ vektort a $\overrightarrow{CA}$ és $\overrightarrow{CB}$ vektorok lineáris kombinációjaként csak e két számadatot felhasználva.

Távolság, szög, orientáció

A címben jelzett három alapfogalomhoz három vektorművelet visz közelebb. Egyikük eredményül nem vektort, hanem skalárt ad, másikuk nem felcserélhető, és kétváltozós műveletként csak a 3-dimenziós térben definiálható, a harmadik művelet pedig nem két- hanem háromváltozós.

Skaláris szorzás A fizikában az erő által végzett munka az út hosszának és az erő elmozdulás irányába eső merőleges vetülete hosszának szorzata. Vagyis két vektorjellegű mennyiségből egy skalármennyiséget kapunk eredményül. Ha $\mathbf{F}$ jelöli az erővektort, $\mathbf{s}$ az elmozdulásvektort, $\mathbf{F}_s$ az erőnek az elmozdulás irányába eső merőleges vetületi vektorát és γ az $\mathbf{F}$ és $\mathbf{s}$ vektorok hajlásszögét, akkor a munka értéke $|\mathbf{F}_s||\mathbf{s}| = |\mathbf{F}||\mathbf{s}|\cos\gamma$. Ez a következő definícióhoz vezet:

1.15. DEFINÍCIÓ (KÉT VEKTOR SKALÁRIS SZORZATA). *Két vektor* skaláris szorzatán *a vektorok abszolút értékének és az általuk bezárt szög koszinuszának szorzatát értjük. Az* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektorok skaláris szorzatát* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ *jelöli, tehát*

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle,$$

ahol a két vektor által bezárt szög $(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle$.

Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ valamelyike zérusvektor, akkor a két vektor szöge, s így annak koszinusza sem határozható meg egyértelműen, a skaláris szorzat viszont ekkor is egyértelmű, éspedig 0, hisz a zérusvektor abszolút értéke 0, és 0 bármivel vett szorzata 0.

Szokás $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ skaláris szorzatát $\mathbf{ab}$-vel is jelölni, de ezt más szorzásoktól megkülönböztetendő e könyvben nem fogjuk használni.

1.16. PÉLDA (SKALÁRIS SZORZAT). *Mennyi a skaláris szorzata egy* 1 *és egy* 2 *egység hosszú, egymással* $60°$*-os szöget bezáró két vektornak?*

MEGOLDÁS. A szorzat $1\cdot 2\cdot\cos 60° = 1\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 1$. □

1.17. TÉTEL (MIKOR 0 A SKALÁRIS SZORZAT?). *Két vektor skaláris szorzata pontosan akkor* 0*, ha a két vektor merőleges egymásra.*

BIZONYÍTÁS. ($\Leftarrow$) Ha $\mathbf{a}\perp\mathbf{b}$, akkor $(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = \pi/2$, azaz $\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 0$, tehát $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$.

($\Rightarrow$) Ha $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$, azaz $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 0$, akkor $|\mathbf{a}| = 0$, $|\mathbf{b}| = 0$ vagy $\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 0$. Ha valamelyik vektor zérusvektor, akkor iránya bármely vektoréra merőlegesnek tekinthető. Ha sem $\mathbf{a}$ sem $\mathbf{b}$ nem a zérusvektor, akkor $\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 0$, a cos függvénynek pedig a $[0,\pi]$ intervallumban csak $\pi/2$-ben van zérushelye, tehát a két vektor merőleges egymásra. □

► A tétel bizonyításából látszik, a zérusvektorra úgy tekintünk, mint ami bármely vektorra merőleges. Korábban – a skalárral való szorzásnál – a zérusvektorra úgy tekintettünk, mint ami bármely vektorral párhuzamos, hisz skalárszorosa. A zérusvektorra tehát úgy tekintünk, mint ami egy adott vektorral akkora szöget zár be, mint amekkorára épp szükségünk van. Ezt megtehetjük, hisz a zérusvektor iránya tetszőleges. Ez megóv minket attól, hogy minden tételbe a zérusvektor esetét külön, mint valami rendhagyó esetet bele kelljen fogalmaznunk.

1.18. TÉTEL (A SKALÁRIS SZORZÁS MŰVELETI TULAJDONSÁGAI). *Ha* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *és* $\mathbf{c}$ *tetszőleges térbeli (síkbeli) vektorok és r tetszőleges valós szám, akkor igazak az alábbi összefüggések:*

a) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ *(kommutativitás)*

b) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ *(disztributivitás)*

c) $r(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=(r\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot(r\mathbf{b})$

d) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}>0$*, ha* $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$*, és* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=0$*, ha* $\mathbf{a}=\mathbf{0}$*.*

A bizonyítást az Olvasóra hagyjuk.

► Két vektor skaláris szorzata skalár, ezért az asszociativitás (csoportosíthatóság) kérdése értelmetlen, mivel az $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$ szorzatban két különböző szorzásművelet szerepel. Mindezzel együtt $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}\neq\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$ bármely $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorra (ld. az 1.35. feladatot).

Hosszúság és szög Egy vektor hossza, és ezzel két pont távolsága, valamint két vektor hajlásszöge kifejezhető a skaláris szorzat segítségével.

Egy tetszőleges $\mathbf{a}$ vektorra $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{a}||\mathbf{a}|\cos 0=|\mathbf{a}||\mathbf{a}|$, tehát

$$|\mathbf{a}|^2=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}, \text{ azaz } |\mathbf{a}|=\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}.$$

E képlet szerint tehát egy *vektor hossza* megegyezik az önmagával vett skaláris szorzatának gyökével. Ebből az is adódik, hogy *két pont távolsága* megegyezik az őket összekötő vektor önmagával vett skaláris szorzatának négyzetgyökével.

Két pontot összekötő vektor egyenlő az oda mutató helyvektorok különbségével, így ha a két pontba mutató helyvektor $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$, akkor a pontok távolsága – és ezt fogjuk a vektorok távolságának is tekinteni

$$d(\mathbf{a},\mathbf{b})=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|.$$

Két vektor skaláris szorzatának és a vektorok hosszának ismeretében a *szögük* meghatározható:

$$\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}, \tag{1.2}$$

mivel a $[0,\pi]$ intervallumon a koszinusz függvény kölcsönösen egyértelmű.

Három tétel vektorok hosszáról Vektor hosszáról három fontos összefüggést igazolunk, melyek később is fontos szerepet kapnak.

1.19. TÉTEL (PITHAGORÁSZ-TÉTEL). *Az* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektorokra pontosan akkor teljesül az* $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$ *összefüggés, ha* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *merőlegesek egymásra.*

BIZONYÍTÁS. Az alább ?-lel megjelölt egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$, azaz ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőlegesek egymásra.

$$\begin{aligned}
|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \\
&= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} && \text{disztributivitás} \\
&= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} && \text{kommutativitás} \\
&\overset{?}{=} \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} && ? \\
&= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2,
\end{aligned}$$ □

Mivel a koszinusz függvény értéke abszolút értékben sosem nagyobb 1-nél, ezért a skaláris szorzat definíciójából azonnal látszik, hogy

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}|.$$

Ezzel bizonyítottuk a következő tételt:

1.20. TÉTEL (CAUCHY–BUNYAKOVSZKIJ–SCHWARZ-EGYENLŐTLENSÉG). *Két vektor skaláris szorzatának abszolút értéke sosem nagyobb abszolút értékeik szorzatánál, azaz*

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}|.$$

A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség segítségével bizonyítjuk a geometriából jól ismert háromszög-egyenlőtlenséget. E bizonyítás változtatás nélkül működni fog általánosabb körülmények között is.

1.21. TÉTEL (HÁROMSZÖG-EGYENLŐTLENSÉG). *Bármely két* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *vektorra*

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

BIZONYÍTÁS. Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldalán nemnegatív szám áll, ezért vele ekvivalens egyenlőtlenséghez jutunk, ha mindkét oldalt négyzetre emeljük.

$$\begin{aligned}
|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \\
&= |\mathbf{a}|^2 + 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) + |\mathbf{b}|^2 && \text{ld. az 1.19. tétel bizonyítását} \\
&\le |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 \\
&\le |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 \\
&= (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2.
\end{aligned}$$ □

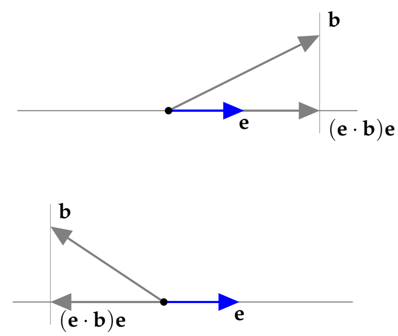
Egységvektorral való szorzás és a merőleges vetítés Minden olyan vektort, melynek abszolút értéke 1, *egységvektornak* nevezünk.

Ha $\mathbf{a}$ egy tetszőleges nemzérus vektor, akkor $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ egységvektor, ugyanis abszolút értéke 1:

$$\left|\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right| = \frac{1}{|\mathbf{a}|}|\mathbf{a}| = 1.$$

1.22. TÉTEL (EGYSÉGVEKTORRAL VALÓ SZORZÁS GEOMETRIAI JELENTÉSE). *Ha* $\mathbf{e}$ *egységvektor, akkor a* $\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{e}\cdot\mathbf{b})\mathbf{e}$ *vektor a* $\mathbf{b}$ *vektornak az* $\mathbf{e}$ *egyenesére való merőleges vetülete. Az* $\mathbf{e}\cdot\mathbf{b}$ *szorzat e vetület előjeles hossza, mely pozitív, ha* $\hat{\mathbf{b}}$ *és* $\mathbf{e}$ *egyirányúak, és negatív, ha ellenkező irányúak.*

BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{e}$ egységvektor, azaz abszolút értéke 1, akkor $\mathbf{e}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\cos(\mathbf{e},\mathbf{b})_\angle$, ez pedig a koszinusz függvény definíciója szerint $\mathbf{b}$ merőleges vetületének előjeles hosszát jelenti. E szám $\mathbf{e}$-szerese pedig egy $\mathbf{e}$ irányú, és ilyen hosszú vektort ad, mely épp $\mathbf{b}$ vetületi vektora. □



1.24. ábra: Az $\mathbf{b}$ vektor és az $\mathbf{e}$ egységvektor egyenesére eső vetülete. A felső ábrán $\mathbf{e}\cdot\mathbf{b} > 0$, az alsón $\mathbf{e}\cdot\mathbf{b} < 0$.

Jelölje a $\mathbf{b}$ vektornak az $\mathbf{a}$ egyenesére eső merőleges vetületi vektorát $\operatorname{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$. Eszerint ha $\mathbf{e}$ egységvektor, akkor

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{e}}\mathbf{b} = (\mathbf{e}\cdot\mathbf{b})\mathbf{e}.$$

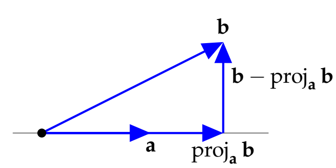
Alapvető feladat egy vektornak egy másikkal párhuzamos és rá merőleges vektorok összegére való felbontása, amit másként *merőleges összetevőkre bontásnak* nevezünk.

1.23. TÉTEL (VEKTOR FELBONTÁSA MERŐLEGES ÖSSZETEVŐKRE). *Ha* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *a sík vagy a tér két vektora, és* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, *akkor* $\mathbf{b}$*-nek az* $\mathbf{a}$ *egyenesére eső merőleges vetülete*

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}.$$

A $\mathbf{b}$*-nek az* $\mathbf{a}$ *egyenesére merőleges összetevője*

$$\mathbf{b} - \operatorname{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}.$$



1.25. ábra: Az $\mathbf{b}$ vektor felbontása az $\mathbf{a}$ vektorral párhuzamos és rá merőleges vektorok összegére.

BIZONYÍTÁS. Az első képlet az egységvektorral szorzás geometriai jelentéséről szóló 1.22. tételből következik. Legyen $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ az $\mathbf{a}$-irányú egységvektor. Ekkor

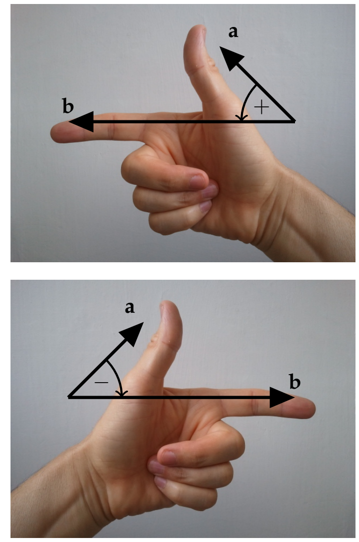
$$\operatorname{proj}_{\mathbf{e}}\mathbf{b} = (\mathbf{e}\cdot\mathbf{b})\mathbf{e} = \left(\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\cdot\mathbf{b}\right)\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{|\mathbf{a}|^2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}.$$

(Az utolsó egyenlőségnél kihasználtuk, hogy $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$.) Mivel $\mathbf{e}$ és $\mathbf{a}$ párhuzamosak, ezért $\operatorname{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \operatorname{proj}_{\mathbf{e}}\mathbf{b}$, ami bizonyítja első állításunkat. Az állítás második fele abból adódik, hogy a két összetevő összege $\mathbf{b}$.□

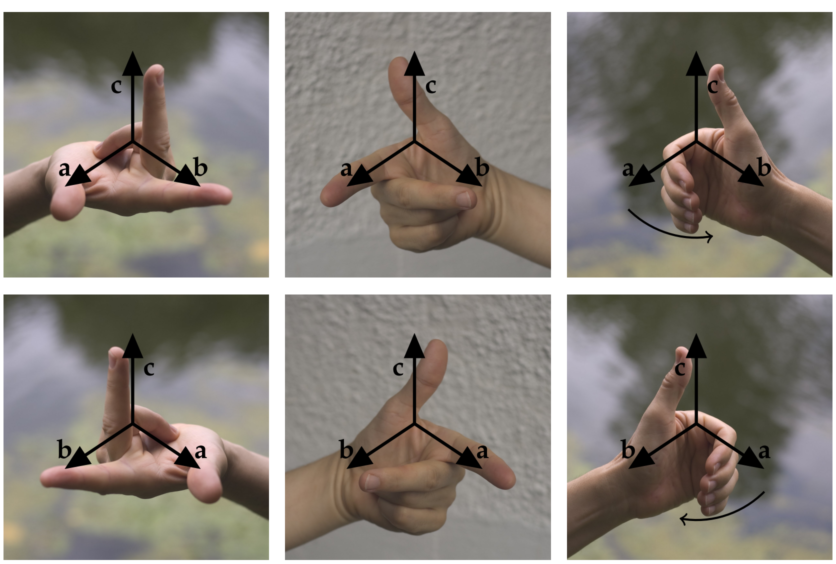
Merőlegesség és orientáció Ha **a** és **b** egymásra merőleges síkbeli nemzérus vektorok, akkor **a** és $-\mathbf{b}$ is merőlegesek, így $(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = (\mathbf{a},-\mathbf{b})_\angle = \pi/2$. Csak az **a** ismeretében meg tudjuk-e különböztetni a **b** és $-\mathbf{b}$ vektorokat? Hasonló kérdés a térben is fölmerül: ha **c** merőleges a nem kollineáris **a** és **b** vektorok mindegyikére, akkor $-\mathbf{c}$ is. Megkülönböztethető-e egymástól **c** és $-\mathbf{c}$ csak **a**-hoz és **b**-hez való viszonyuk alapján? A válaszhoz az *orientáció* fogalma vezet.

Először szemléltetve közelítünk e fogalomhoz (definíció a determinánn fogalmára építhető). A síkban a két független vektorból álló párokat két osztályba sorolhatjuk aszerint, hogy a tenyérrel fölfelé fordított jobb vagy bal kezünk első két ujjával szemléltethetőek (1.26. ábra) (hüvelyk az első, mutató a második vektor).

Hasonlóképp a térben a független vektorokból álló hármasokat két osztályba sorolhatjuk aszerint, hogy jobb vagy bal kezünk első három ujjával szemléltethetőek. Az 1.27. ábra első 2-2 képe azt is mutatja, hogy kultúránként különböző módon mi e három ujj sorrendje (ld. ki hogy mutatja a kettőt). Aszerint, hogy egy vektorpár a síkban, illetve egy vektorhármas a térben melyik osztályba esik, azt mondjuk, hogy *jobbrendszert*, illetve *balrendszert* alkot. Az 1.27. ábra mindkét sorának harmadik képén látható mód (az ökölbe szoruló kéz mozgása) azt is megmutatja, hogy milyen egy egyenes körül való pozitív (negatív) forgás iránya. A síkban ezt azzal is ki tudjuk fejezni, hogy két független vektor szögét előjellel látjuk el, nevezetesen pozitívval, ha jobbrendszert, és negatívval, ha balrendszert alkotnak. Az így kapott szöget a két vektor *irányított szögének* nevezzük. Az **a** és **b** irányított szögét $(\mathbf{a},\mathbf{b})_\triangleleft$ jelöli. Tehát míg $(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = (\mathbf{b},\mathbf{a})_\angle$, addig $(\mathbf{a},\mathbf{b})_\triangleleft = -(\mathbf{b},\mathbf{a})_\triangleleft$, és ha $(\mathbf{a},\mathbf{b})_\triangleleft = \pi/2$, akkor $(\mathbf{a},-\mathbf{b})_\triangleleft = -\pi/2$. Ez a válasz a paragrafus elején feltett kérdésre.



1.26. ábra: Két vektor egymáshoz való viszonya jobbrendszert (felső ábra) vagy balrendszert (alsó ábra) alkot. A közbe zárt irányított szög az előbbi esetben pozitív, utóbbiban negatív.



1.27. ábra: Az **a**, **b** és **c** vektorok ebben a sorrendben jobbrendszert alkotnak, ha irányuk a jobb kezünkkel mutatható a mellékelt három ábra bármelyike szerint: (1) hüvelyk–mutató–középső ujj, (2) mutató–középső–hüvelykujj, (3) a hüvelyk mutatja a **c** vektort, ökölbe szoruló kezünk ujjai pedig az **a** felől a **b** felé haladnak.

Az **a**, **b** és **c** vektorok ebben a sorrendben balrendszert alkotnak, ha irányuk a bal kezünkkel mutatható a következők bármelyike szerint: (1) hüvelyk–mutató–középső ujj, (2) mutató–középső–hüvelykujj, (3) a hüvelyk mutatja a **c** vektort, ökölbe szoruló kezünk ujjai pedig az **a** felől a **b** felé haladnak.

Vektori szorzás A fizikában több olyan jelenség is van, melyben két térbeli vektorhoz keresünk egy mindkettőre merőleges harmadikat. Legismertebb példa a *forgatónyomaték*.

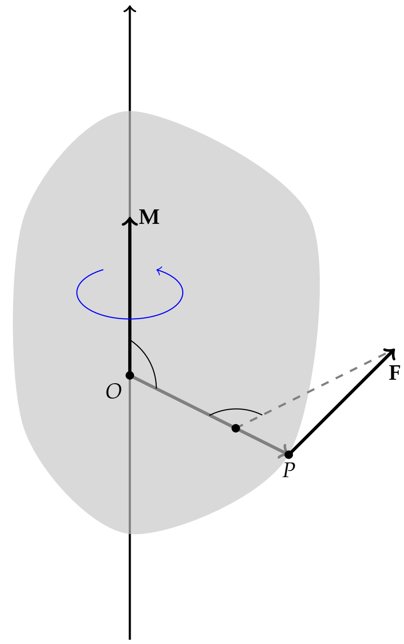
Hasson egy $\mathbf{F}$ erő egy test $\mathbf{P}$ pontjában, és legyen a test rögzítve az O pontjában. A P ponton átmenő, $\mathbf{F}$ irányú egyenesnek az O-tól való távolságát az erő karjának nevezzük. Az $\mathbf{F}$ hatására a test O körül elfordul. Ennek jellemzésére tudnunk kell a forgás tengelyét, a forgás „nagyságát”, és azt, hogy a tengely körüli két forgásirány közül melyikről van szó. Erre alkalmas lehet egy vektor – ezt nevezzük *forgatónyomatéknak* –, melynek iránya a forgástengellyel párhuzamos, hossza a forgás nagyságát írja le, és a forgástengellyel párhuzamos két vektorirány a két forgásirányt különbözteti meg. Hogyan definiálható a forgatónyomaték-vektor, ha tudjuk, hogy abszolút értéke az erőkar hosszának és az erő abszolút értékének szorzata?

Az erő karja $|\overrightarrow{OP}|\sin(\overrightarrow{OP},\mathbf{F})_\angle$, így az $\mathbf{M}$ forgatónyomaték abszolút értéke:

$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{F}||\overrightarrow{OP}|\sin(\overrightarrow{OP},\mathbf{F})_\angle.$$

A forgás tengelye nyilván merőleges $\mathbf{F}$-re és $\overrightarrow{OP}$-re is, csak abban kell megegyezni, hogy az $\overrightarrow{OP}$, $\mathbf{F}$ és $\mathbf{M}$ vektorok jobb- vagy balrendszert alkossanak. A fizikusok a jobbrendszert választották.

A forgatónyomaték és több hasonló fizikai fogalom a következő definícióhoz vezet:



1.28. ábra: A test az O pontban rögzítve van, a P pontban hat az $\mathbf{F}$ erő, a forgás tengelye merőleges lesz az $\overrightarrow{OP}$ és az $\mathbf{F}$ vektorok síkjára, az $\overrightarrow{OP}$, az $\mathbf{F}$ és $\mathbf{M}$ jobbrendszert alkotnak, ahol $\mathbf{M}$ a forgatónyomaték, melynek iránya megadja a forgatás irányát. Az $|\mathbf{F}|\sin(\overrightarrow{OP},\mathbf{F})_\angle$ szakaszt szaggatott vonal jelöli.

1.24. DEFINÍCIÓ (VEKTORI SZORZÁS). *A 3-dimenziós tér két vektorának* vektori szorzatán *azt a vektort értjük, melynek*

a) abszolút értéke *a két vektor abszolút értékének és közbezárt szöge szinuszának szorzata,*

b) iránya *merőleges mindkét vektor irányára és – ha a szorzat nem a nullvektor, akkor – az első tényező, a második tényező és a szorzat ebben a sorrendben jobbrendszert alkot.*

► Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok vektori szorzatát $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ jelöli, amit „a kereszt b”-nek olvasunk. Képletekkel megfogalmazva: $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ egy vektor, melyre

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle,$$

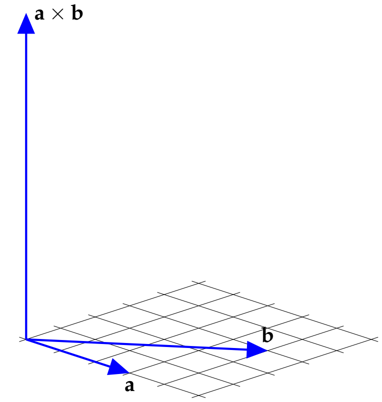
$\mathbf{a}\times\mathbf{b}\perp\mathbf{a}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\perp\mathbf{b}$, továbbá $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot, ha $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\neq 0$.

► A vektor abszolút értékére a fenti képlet valóban nem negatív számot ad, mert a szinusz függvény a $[0,\pi]$ intervallumon nem negatív.

► E definíció bármely két 3-dimenziós vektor vektori szorzatát egyértelműen definiálja, ugyanis minden olyan esetben, amikor nem dönthető el, hogy a vektorok jobbrendszert alkotnak-e, a szorzat a nullvektor.

1.25. PÉLDA (VEKTORI SZORZAT MEGHATÁROZÁSA). *Tegyük fel, hogy a tér két vektora 3 illetve 5 hosszú, az általuk bezárt szög koszinusza $\frac{4}{5}$. Mit tudunk a vektori szorzatról?*

MEGOLDÁS. Ha $\cos\gamma = \frac{4}{5}$, akkor $\sin\gamma = \sqrt{1-(\frac{4}{5})^2} = \frac{3}{5}$, így a vektori szorzat hossza $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 3\cdot 5\cdot\frac{3}{5} = 9$, iránya merőleges mindkét vektorra és $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot (ld. 1.29. ábra). □



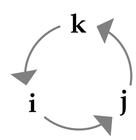
1.29. ábra: Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és az $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ vektorok

1.26. PÉLDA ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ VEKTORI SZORZATA). *Legyen $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ három, páronként egymásra merőleges, ebben a sorrendben jobbrendszert alkotó egységvektor. Készítsünk művelettáblát vektori szorzataikról!*

MEGOLDÁS. Mivel $(\mathbf{i},\mathbf{i})_\angle = 0$, ezért $|\mathbf{i}\times\mathbf{i}| = 0$, így $\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{0}$. Hasonlóan $\mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{0}$ és $\mathbf{k}\times\mathbf{k} = \mathbf{0}$.

Mivel $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = 1$ és $(\mathbf{i},\mathbf{j})_\angle = 90°$, ezért $|\mathbf{i}\times\mathbf{j}| = 1$, azaz $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$ is egységvektor. Ráadásul $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$ merőleges $\mathbf{i}$-re és $\mathbf{j}$-re, és $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ valamint $\mathbf{i}\times\mathbf{j}$ jobbrendszert alkotnak épp úgy, mint $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$. Ebből következik, hogy $\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}$. Hasonlóképp $\mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}$ és $\mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$. Ha $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ jobbrendszert alkot, akkor $\mathbf{j}$, $\mathbf{i}$ és $\mathbf{k}$ balrendszert, így $\mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k}$. Mindezeket összefoglalva a következő művelettáblát kapjuk.

$\times$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$



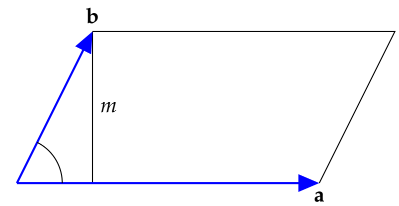
E három vektor közti szorzatok könnyen megjegyezhetőek, ha egy szabályos háromszög csúcsaira írjuk őket pozitív körüljárás szerint, mint azt a táblázat melletti ábra mutatja. Ekkor két különböző vektor szorzata a harmadik, ha a két vektor pozitív körüljárás szerint követi egymást. Ha negatív körüljárás szerint követik egymást, a szorzat a harmadik vektor -1-szerese. □

1.27. TÉTEL (MIKOR $\mathbf{0}$ A VEKTORI SZORZAT?). *Két térbeli vektor vektori szorzata pontosan akkor zérusvektor, ha a két vektor párhuzamos.*

BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{a}$ vagy $\mathbf{b}$ valamelyike zérusvektor, akkor egyrészt a két vektor tekinthető párhuzamosnak, másrészt $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{0}$, az állítás tehát igaz, ezért a továbbiakban feltesszük, hogy a két tényező egyike sem zérusvektor.

($\Leftarrow$) Ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ párhuzamosak, akkor $(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 0$ vagy π, tehát $\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 0$, így $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|0 = 0$, azaz $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

($\Rightarrow$) Ha $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{0}$, azaz $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 0$, akkor $|\mathbf{a}| \neq 0$ és $|\mathbf{b}| \neq 0$ miatt $\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 0$. A szinusz függvénynek a $[0,\pi]$ intervallumban a 0 és a π helyen van zérushelye, tehát a két vektor vagy egyirányú, vagy ellenkező irányú, vagyis párhuzamos. □



1.30. ábra: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ megegyezik a paralelogramma területével

1.28. TÉTEL (VEKTORI SZORZAT ABSZOLÚT ÉRTÉKÉNEK GEOMETRIAI JELENTÉSE). *Két vektor vektori szorzatának abszolút értéke a két vektor által kifeszített paralelogramma területének mérőszámával egyenlő.*

BIZONYÍTÁS. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma oldalainak hossza $|\mathbf{a}|$ és $|\mathbf{b}|$, az $\mathbf{a}$ oldalhoz tartozó magassága pedig $m = |\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle$. A paralelogramma területe $|\mathbf{a}|m = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ (1.30. ábra). □

1.29. TÉTEL (VEKTORI SZORZÁS MŰVELETI TULAJDONSÁGAI). *Tetszőleges* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *és* $\mathbf{c}$ *vektorokra, valamint tetszőleges* r *valós számra igazak az alábbi összefüggések:*

a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ *(alternáló tulajdonság)*

b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ *(disztributivitás)*

c) $r(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (r\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (r\mathbf{b})$

d) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2}$

e) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$ *(kifejtési tétel)*

► E tétel *a)* pontja szerint a vektori szorzás *nem kommutatív*!

► A vektori szorzás nem is asszociatív. Az 1.26. példa eredményét használva könnyen látható, hogy

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} \neq \mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}),$$

ugyanis $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$, másrészt $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

► A tétel bizonyítását az 1.49. feladatra hagyjuk.

Paralelepipedon térfogata és előjeles térfogata Az 1.28. tételben megmutattuk, hogy a vektori szorzat abszolút értéke a két vektor által kifeszített paralelogramma területét adja.

1.30. TÉTEL (PARALELEPIPEDON TÉRFOGATA). *Az* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *és* $\mathbf{c}$ *vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata* $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$. *A* $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ *kifejezés értéke pozitív, ha a vektorok jobbrendszert, negatív, ha balrendszert alkotnak, és nulla, ha lineárisan összefüggők.*

BIZONYÍTÁS. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített paralelogramma területe $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, és mivel $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges a paralelogramma síkjára, ezért a paralelepipedon magassága $\mathbf{c}$-nek az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ egyenesére eső merőleges vetületi hosszával egyenlő. Ez az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ irányú egységvektorral való skaláris szorzással számolható. Az egységvektor

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|},$$

a magasság $|\mathbf{e} \cdot \mathbf{c}|$, és így a térfogat (azaz az alapterületszer magasság) értéke

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \left| \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} \cdot \mathbf{c} \right| = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| \,.$$

Tehát a paralelepipedon térfogata $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$. A $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ skalár pontosan akkor negatív, ha a $\mathbf{c}$ vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ egyenesére eső merőleges vetülete és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ellenkező irányú. Vagyis ha a $\mathbf{c}$ vektor az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ síkjának másik oldalán van, mint az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor, azaz ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ balrendszert alkot! Végül $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{c}$, azaz ha a három vektor egy síkba esik. □

▶ A $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ skalárt az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelelpipedon *előjeles térfogatának* nevezzük.

Vegyes szorzat Az előző paragrafusban megmutattuk az $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ kifejezés fontosságát. Ez vezet a következő definícióhoz:

1.31. DEFINÍCIÓ (VEGYES SZORZAT). *A 3-dimenziós tér három tetszőleges* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *és* $\mathbf{c}$ *vektorából képzett*

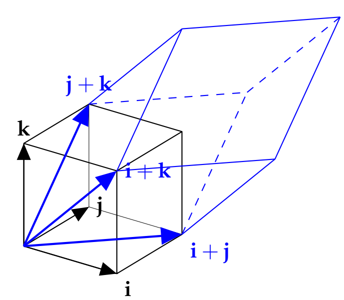
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

skalárt a három vektor vegyes szorzatának *nevezzük.*

▶ Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok vegyes szorzatának szokásos jelölése $\mathbf{abc}$, de mi a későbbi fejezetekben nem fogjuk használni.
▶ Mivel a skaláris szorzás kommutatív, ezért $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.
▶ A paralelepipedon térfogatára ugyanazt az értéket kell kapnunk, bármelyik oldallapot is választjuk alapnak, így e három vektorból a vektorok különböző sorrendjeivel képzett vegyes szorzatok csak előjelükben térhetnek el egymástól. Mivel az előjel az orientáció függvénye, ezért – figyelembe véve az előző megjegyzést is – kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = \\ &-(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{acb} = -\mathbf{cba} = -\mathbf{bac}.\end{aligned}$$

1.32. PÉLDA (VEGYES SZORZAT). *Határozzuk meg egy egységélű kocka egy csúcsból induló három lapátló-vektorának vegyes szorzatát (1.31 ábra)!*



1.31. ábra: $(\mathbf{i}+\mathbf{j})(\mathbf{j}+\mathbf{k})(\mathbf{k}+\mathbf{i}) = 2$

MEGOLDÁS. Jelölje a kocka egyik csúcsából induló három élvektorát $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$. E három vektor ebben a sorrendben alkosson jobbrendszert. Ekkor az előző megjegyzés szerint $\mathbf{ijk} = \mathbf{jki} = \mathbf{kij} = 1$, $\mathbf{kji} = \mathbf{jik} = \mathbf{ikj} = -1$. Mivel a vegyes szorzat egy paralelepipedon térfogatát vagy annak ellentettjét adja, ezért ha egy szorzatban egy vektor többször is szerepel, akkor annak értéke 0. Például $\mathbf{iji} = (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$. A három lapátló-vektor: $\mathbf{i}+\mathbf{j}$, $\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{k}+\mathbf{i}$. Ezek vegyes szorzata

$$\begin{aligned}((\mathbf{i}+\mathbf{j}) \times (\mathbf{j}+\mathbf{k})) \cdot (\mathbf{k}+\mathbf{i}) &= \mathbf{ijk}+\mathbf{iji}+\mathbf{ikk}+\mathbf{iki}+\mathbf{jjk}+\mathbf{jji}+\mathbf{jkk}+\mathbf{jki} \\ &= 1+0+0+0+0+0+0+1 \\ &= 2,\end{aligned}$$

tehát a három lapátló-vektor vegyes szorzata 2. Ez azt is jelenti, hogy e három vektor által kifeszített paralelepipedon térfogata 2. □

Feladatok

Ellenőrző kérdések

1.29.• SKALÁRIS SZORZÁS: IGAZ – HAMIS Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

a) Két egységvektor skaláris szorzata -1 és 1 közé esik.

b) Egy $\mathbf{v}$ vektor szorzata egy egységvektorral megegyezik $\mathbf{v}$-nek az egységvektor egyenesére eső merőleges vetületével.

c) A skaláris szorzás kommutatív.

d) A skaláris szorzás asszociatív (ld. 1.35. feladat).

e) A nullvektor bármely vektorra merőleges.

f) Két vektor pontosan akkor merőleges, ha skaláris szorzatuk 0.

g) Ha $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, akkor $\mathbf{b} = \mathbf{c}$.

1.30.• VEKTORI SZORZÁS, ORIENTÁCIÓ: IGAZ – HAMIS Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

a) A vektori szorzás kommutatív és asszociatív művelet.

b) Ha $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, akkor $\mathbf{b} = \mathbf{c}$.

c) Ha az xy-síkbeli $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok irányított szöge a $\mathbf{k}$ egységvektor felől nézve pozitív, akkor $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = c\mathbf{k}$, ahol $c > 0$.

d) Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ jobbrendszert alkot, akkor $\mathbf{a}$, $-\mathbf{b}$ és $-\mathbf{c}$ is.

e) Ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ jobbrendszert alkot, akkor $-\mathbf{a}$, $-\mathbf{b}$ és $-\mathbf{c}$ is.

f) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ pontosan akkor igaz, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineárisan összefüggők.

g) Ha $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, de $\mathbf{a} \times \mathbf{v} = \mathbf{b} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ lineárisan összefüggők.

Skaláris, vektori és vegyes szorzás

A következő feladatokban megadott adatok alapján számítsuk ki az $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ skaláris szorzatot! Legyen $\gamma = (\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle$.

1.31.• $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$.

1.32. $|\mathbf{a}| = \sqrt{2}$, $|\mathbf{b}| = 2$, $\gamma = \frac{3\pi}{4}$.

1.33. $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, $\gamma = \pi$.

1.34.• $|\mathbf{a}| = \sqrt{2}$, $|\mathbf{b}| = 2$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

1.35. Igazoljuk, hogy általában $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} \neq \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$.

1.36. Egyszerüsítsük az alábbi kifejezést!

a) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$ *b)* $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

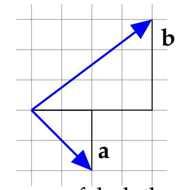
1.37. Mekkora $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ szöge, ha $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$, $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 5$?

1.38.• Legyen O a tér adott pontja, $\mathbf{a}$ egy tetszőleges vektor és c egy tetszőleges konstans. Hol helyezkednek el azok az X pontok, amelyekre $\overrightarrow{OX} \cdot \mathbf{a} = c$?

1.39. Határozzuk meg az $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3$ értékét, ha $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ és $\mathbf{e}_3$ egységvektorok és $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$.

1.40.• Bizonyítsuk be, hogy ha a térbeli $\mathbf{v}$ vektor merőleges a lineárisan független (nem komplanáris) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok mindegyikére, akkor $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

1.41. SKALÁRIS SZORZAT KISZÁMÍTÁSA Számítsuk ki az ábrán látható két vektor skaláris szorzatát (a szomszédos rácsvonalak távolsága 1 egység).



1.42. MERŐLEGES ÖSSZETEVŐKRE BONTÁS Az 1.41. feladatbeli vektorokra $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2$ és $|\mathbf{a}| = 2\sqrt{2}$. Bontsuk fel a $\mathbf{b}$ vektort $\mathbf{a}$-val párhuzamos és rá merőleges összetevőkre.

1.43.* Igaz-e, hogy $|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ három egymásra páronként merőleges vektor?

1.44.• Számítsuk ki

a) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ értékét, ha $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle = \frac{\pi}{6}$.

b) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ értékét, ha $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = 2$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle = \pi$.

1.45. Egyszerüsítsük az alábbi kifejezést!

a) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})$ *b)* $(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + \mathbf{j})$

1.46. Tekintsünk egy egységélű kockát, melynek egyik csúcsát jelölje P. Számítsuk ki a P-ből induló

a) valamelyik két lapátló-vektor skaláris szorzatát,

b) egyik lapátló- és a testátló-vektor skaláris szorzatát,

valamint a P-ből induló valamelyik élvektor és

c) egy vele egy lapon lévő lapátló-vektor,

d) egy vele nem egy lapon lévő lapátló-vektor

vektori szorzatát.

1.47. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{u}$ merőleges a $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorokra, akkor merőleges minden lineáris kombinációjukra is.

1.48. Három lineárisan független vektor lehetséges sorrendjei közül hány alkot jobb- és hány balrendszert?

1.49. Igazoljuk az 1.29. tétel állításait!

1.50. SZÖGFELEZŐ Legyenek $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ nemzérus vektorok. Mutassuk meg, hogy a $|\mathbf{b}|\mathbf{a} + |\mathbf{a}|\mathbf{b}$ vektor felezi $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ szögét! (Ezt felhasználva mutassuk meg, hogy a háromszög egyik szögének szögfelezője a szemközti oldalt a két szomszédos oldal hosszának arányában osztja fel.)

1.51. MIT CSERÉL FÖL A TÜKÖR? Hogy lehet az, hogy a tükör fölcseréli a jobbat a ballal, de a föntet a lenttel nem?

1.52. VEKTORI SZORZÁS EGYSÉGVEKTORRAL Ha $\mathbf{e}$ egységvektor és $\mathbf{a}$ egy tetszőleges vektor, akkor mi az $|\mathbf{e} \times \mathbf{a}|$ szám és az $(\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{e}$ vektor geometriai jelentése?

1.53. Bizonyítsuk, hogy ha $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$. Igaz-e az állítás megfordítása?

1.54. Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata V. Mennyi a térfogata a következő három vektor által kifeszített paralelepipedonnak?

a) $\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{v} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$, $\mathbf{w} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$,

b) $\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + 3\mathbf{c}$ $\mathbf{w} = \mathbf{a} + 3\mathbf{b} + \mathbf{c}$.

Mi a kapcsolat az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ körüljárása és az $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ vektorok körüljárása között?

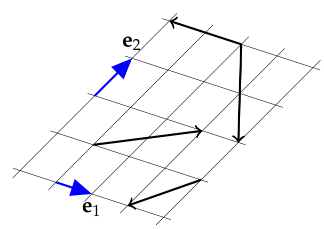
Vektorok koordinátás alakban

A koordináták bevezetésével egyrészt új algebrai eszközökhöz jutunk a vektorok és a különféle geometriai alakzatok vizsgálatában, másrészt lehetővé válik a vektor fogalmának kiterjesztése. Így jutunk a sokdimenziós terek fogalmához, ami nélkülözhetetlen a közgazdaságtanban, az internetes keresők matematikájában, vagy véges struktúrák fölötti változatában a kódelméletben és a kriptográfiában.

René Descartes (Renatus Cartesianus) (1596–1650) francia filozófus és matematikus, a modern filozófia atyja, az analitikus geometria egyik megalkotója. Filozófiáját a puszta hitre alapozott állításokkal szemben a racionális érvelések útján kívánta fölépíteni (lásd *descartesi kételkedés* és „gondolkodom, tehát vagyok”). Orvostudományt és jogot tanult, végül hadmérnöki képesítést szerzett. Több háborúban is részt vett. 1619-ben egy Magyarországot is érintő hosszú útján egy Ulm melletti parasztházban három álmot látott, melyek megfejtése „egy csodálatos tudományhoz” vezette, ami filozófiája alapjává vált.

Descartes-féle koordináta-rendszer Descartes 1637-ben *La Géométrie* című művében egy szép ötlettel összekapcsolta a geometriát az algebrával. Alapgondolata az volt, hogy a geometria alapelemei (pl. pontok) és a valós számok/számpárok/számhármasok közt kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés hozható létre, így bizonyos geometriai alakzatok algebrai egyenletekkel leírhatóvá és vizsgálhatóvá válnak.

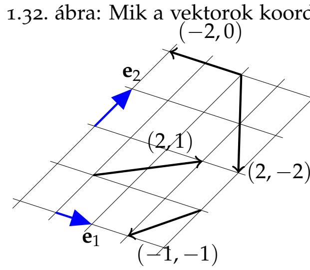
Az 1.11. tétel szerint a sík bármely $\mathbf{v}$ vektora felírható két adott lineárisan független $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ vektor lineáris kombinációjaként, és e felírás egyértelmű. Ha e lineáris kombináció $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$ alakú, akkor a $\mathbf{v}$ vektorhoz a (v_1, v_2) számpárt rendeljük, és ezt a $\mathbf{v}$ vektor *koordinátás alakjának*, a v_1 és v_2 skalárokat pedig a $\mathbf{v}$ *koordinátáinak* nevezzük. Azt mondjuk, hogy az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ vektorpár e *koordináta-rendszer bázisa*, az $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ vektorok a *bázisvektorok* vagy *alapvektorok*. Tetszőleges vektor koordinátáinak meghatározásához elég a bázisvektorokat ismerni.



1.32. ábra: Mik a vektorok koordinátái?

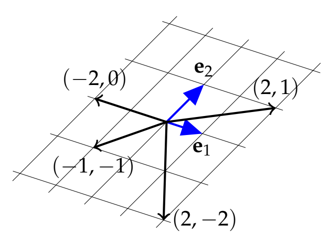
1.33. PÉLDA (VEKTOROK KOORDINÁTÁI). *Határozzuk meg az 1.32. ábrán megadott vektoroknak az $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ vektorokra, mint bázisra vonatkozó koordinátáit!*

MEGOLDÁS. A megoldás leolvasható az 1.33. ábráról. Áttekinthetőbb, ha az összes vektort egyetlen pontból indítjuk (ld. 1.34. ábra). □



1.33. ábra: A megoldás

A koordináta-rendszer a 3-dimenziós térben is hasonló módon építhető fel. Az 1.12. tétel szerint a tér bármely $\mathbf{v}$ vektora felírható három adott lineárisan független $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ és $\mathbf{e}_3$ vektor lineáris kombinációjaként, és e felírás egyértelmű. Ha $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3$, akkor a $\mathbf{v}$ vektorhoz a (v_1, v_2, v_3) számhármast rendeljük, és ezt a $\mathbf{v}$ vektor *koordinátás alakjának*, a v_1, v_2 és v_3 skalárokat pedig a $\mathbf{v}$ *koordinátáinak* nevezzük. *Bázis* az $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ vektorhármas.

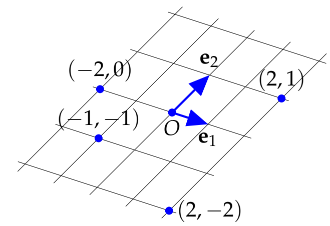


1.34. ábra: A megoldás helyvektorokkal ábrázolva.

A koordinátázás az 1-dimenziós térben is megvalósítható: ha $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ (tehát $\{\mathbf{e}\}$ lineárisan független vektorrendszer!), akkor bármely vele párhuzamos $\mathbf{v}$ vektor egyértelműen felírható $\mathbf{v} = v\mathbf{e}$ alakban. E v skalár lesz a $\mathbf{v}$ koordinátás alakja (a zárójel itt szükségtelen). Így a $\mathbf{v} \leftrightarrow v$ hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű a vektorok és a skalárok közt.

Ha kijelölünk egy pontot az egyenesen/síkban/térben – ez lesz az origó –, akkor az egyenes/sík/tér pontjai és a helyvektorok végpontjai közti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetéssel egyúttal a pontok is koordinátát kapnak.

Például az 1.34 helyvektorainak végpontjai a helyvektoréval azonos koordinátákat kapnak (ld. 1.35. ábra).

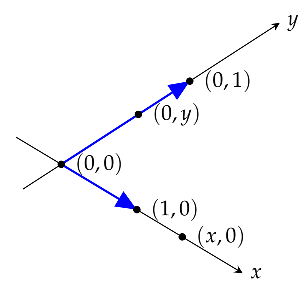


1.35. ábra: Pontok és koordinátáik

A helyvektorok és a pontok közti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést a jelölésben is kifejezzük azzal, hogy nem teszünk különbséget a vektor és a pont koordinátás alakja közt, azaz a $\mathbf{v} = (a, b)$ vektorhoz adott origó mellett rendelt pontot is (a, b) jelöli. A vektorok koordinátás alakja – később kifejtendő okból – ún. *oszlopvektor* alakba is írható. E könyvben ekkor kerek helyett szögletes zárójelet használunk:

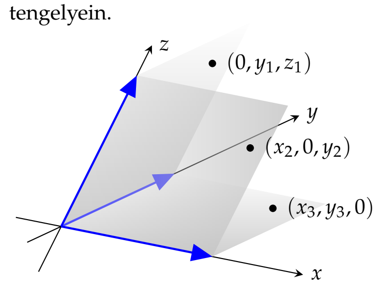
$$(a, b) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Ha a síkon egy pont az első koordinátatengelyen van, és azon az egyenesen x az 1-dimenziós koordinátája, akkor síkbeli koordinátás alakja $(x, 0)$ lesz. Hasonlóképp a második tengely minden pontjának $(0, y)$ a koordinátás alakja. Az origóé $(0, 0)$ (ld. 1.36. ábra). Az alapvektorok koordinátás alakja $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ és $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$.



1.36. ábra: Pontok a koordináta-rendszer tengelyein.

A 3-dimenziós esetben a koordinátatengelyekre eső pontok 3-dimenziós koordinátás alakja $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$, illetve $(0, 0, z)$. Az origón átmenő és 2 tengelyt tartalmazó síkokat *koordinátasíkoknak* nevezzük. A koordinátasíkok pontjainak alakja $(x, y, 0)$, $(x, 0, z)$, illetve $(0, y, z)$. Az origóé $(0, 0, 0)$, míg az alapvektoroké $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ (ld. 1.37. ábra).



1.37. ábra: Pontok a koordinátasíkokon

Műveletek koordinátás alakban megadott vektorokkal Adva van a térben egy koordináta-rendszer és abban két tetszőleges $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektor. Keressük $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $c\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ koordinátás alakját.

Az adott két vektor összege:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) \\
&= (u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) + (v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3) \\
&= (u_1 + v_1)\mathbf{e}_1 + (u_2 + v_2)\mathbf{e}_2 + (u_3 + v_3)\mathbf{e}_3 \\
&= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3).
\end{aligned}$$

A különbségre vonatkozó összefüggés hasonlóan igazolható. A skalárral szorzás is egyszerűen koordinátánként számolható:

$$\begin{aligned}
c\mathbf{u} = c(u_1, u_2, u_3) &= c(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3) \\
&= cu_1\mathbf{e}_1 + cu_2\mathbf{e}_2 + cu_3\mathbf{e}_3 \\
&= (cu_1, cu_2, cu_3).
\end{aligned}$$

1.34. ÁLLÍTÁS (VEKTORMŰVELETEK KOORDINÁTÁS ALAKJA). *Adva van a térben egy koordináta-rendszer és abban két tetszőleges* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *és* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *vektor, valamint egy tetszőleges* $c \in \mathbb{R}$ *valós szám. Ekkor a vektorok összegének, különbségének és skalárszorosának koordinátás alakja*

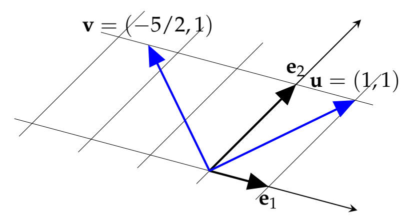
$$\begin{aligned}
\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3), \\
\mathbf{u} - \mathbf{v} &= (u_1, u_2, u_3) - (v_1, v_2, v_3) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3), \\
c\mathbf{u} &= c(u_1, u_2, u_3) = (cu_1, cu_2, cu_3).
\end{aligned}$$

Az oszlopvektor jelölést használva

$$\mathbf{u} \pm \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \pm v_1 \\ u_2 \pm v_2 \\ u_3 \pm v_3 \end{bmatrix}, \quad c\mathbf{u} = c \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ cu_3 \end{bmatrix}.$$

A síkbeli vektorokra hasonló állítások igazak, csak két koordinátával. Ellentétben az előzőekkel, a skaláris szorzás koordinátás alakja függ a koordináta-rendszertől.

1.35. PÉLDA (SKALÁRIS SZORZÁS KOORDINÁTA-RENDSZERBEN). *Legyen a síkban az első alapvektor hossza* 1*, a másodiké* 2*, a köztük lévő szög* $\pi/3$*. Számítsuk ki az* $\mathbf{u} = (1, 1)$ *és a* $\mathbf{v} = (-5/2, 1)$ *vektorok skaláris szorzatát!*



1.38. ábra: Két vektor skaláris szorzata

MEGOLDÁS. Az alapvektorok hosszát és szögét ismerve ki tudjuk számítani az alapvektorok skaláris szorzatait:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 2^2 = 4, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 1 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 1.$$

Így két teszőleges $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ vektorra:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2) \cdot (v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2) \\
&= u_1 v_1 \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + u_2 v_2 \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 \\
&= u_1 v_1 + u_1 v_2 + u_2 v_1 + 4 u_2 v_2.
\end{aligned}$$

A megadott vektorokra $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -\frac{5}{2} + 1 - \frac{5}{2} + 4 = 0$, tehát a két vektor merőleges egymásra (ld. az 1.38. ábrát). □

A derékszögű koordináta-rendszer A természeti törvények különös fontosságot adnak az egymásra merőleges irányoknak, ezért például igen gyakran érdemes olyan koordináta-rendszert választani, amelyben az alapvektorok merőlegesek, más szóval *ortogonálisak* egymásra. A bázisvektorok szöge mellett azok hosszát is érdemes standardizálni, nevezetesen egységnyi hosszúnak választani, így mindegyik koordináta egyúttal távolságot is jelent. Az egységvektorokból álló ortogonális bázist *ortonormált bázisnak* nevezzük.

Az egységes tárgyalás érdekében a bázisvektorok körüljárását is előírhatjuk: általánosan elterjedt szokás a jobbrendszert választani. Az így konstruált bázis vektorait síkban gyakran $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, térben $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{k}$ jelöli.

A két és háromdimenziós térben a skaláris szorzat egyszerű alakot ölt, ha a koordináta-rendszer alapvektorai ortonormáltak.

1.36. ÁLLÍTÁS (SKALÁRIS SZORZAT ORTONORMÁLT KOORDINÁTA-RENDSZERBEN). *A síkbeli* $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ *és* $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, *illetve a térbeli* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ *és* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ *vektorok skaláris szorzata ortonormált koordináta-rendszerben*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2, \text{ illetve } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

BIZONYÍTÁS. A síkbeli esetben kihasználjuk, hogy $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$ és $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}) \cdot (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}) \\ &= u_1v_1\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + (u_1v_2 + u_2v_1)\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + u_2v_2\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} \\ &= u_1v_1 + u_2v_2\end{aligned}$$

A térbeli eset hasonlóan bizonyítható. □

1.37. ÁLLÍTÁS (VEKTORI SZORZAT ORTONORMÁLT KOORDINÁTA-RENDSZERBEN). *A térbeli* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *és* $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *vektorok vektori szorzata derékszögű koordináta-rendszerben*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

► Az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ koordinátáinak könnyű memorizálására két sémát mutatunk a széljegyzetben (1.39. ábra).

BIZONYÍTÁS. Az alapvektorok egymással való vektori szorzatait már kiszámoltuk az 1.26. példában. Kihasználva, hogy $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \ldots$, a következőt kapjuk:

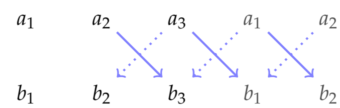
$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\ &= a_2b_3\mathbf{j} \times \mathbf{k} + a_3b_2\mathbf{k} \times \mathbf{j} + a_3b_1\mathbf{k} \times \mathbf{i} + a_1b_3\mathbf{i} \times \mathbf{k} + a_1b_2\mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_2b_1\mathbf{j} \times \mathbf{i} \\ &= a_2b_3\mathbf{i} - a_3b_2\mathbf{i} + a_3b_1\mathbf{j} - a_1b_3\mathbf{j} + a_1b_2\mathbf{k} - a_2b_1\mathbf{k} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).\end{aligned}$$

□

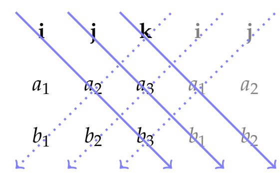
1.38. TÉTEL (PARALELOGRAMMA TERÜLETE). *Az* (a, b) *és a* (c, d) *vektorok által kifeszített paralelogramma területe*

$$|ad - bc|.$$

Az $ad - bc$ *előjele aszerint pozitív, illetve negatív, hogy a két vektor a megadott sorrendben jobb- vagy balrendszert alkot.*



a) $(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$



b) $(a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} +$
$(a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} +$
$(a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$

1.39. ábra: A vektori szorzat kiszámítása a két vektor koordinátáiból:
a) Írjuk a két vektort egymás alá, majd az első két koordinátát másoljuk a vektorok végére, végül az X alakba rakott nyílpároknál a ↘ nyíl végein lévő számok szorzatából vonjuk ki a ↙ szerinti szorzatot. Az eredmény:

$$(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

b) Írjuk a két vektor koordinátái fölé az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ vektorokat, majd az előzőhöz hasonlóan másoljuk e táblázat után az első két oszlopot, végül a ↘ nyíl menti szorzatokból vonjuk ki a ↙ menti szorzatokat. Megjegyezzük, hogy e séma a később tanulandó determinánsok kiszámítására emlékeztet, formálisan föl is szokás írni a determinánsokat jelölő függőleges zárójelek segítségével:

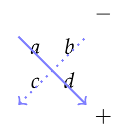
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

BIZONYÍTÁS. Két 3-dimenziós vektor által kifeszített paralelogramma területe a vektori szorzatuk abszolút értéke. Ágyazzuk be a megadott két vektort a tér egyik koordinátasíkjába, tekintsük például az $(a,b,0)$ és a $(c,d,0)$ vektorokat. Vektori szorzatuk

$$(a,b,0) \times (c,d,0) = (0,0,ad-bc),$$

ennek abszolút értéke $|ad-bc|$.

Mivel az $(a,b,0)$, $(c,d,0)$ és $(0,0,ad-bc)$ vektorok jobbrendszert alkotnak, ezért $ad-bc$ pontosan akkor pozitív, ha a síkban az (a,b) és a (c,d) vektorok jobbrendszert alkotnak. □



1.40. ábra: A paralelogramma előjeles területe $ad-bc$, melynek memorizálására a fenti séma használatos. Ez megegyezik két 2-dimenziós vektor – később tanulandó – determinánsával, melyet úgy jelöljük, hogy a két vektor koordinátáiból képzett táblázatot függőleges zárójelek közé zárjuk:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

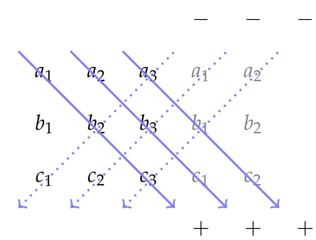
E jel nem az abszolút értéket jelöli, ahhoz egy további zárójelpár szükséges, azaz

$$|ad-bc| = \left| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right|.$$

A paralelepipedon térfogata is kifejezhető az azt kifeszítő vektorok koordinátáival. Az $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ és $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata megegyezik az

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 \quad (1.3)$$

kifejezés abszolút értékével, előjele pedig aszerint pozitív, illetve negatív, hogy a vektorok jobb- vagy balrendszert alkotnak. E képlet kiszámítására, memorizálására a széljegyzet ad segítséget (1.41. ábra).



1.41. ábra: A paralelepipedon térfogata megegyezik az azt kifeszítő három vektor vegyes szorzatának abszolút értékével. A vektori szorzáshoz használt séma itt is működik: a három vektort egymás alá írjuk, az így kapott táblázat első két oszlopát utána másoljuk, végül a ↘ nyíl menti szorzatokból kivonjuk a ↙ menti szorzatokat. A később tanulandó determinánsokra használt jelöléssel tehát a paralelepipedon előjeles térfogata:

$$\mathbf{abc} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Az $\mathbb{R}^n$ halmaz Láttuk, hogy a 2-dimenziós, illetve 3-dimenziós vektorjellegű mennyiségek leírhatók egy rendezett számpárral, illetve számhármassal. Vajon megfordítható-e ez a kapcsolat? Értelmes dolog-e e szám-n-eseket egy n-dimenziós tér vektorainak, vagy pontjainak tekinteni? És hasznos-e a 2- és 3-dimenziós térben használt fogalmak általánosítása n dimenzióra? A válasz mindegyik kérdésre határozott igen, amit a fizika 4-dimenziós tér-idő fogalmától számtalan gazdasági, vagy internettel kapcsolatos kérdés sokmilliárd-dimenziós térben való megoldása fényesen bizonyít.

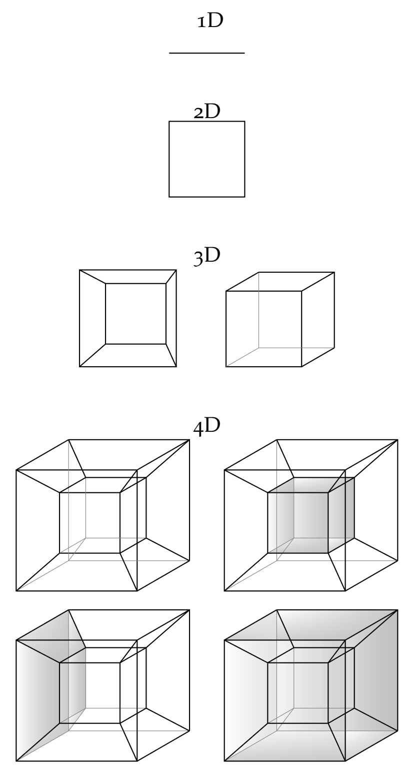
1.39. DEFINÍCIÓ. *Egy tetszőleges H halmaz elemeiből képzett rendezett elem-n-esek halmazát H^n-nel jelöljük.*

Például a $H = \{0,1\}$ halmaz elemeiből képzett rendezett elemhármasok halmaza

$$H^3 = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}.$$

A fenti jelölésnek megfelelően $\mathbb{R}^n$ *a valós számokból képzett rendezett szám-n-esek halmazát jelöli.* Eszerint a sík pontjait és vektorait $\mathbb{R}^2$, a térét $\mathbb{R}^3$ elemeivel koordinátáztuk. $\mathbb{R}^n$ elemein vektorműveleteket fogunk bevezetni, és $\mathbb{R}^n$-ről, mint vektortérről fogunk beszélni. Hasonlóképp, $\mathbb{R}^n$-t geometriai vagy ponttérnek fogjuk tekinteni, ha elemeire, mint pontokra gondolunk, és köztük geometriai műveleteket végezünk. E kétféleség nem fog zavart okozni: $\mathbb{R}^n$ szerepét mindig az fogja meghatározni, hogy mit teszünk elemeivel, vagyis a szám-n-esekkel.

Az $\mathbb{R}^n$ megismerésében az *analógia* fonalán haladunk, a 2- és 3-dimenziós tér fogalmait fogjuk átvinni, általánosítani n dimenzióra. Ez az analógia fog segíteni abban, hogy valamit „lássunk” n dimenzióban is (ha nem is olyan jól, mint 3 dimenzióban). Példaként az analógiára egy 4-dimenziós kocka 2-dimenziós vetületét mutatjuk az 1.42. ábrán.



1.42. ábra: 4-dimenziós kocka ábrázolása 2-dimenzióban. A 0-dimenziós „kocka” egyetlen pontból áll, az 1-dimenziós kockát két 0-dimenziós határolja, azaz ez egy szakasz. A 2-dimenziós „kockát”, azaz a négyzetet minden tengelyirányból két-két egybevágó 1-dimenziós „kocka” határolja (azaz összesen négy), míg a 3-dimenziós kockát minden tengelyirányból két-két négyzet (azaz összesen hat). A 3-dimenziós kocka ábrázolása 2-dimenzióban csak a határoló négyzetek torzításával oldható meg. A 4-dimenziós kockát mind a négy tengelyirányból két-két 3-dimenziós kocka határolja, összesen nyolc. Az ábrán három ilyen 3-dimenziós kockát kiszíneztünk.

Vektorok összeadása és skalárral szorzása $\mathbb{R}^n$-ben A 2- és 3-dimenziós vektorok műveleteinek koordinátás alakja az összeadás, kivonás és skalárral szorzás esetén analóg módon átvihető az n-dimenziós vektorokra.

1.40. DEFINÍCIÓ (VEKTORMŰVELETEK $\mathbb{R}^n$-BEN). *Legyen $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ az $\mathbb{R}^n$ két tetszőleges vektora. Két vektor összegén és egy vektor c-szeresén az*

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \\ c\mathbf{u} &= (cu_1, cu_2, \dots, cu_n). \end{aligned}$$

$\mathbb{R}^n$-beli vektorokat értjük.

Összefoglaljuk e műveletek legfontosabb tulajdonságait:

1.41. TÉTEL (AZ ÖSSZEADÁS ÉS SKALÁRRAL SZORZÁS TULAJDONSÁGAI). *Legyen $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ az $\mathbb{R}^n$ három tetszőleges vektora, és legyen c, d két teszőleges valós, jelölje $\mathbf{0}$ a $(0, 0, \dots, 0)$ vektort. Ekkor*

a)	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$	*a művelet fölcserélhető (kommutatív)*
b)	$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$	*csoportosítható (asszociatív)*
c)	$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$	*zérusvektor*
d)	$c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$	*a két szorzás kompatibilis*
e)	$0\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$	*szorzás 0-val és 1-gyel*
f)	$c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$	*disztributív*
g)	$(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$	*disztributív*

Megegyezünk még abban, hogy egy $\mathbf{u}$ vektor $-\mathbf{u}$-val jelölt ellentettjén a -1-szeresét értjük, azaz $-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u} = (-u_1, -u_2, \dots, -u_n)$. Így két vektor különbségére igaz, hogy $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.

► E tulajdonságok mindegyike könnyen visszavezethető a valós számok algebrai tulajdonságaira, ezért ezek ellenőrzését (bizonyítását) az Olvasóra hagyjuk. Mintaként megmutatjuk a *b)* bizonyítását:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \\ &= (v_1 + u_1, v_2 + u_2, \dots, v_n + u_n) \\ &= \mathbf{v} + \mathbf{u}. \end{aligned}$$

► Az *a)–c)* tulajdonságok az összeadás, az *d)–e)* a skalárral szorzás, az *f)–g)* a két művelet közös tulajdonságait írják le.

Lineáris kombináció, lineáris függetlenség, lineáris összefüggőség Hiába definiáltuk vektorok lineáris függetlenségének fogalmát tetszőleges számú vektorból álló vektorhalmazra, láttuk, hogy a 3-dimenziós térben legföljebb csak 3 vektor lehet lineárisan független. Viszont $\mathbb{R}^n$-ben n lineárisan független vektort is találunk.

1.42. ÁLLÍTÁS ($\mathbb{R}^n$ STANDARD BÁZISA). *Az $\mathbb{R}^n$-beli $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$ vektorok lineárisan függetlenek, és $\mathbb{R}^n$ minden vektora egyértelműen előáll ezek lineáris kombinációjaként!*

BIZONYÍTÁS. Az $\mathbf{e}_1$ nem áll elő a többi vektor lineáris kombinációjaként, hisz azok első koordinátája 0, így bármely lineáris kombinációjukban is 0 az első koordináta, $\mathbf{e}_1$-ben pedig 1. Hasonlóan igazolható, hogy egyik $\mathbf{e}_i$ sem áll elő a többi vektor lineáris kombinációjaként ($i = 2, 3, \dots, n$). A megadott vektorok tehát lineárisan függetlenek.

Mivel az i-edik koordináta egyedül csak az $\mathbf{e}_i$ vektorban 1, a többiben 0, ezért ha egy tetszőleges $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ vektor előáll az $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2, \dots,$ $\mathbf{e}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként, akkor abban $\mathbf{e}_i$ együtthatója csak v_i lehet. Másrészt az is világos, hogy

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \dots + v_n\mathbf{e}_n.$$

Ezzel igazoltuk, hogy $\mathbb{R}^n$ minden vektora egyértelműen áll elő az $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2, \dots,$ $\mathbf{e}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként. □

1.43. DEFINÍCIÓ (STANDARD BÁZIS). *Az $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2, \dots,$ $\mathbf{e}_n$ vektorokból álló halmazt az $\mathbb{R}^n$ vektortér* standard bázisának *nevezzük.*

A fenti bizonyításban úgy igazoltuk vektorok lineáris függetlenségét, hogy az 1.10. definíciónak megfelelően igazoltuk, hogy mindegyik vektor független a többitől. Ez az út nehézkes. Ugyanakkor a síkban és a térben azt láttuk, hogy a vektorok függetlenségével együtt jár a belőlük képzett lineáris kombinációk egyértelműsége. Ez igaz a nullvektorra is, mely nulla együtthatókkal vett lineáris kombinációként előáll – ezt nevezzük a nullvektor triviális előállításának. Ez az alapja a következő tételnek:

1.44. TÉTEL (LINEÁRIS FÜGGETLENSÉG). *Tetszőleges $\mathbb{R}^n$-beli $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ vektorrendszerre az alábbi két állítás ekvivalens:*

1. $\mathcal{V}$ lineárisan független, *azaz $k > 1$ esetén egyik vektora sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként, $k = 1$ esetén pedig a vektor nem a zérusvektor.*
2. *A zérusvektor csak egyféleképp – a triviális módon – áll elő $\mathcal{V}$ lineáris kombinációjaként. Másként fogalmazva, a c_1, $c_2, \dots, c_k$ skalárokkal vett lineáris kombináció csak akkor lehet a nullvektor, azaz*

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

csak akkor állhat fenn, ha $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$.

BIZONYÍTÁS. Először tegyük fel, hogy a vektorrendszer csak egyetlen $\mathbf{v}$ vektorból áll. Ekkor a tétel azt állítja, hogy e vektor pontosan akkor lineáris független, azaz pontosan akkor nem a nullvektor, ha a $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$ csak $c = 0$ esetén állhat fenn. Ez nyilvánvaló, hisz ha $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ és $c \neq 0$, akkor $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sem állhat fenn. A továbbiakban tegyük fel, hogy a vektorrendszer legalább két vektorból áll. A következőkben kontrapozícióval bizonyítunk, azaz az $A \Rightarrow B$ állítást a vele ekvivalens $\neg B \Rightarrow \neg A$ állítással igazoljuk.

($\Leftarrow$) Megmutatjuk, hogy ha $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ csak $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$ esetén állhat fenn, akkor semelyik $\mathbf{v}_i$ vektor sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként ($i = 1, 2, \ldots, k$). Tegyük fel, hogy valamelyik vektor – például a $\mathbf{v}_1$ – kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként, azaz

$$\mathbf{v}_1 = d_2\mathbf{v}_2 + \ldots + d_k\mathbf{v}_k,$$

vagyis átrendezés után

$$(-1)\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \ldots + d_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Mivel $\mathbf{v}_1$ együtthatója nem 0, így elő tudtuk állítani a nullvektort olyan lineáris kombinációként, melyben nem minden együttható 0.

($\Rightarrow$) Megmutatjuk, hogy ha a vektorrendszer egyik vektora sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként, akkor egyedül csak a csupa zérus együtthatójú lineáris kombinációja lehet zérusvektor. Ismét kontrapozícióval bizonyítunk: ha van olyan – nem csupa 0 együtthatójú – lineáris kombináció, mely a nullvektorral egyenlő, azaz

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

de valamelyik együttható – például a c_1 – nem 0, akkor $\mathbf{v}_1$ kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\mathbf{v}_2 - \ldots - \frac{c_k}{c_1}\mathbf{v}_k,$$

ami bizonyítja az állítást. □

Egy vektorrendszert *lineárisan összefüggőnek* nevezünk, ha nem független, azaz egyelemű vektorrendszer esetén ha az a vektor a zérusvektor, többelemű vektorrendszer esetén pedig ha van olyan vektora, mely kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Az előző tétel szerint ez azzal ekvivalens, hogy a vektorrendszernek van olyan zérusvektort adó lineáris kombinációja, melyben nem mindegyik együttható zérus. A lineáris összefüggőség definíciója kicsit élesíthető:

1.45. TÉTEL (LINEÁRIS ÖSSZEFÜGGŐSÉG). *Egy nullvektortól különböző elemekből álló, legalább kételemű $\mathbb{R}^n$-beli $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan összefüggő, ha van olyan $t \geq 2$ index, hogy $\mathbf{v}_t$ a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots$, $\mathbf{v}_{t-1}$ vektorok lineáris kombinációja.*

Másként fogalmazva, ha egy nullvektort nem tartalmazó vektorrendszerben találunk olyan vektort, mely a többi lineáris kombinációja, akkor a vektorok bármely sorba rendezése mellett olyat is találunk, mely csak az őt sorrendben megelőző vektor(ok) lineáris kombinációja.

BIZONYÍTÁS. Először tegyük fel, hogy a vektorrendszer összefüggő, és legyen t az a legkisebb egész, melyre a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \dots$, $\mathbf{v}_t$ vektorok már összefüggők. Mivel $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, ezért az első vektor nem lehet összefüggő, ezért $t \geq 2$. E vektorok összefüggősége miatt vannak olyan c_i konstansok, melyekkel

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_t\mathbf{v}_t = \mathbf{0}.$$

Biztos, hogy $c_t \neq 0$, különben már a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \dots$, $\mathbf{v}_{t-1}$ vektorok is lineáris összefüggők lennének, és ez ellentmond t definíciójának. Így

$$\mathbf{v}_t = \frac{-c_1}{c_t}\mathbf{v}_1 + \frac{-c_2}{c_t}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{-c_{t-1}}{c_t}\mathbf{v}_{t-1},$$

ami bizonyítja, hogy összefüggő vektorrendszerben létezik ilyen vektor.

A másik irányú implikáció definíció szerint igaz, hisz ha létezik ilyen $\mathbf{v}_t$ vektor, akkor ez valóban lineáris kombinációja az összes többi vektornak. □

Skaláris szorzás $\mathbb{R}^n$-ben A skaláris szorzást először abból az alakból általánosítjuk, amelyet a 2- és 3-dimenziós térben ortonormált bázis esetén láttunk.

1.46. DEFINÍCIÓ (SKALÁRIS SZORZÁS $\mathbb{R}^n$-BEN). *Legyen* $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ *és* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ *az* $\mathbb{R}^n$ *tér két tetszőleges vektora. Skaláris szorzatukon a következő kifejezést értjük:*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n.$$

1.47. TÉTEL (A SKALÁRIS SZORZÁS ALAPTULAJDONSÁGAI). *Legyen* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *és* $\mathbf{w}$ *az* $\mathbb{R}^n$ *három tetszőleges vektora, és legyen c egy teszőleges valós. Ekkor*

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ *kommutatív*

b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ *disztributív*

c) $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ *kompatibilis a két szorzás*

d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ *és* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}$ *pozitív definit*

BIZONYÍTÁS. A bizonyítás itt is igen egyszerű, ezért csak az *a)* pontét mutatjuk meg, a többit az Olvasóra hagyjuk:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n \\ &= v_1u_1 + v_2u_2 + \ldots + v_nu_n \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}.\end{aligned}$$

□

További tulajdonságok találhatók az 1.64. feladatban.

Távolság és szög $\mathbb{R}^n$-ben Két 2- vagy 3-dimenziós vektor távolságának és szögének a skaláris szorzatukkal való kapcsolatát használjuk e fogalmaknak a magasabb dimenziós terekben való definíciójához.

1.48. DEFINÍCIÓ (ABSZOLÚT ÉRTÉK, SZÖG, MERŐLEGESSÉG, TÁVOLSÁG). *Legyen* $\mathbf{u}$ *és* $\mathbf{v}$ *az* $\mathbb{R}^n$ *tér két tetszőleges vektora.*

a) Az $\mathbf{u}$ *vektor hosszán önmagával vett skaláris szorzatának gyökét értjük:*

$$|\mathbf{u}| := \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}. \tag{1.4}$$

b) Az $\mathbf{u}$ *és* $\mathbf{v}$ *vektorok* (hajlás)szögének *koszinusza az alábbi tört:*

$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\angle := \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \tag{1.5}$$

c) Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{u}$ *és* $\mathbf{v}$ *vektorok* merőlegesek *egymásra, ha*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{1.6}$$

d) A két vektor végpontjának távolságán, amit egyszerűen a két vektor távolságának *nevezünk, a különbségük abszolút értékét értjük:*

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := |\mathbf{u} - \mathbf{v}| \tag{1.7}$$

► A fenti definíciók koordinátás alakja

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2},$$
$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\angle = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}}.$$

► A vektorok hajlásszögének definíciójáról még igazolnunk kell, hogy értelmes, ugyanis egy szög koszinusza csak a $[-1, 1]$ intervallumba eshet. Azaz be kell látnunk, hogy az (1.5) képletben $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$. Ez épp a CBS-egyenlőtlenség. Hamarosan igazoljuk!

1.49. PÉLDA (VEKTOROK SZÖGE ÉS TÁVOLSÁGA). *Az* $\mathbf{u} = (2, 3, 4, 14)$ *vektornak mennyi az abszolút értéke, mennyi a* $\mathbf{v} = (4, 6, -10, 10)$ *vektortól való távolsága, és mennyi a* $\mathbf{w} = (0, 3, 6, -2)$ *vektorral bezárt szögének koszinusza?*

MEGOLDÁS. Az (1.4), az (1.7) és az (1.5) képleteket használjuk:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{u}| &= \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2 + 14^2} = \sqrt{225} = 15, \\
d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sqrt{(2-4)^2 + (3-6)^2 + (4-(-10))^2 + (14-10)^2} \\
&= \sqrt{2^2 + 3^2 + 14^2 + 4^2} = 15 \\
\cos(\mathbf{u}, \mathbf{w})_\angle &= \frac{2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 14 \cdot (-2)}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2 + 14^2}\sqrt{0^2 + 3^2 + 6^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{21}. \quad \square
\end{aligned}$$

Az egységvektor $\mathbb{R}^n$-ben is a korábbihoz hasonlóan definiálható, és világos, hogy ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ egységvektor, hisz

$$\left|\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right| = \frac{1}{|\mathbf{a}|}|\mathbf{a}| = 1.$$

Az egységvektorral szorzás szerepe is azonos:

1.50. ÁLLÍTÁS (VEKTORRAL PÁRHUZAMOS ÉS MERŐLEGES ÖSSZETEVŐ). *Ha $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges és $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ egységvektor, akkor $\mathbf{b}$ felbomlik egy $\mathbf{e}$-vel párhuzamos és egy rá merőleges vektor összegére:*

$$\mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})\,\mathbf{e} + (\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e})\,.$$

BIZONYÍTÁS. $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}$ párhuzamos $\mathbf{e}$-vel, így csak azt kell megmutatni, hogy a két vektor merőleges.

$$(\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}) \cdot (\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})(\mathbf{e} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})^2(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) = 0. \qquad \square$$

Ennek alapján változatlan mondható, hogy $\operatorname{proj}_{\mathbf{e}} \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})\,\mathbf{e}$ a $\mathbf{b}$ vektor $\mathbf{e}$ egyenesére eső merőleges vetülete, és így tetszőleges $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektor esetén $\operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}$. (Ld. 1.23. tétel).

1.51. TÉTEL (CAUCHY–BUNYAKOVSZKIJ–SCHWARZ-EGYENLŐTLENSÉG). *Tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra*

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|. \tag{1.8}$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ lineárisan összefüggők, azaz ha egyik vektor a másik skalárszorosa.

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel először, hogy $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Ekkor a tétel állításának mindkét része nyilván igaz, hisz egyenlőség áll fenn, és a két vektor lineárisan összefüggő. Ha $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, akkor legyen $\mathbf{e} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ a $\mathbf{v}$ irányú egységvektor. Az $\mathbf{u}$ vektor $\mathbf{e}$ egyenesére merőleges összetevőjének hossza, illetve annak négyzete nyilván nem negatív, azaz

$$\begin{aligned}
0 &\leq |\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}|^2 && |\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \text{ alkalmazása} \\
&= (\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}) \cdot (\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}) && \text{disztributivitás alkalmazása} \\
&= |\mathbf{u}|^2 - 2\,|\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}|^2 + |\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}|^2 && \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \text{ alkalmazása} \\
&= |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}|^2 \\
&= |\mathbf{u}|^2 - \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|^2}{|\mathbf{v}|^2} && \mathbf{e} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}| \text{ visszahelyettesítése.}
\end{aligned}$$

Innen átrendezéssel azonnal megkapjuk a bizonyítandó állítást. Másrészt az is világos, hogy $0 = |\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}|$ csak akkor állhat fönn, ha $\mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}$, azaz ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{e}$ párhuzamosak, azaz ha $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ skalárszorosa, vagyis ha a két vektor lineárisan összefüggő. $\square$

1.52. TÉTEL (HÁROMSZÖG-EGYENLŐTLENSÉG $\mathbb{R}^n$-BEN). *Tetszőleges* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *vektorokra*

$$|\mathbf{u}+\mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|.$$

A bizonyítás megegyezik a 3-dimenziós változatra, azaz az 1.21. tételre adott bizonyítással.

A vektor abszolút értékét a skaláris szorzat segítségével definiáltuk, de fordítva, a skaláris szorzat is kifejezhető a vektor abszolút értékével. E formulákat *polarizációs formuláknak* nevezzük.

1.53. TÉTEL (POLARIZÁCIÓS FORMULÁK $\mathbb{R}^n$-BEN). *Tetszőleges* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *vektorokra*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4}\left(|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2\right) \tag{1.9}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2\right) \tag{1.10}$$

BIZONYÍTÁS. A bizonyításban az abszolút érték (1.4)-beli definícióját használjuk:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\left(|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2\right) &= \frac{1}{4}\left((\mathbf{u}+\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u}+\mathbf{v}) - (\mathbf{u}-\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u}-\mathbf{v})\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\right) \\
&= \frac{1}{4}(4\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}.
\end{aligned}$$

A másik formula hasonlóan bizonyítható. □

Végül egy fontos összefüggés az ortogonális vektorrendszerekről:

1.54. ÁLLÍTÁS (ORTOGONÁLIS VEKTORRENDSZER LINEÁRIS FÜGGETLENSÉGE). *Tegyük fel, hogy a zérusvektortól különböző* $\mathbb{R}^n$*-beli* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ *vektorok páronként ortogonálisak, azaz bármely* $i \neq j$ *esetén* $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$. *Ekkor e vektorok lineárisan függetlenek.*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy valamely $c_1, c_2, \ldots, c_k$ konstansokra

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Szorozzuk be az egyenlőség mindkét oldalát skalárisan a $\mathbf{v}_i$ vektorral. Mivel $i \neq j$ esetén $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$, ezért azt kapjuk, hogy

$$c_i\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = 0,$$

amiből $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \neq 0$ miatt következik, hogy $c_i = 0$. Mivel ez minden $i = 1, 2, \ldots, k$ indexre igaz, ezért a vektorok valóban lineárisan függetlenek. □

Feladatok

Ellenőrző kérdések

1.55.• Koordinátás alak a 3-dimenziós térben: igaz – hamis Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül? Válaszunkat indokoljuk.

a) A tér vektorainak koordinátázásához elég egy bázis megadása.
b) A tér pontjainak koordinátázásához elég egy bázis megadása.
c) Két koordinátás alakjával megadott vektor összegét a bázistól függetlenül ugyanazzal a képlettel számoljuk.
d) Két koordinátás alakjával megadott vektor skaláris szorzatát a bázistól függetlenül ugyanazzal a képlettel számoljuk.

1.56.• Legyenek $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

a) Mit állíthatunk a vektorokról, ha $|\mathbf{u}| = 3$, $|\mathbf{v}| = 2$ és $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 7$?
b) Mennyi $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, ha $|\mathbf{u}| = 5$, $|\mathbf{v}| = 3$ és $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = 4$?
c) Mennyi $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, ha $|\mathbf{u}| = 2$, $|\mathbf{v}| = 3$ és $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = 6$?
d) Mennyi $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, ha $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = 3$ és $|\mathbf{u} - \mathbf{v}| = 5$?
e) Mennyi $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ értéke, ha $|\mathbf{u}| = 8$, $|\mathbf{v}| = 15$, és $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$?

Műveletek $\mathbb{R}^n$-ben

1.57. Számítsuk ki az alábbi vektorok skaláris és vektori szorzatát!

a) $\mathbf{a} = (1, 2, -1)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 1)$
b) $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{b} = (0, 2, 1)$
c) $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (3, 2, 1)$

1.58.• Határozzuk meg az alábbi vektorok összegét, skalárszorzatát, és hajlásszögét!

a) $\mathbf{u} = (1, -3)$, $\mathbf{v} = (-6, -2)$
b) $\mathbf{a} = (1, 2, -1)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 1)$
c) $\mathbf{u} = (1, 1, 2, 2)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 2, 0)$
d) $\mathbf{x} = (1, 1, 2, 2)$, $\mathbf{y} = (0, -1, -2, 0)$
e) $\mathbf{u} = (1, 0, 1, 0, \dots)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 1, -1, \dots) \in \mathbb{R}^n$, n páros

1.59.▪ Határozzuk meg az alábbi vektorok hajlásszögének numerikus közelítő értékét radiánban és fokban!

a) $\mathbf{a} = (1, 2, 3, 4, 5)$, $\mathbf{b} = (-1, -1, -1, -1, -1)$
b) $\mathbf{x} = (1, 2, 3, 2.592116)$, $\mathbf{y} = (2, 2, -2, -2.602112)$

1.60. Jellemezzük az ABC háromszöget szögei szerint (pl. derékszögű, tompaszögű…)!

a) $A(1, 1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2, 2)$, $C(2, 0, 2, 2)$
b) $A(1, 1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2, 2)$, $C(2, 0, 2, 2)$
c) $A(2, 0, 1, 1)$, $B(2, 2, 1, 1)$, $C(3, 3, 2, 2)$

1.61. Határozzuk meg az n-dimenziós kocka testátlójának és egy oldalélének szögét! Mekkora ez a szög $n = 2$ és $n = 4$ esetén?

1.62. Bontsuk fel a $\mathbf{b}$ vektort $\mathbf{a}$-val párhuzamos és rá merőleges összetevőkre. Határozzuk meg a $\mathbf{b}$ vektor $\mathbf{a}$ egyenesére eső merőleges vetületének hosszát!

a) $\mathbf{a} = (1, 2, -2)$, $\mathbf{b} = (4, 6, -1)$,
b) $\mathbf{a} = (2, 3, 6)$, $\mathbf{b} = (5, -3, 8)$,
c) $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 4, 0, 3)$,
d) $\mathbf{a} = (1, 2, 2, 4)$, $\mathbf{b} = (4, 3, 6, 7)$.

Bizonyítások

1.63. Bizonyítsuk be a skaláris szorzás 1.47. tételbeli tulajdonságait!

1.64. Skaláris szorzás további tulajdonságai Igazoljuk, hogy tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra és $c \in \mathbb{R}$ számra

a) $c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$,
b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$,
c) $(\mathbf{u} \pm \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} \pm \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \pm 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$,
d) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$.

1.65. Vektor abszolút értéke (normája) Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra és $c \in \mathbb{R}$ számra

a) $|\mathbf{u}| = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}$,
b) $|c\mathbf{u}| = |c||\mathbf{u}|$,
c) $\big||\mathbf{u}| - |\mathbf{v}|\big| \le |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$,

1.66. Háromszög-egyenlőtlenség általánosítása Igazoljuk, hogy tetszőleges $k > 2$ egészre és tetszőleges $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorokra

$$|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \ldots + \mathbf{u}_k|^2 \le |\mathbf{u}_1|^2 + |\mathbf{u}_2|^2 + \ldots + |\mathbf{u}_k|^2.$$

1.67. Pithagorász-tétel Az $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra pontosan akkor teljesül az

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$$

összefüggés, ha $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőlegesek egymásra.

1.68. Paralelogramma-tétel Igazoljuk, hogy bármely paralelogramma oldalainak négyzetösszege megegyezik átlóinak négyzetösszegével. Az állítás vektorokat használó ekvivalens alakja: igazoljuk, hogy tetszőleges $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2).$$

1.69.• Távolságokra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség Igazoljuk, hogy tetszőleges $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + d(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \ge d(\mathbf{a}, \mathbf{c}).$$

1.70.• Igazoljuk, hogy

a) tetszőleges $u, v, x, y \in \mathbb{R}$ számokra

$$(ux + vy)^2 \le (u^2 + v^2)(x^2 + y^2).$$

b) tetszőleges $x_1, x_2 \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ számokra

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right).$$

Projekt: ekvivalencia reláció

Egy X halmazon értelmezett *(bináris) reláción* az X elempárjainak egy R halmazát értjük. Ha egy (a, b) pár benne van ebben a halmazban, azt mondjuk, hogy a az R relációban van b-vel, és úgy jelöljük, hogy $a\ R\ b$. Például, ha X az összes valaha élt ember halmaza, akkor az összes olyan (a, b) emberpár halmaza, ahol a anyja b-nek, egy reláció (anya-gyermek reláció). Ha X a valósok halmaza, és R azokból az (a, b) párokból áll, melyekre a kisebb vagy egyenlő mint b, akkor R egy reláció, melyet a valósok rendezési relációjának nevezünk. E reláció szokásos jele $\leq$, így ha $(a, b) \in R$, akkor az $a\ R\ b$ helyett az $a \leq b$ jelölést használjuk.

Egy halmaz diszjunkt részhalmazok uniójára való fölbontását a halmaz elemei *osztályozásának* vagy *particionálásának* nevezzük. Egy ilyen osztályozáshoz természetes módon hozzárendelhető egy reláció, melyet a halmazon értelmezett *ekvivalenciarelációnak* nevezünk. E szerint két elem pontosan akkor van relációban (pontosan akkor ekvivalensek), ha azonos osztályba tartoznak. Kérdés, egy relációról hogyan állapítható meg, hogy ekvivalenciareláció-e?

1.55. TÉTEL (EKVIVALENCIARELÁCIÓ). *Legyen R egy tetszőleges reláció az X halmazon. R pontosan akkor* ekvivalenciareláció, *ha tetszőleges $a, b, c \in X$ elemre fennáll az alábbi három tulajdonság:*

a) R reflexív, *azaz $a\ R\ a$, vagyis minden elem relációban van önmagával,*

b) R szimmetrikus, *azaz ha $a\ R\ b$, akkor $b\ R\ a$,*

c) R tranzitív, *azaz ha $a\ R\ b$ és $b\ R\ c$, akkor $a\ R\ c$.*

1.71. Legyen R a fenti tétel szerinti reláció, és jelölje R_a az a-val relációban lévő elemek halmazát. Mutassuk meg, hogy bármely két $a, b \in X$ elemre R_a és R_b vagy azonos, vagy diszjunkt. Ezzel bizonyítsuk az előző tételt!

1.72. SZABAD VEKTOR FOGALMA Mutassuk meg, hogy a 3-dimenziós tér szabad vektorai definiálhatók egy – az irányított szakaszok halmazán értelmezett – ekvivalenciareláció ekvivalenciaosztályaival. Mi ez a reláció?

1.73. VEKTOR IRÁNYA Milyen halmazon értelmezett ekvivalenciareláció segítségével definiálható a vektor irányának és állásának fogalma?

Megoldások

1.1. *a)* Igaz. *b)* Hamis, például ha $O = A$, akkor $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$, míg ha $O = B$, akkor $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$. *c)* Igaz, az eredmény O választásától függetlenül $\overrightarrow{BA}$. *d)* Igaz. *e)* Hamis, lehetnek ellenkező irányúak is. *f)* Igaz.

1.2. *a)* Hamis. Lehet, hogy a három közül két vektor egy egyenesbe esik, és a harmadik független tőlük: ez a harmadik nem állítható elő a másik kettő lineáris kombinációjaként. *b)* Igaz, például $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ és $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ilyenek. De bármely három egy síkba eső nemzérus-vektor ilyen, ha közülük bármely kettő lineárisan független. *c)* Igaz, például ha $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ és $\mathbf{a}$ független $\mathbf{b}$-től. *d)* Igaz. Ha a térben három vektor lineárisan független, akkor a tér minden vektora kifejezhető lineáris kombinációjukként, ezért a negyedik vektor már nem lehet tőlük független. *e)* Igen, két független vektor és három zérusvektor kielégíti e feltételt.

1.3. Az első esetben: *a)* egy egyenesbe esnek, mert az együtthatók összege 1, *b)* P az A ponthoz esik közelebb, mert $\overrightarrow{OA}$ együtthatója nagyobb, és *c)* P a szakaszon kívül van, mert nem pozitív mindkét együttható.

A második esetben *a)* A, B és P egy egyenesbe esnek, mert az együtthatók összege 1, *b)* P az A ponthoz esik közelebb, mert $\overrightarrow{OA}$ együtthatója nagyobb, és *c)* P a szakaszra esik, mert mindkét együttható pozitív.

1.4. *a)* igen, *b)* nem.

1.5. Igen

1.6. „Ha az irányított szakasz a hal, akkor a vektor a halraj.”

1.13. $\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_3P_4} + \ldots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n} = \overrightarrow{P_1P_n}$, $\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_3P_4} + \ldots + \overrightarrow{P_{n-1}P_n} + \overrightarrow{P_nP_1} = \mathbf{0}$.

1.16. A C-ből induló súlyvonal $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, az A-ból induló súlyvonal $\frac{1}{2}\mathbf{b} - \mathbf{a}$, az B-ből induló $\frac{1}{2}\mathbf{a} - \mathbf{b}$. E három vektor összege $\mathbf{0}$, így lehetnek egy háromszög oldalvektorai.

1.17. Egyik lehetőség a megoldásra, hogy megmutatjuk, az $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}, \ldots, \overrightarrow{OP_n}$ vektorokból egy szabályos n-szög szerkeszthető, így összegük $\mathbf{0}$. Egy elegánsabb és egyszerűbb bizonyítást kapunk, ha meggondoljuk, mi történik az összeggel, ha a vektorokat $2\pi/n$ szöggel elforgatjuk. Mivel az elforgatás az $\overrightarrow{OP_k}$ vektorokat önmagukba forgatják, az összeg nem változik, ugyanakkor elfordul. E feltételt csak a nullvektor elégíti ki.

1.18. Jelölje az $ABCD$ négyszög AB oldalának felezőpontját B_1, BC oldaláét B_2, CD oldaláét D_2, DA oldaláét D_1. Így

$$\overrightarrow{AB_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}) \qquad \overrightarrow{AD_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD})$$
$$\overrightarrow{AB_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \qquad \overrightarrow{AD_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC})$$

Innen

$$\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{AB_2} - \overrightarrow{AB_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$
$$\overrightarrow{D_1D_2} = \overrightarrow{AD_2} - \overrightarrow{AD_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

tehát $\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{D_1D_2}$. Ez épp azt jelenti, hogy a B_1B_2 és D_1D_2 szakaszok párhuzamosak és egyenlő hosszúak.

1.19. A felezőpontokra $\overrightarrow{OF_k} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP_k} + \overrightarrow{OP_{k+1}})$, ha $k = 1, 2, \ldots, n-1$ és $\overrightarrow{OF_n} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP_n} + \overrightarrow{OP_1})$. Ezeket az egyenleteket váltakozva $+1$-gyel és -1-gyel megszorozva és összeadva n páratlan volta miatt kapjuk, hogy $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OF_1} - \overrightarrow{OF_2} + \ldots + \overrightarrow{OF_n}$.

1.20. Ha $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ lineárisan összefüggők, akkor az 1.7. állítás szerint valamely k számra $\mathbf{v} = k\mathbf{w}$ (itt kihasználtuk, hogy a feltételek szerint $\mathbf{w}$ nem lehet $\mathbf{0}$). Eszerint $c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b} + c_3\mathbf{c} = kd_1\mathbf{a} + kd_2\mathbf{b} + kd_3\mathbf{c}$. Így az 1.12. tétel alapján kapjuk, hogy $c_1 = kd_1$, $c_2 = kd_2$, $c_3 = kd_3$, azaz $\frac{c_1}{d_1} = \frac{c_2}{d_2} = \frac{c_3}{d_3}$.

Fordítva, ha $\frac{c_1}{d_1} = \frac{c_2}{d_2} = \frac{c_3}{d_3} (= k)$, akkor a $c_1 = kd_1$, $c_2 = kd_2$, $c_3 = kd_3$ behelyettesítésével $\mathbf{v} = c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b} + c_3\mathbf{c} = kd_1\mathbf{a} + kd_2\mathbf{b} + kd_3\mathbf{c} = k(d_1\mathbf{a} + d_2\mathbf{b} + d_3\mathbf{c}) = k\mathbf{w}$. Tehát $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ lineárisan összefüggők (kollineárisak).

1.21. 1. $c = 4$, 2. c tetszőleges, 3. nincs ilyen c, 4. $c = \frac{2}{3}$, $d = 2$ 5. bármely $c = d$ megfelel, 6. c tetszőleges, $d = 2$.

1.22. Az $\mathbf{r}$, $\mathbf{s}$, $\mathbf{t}$ vektorok lineárisan *a)* összefüggők (a $\mathbf{0}$ köztük van), *b)* függetlenek, *c)* összefüggők ($\mathbf{t} = \mathbf{r} + \mathbf{s}$), *d)* összefüggők ($2\mathbf{r} + 3\mathbf{s} - 5\mathbf{t} = \mathbf{0}$).

1.23. Megfelelő konstansokkal $\overrightarrow{AM} = c_1\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BM} = c_2\overrightarrow{BF}$. Ekkor $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{AE} = \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{d}$ és $\overrightarrow{BF} = \mathbf{d} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$, ahonnan $\left(c_1 + \frac{c_2}{2} - 1\right)\mathbf{b} + \left(\frac{c_1}{2} - c_2\right)\mathbf{d} = \mathbf{0}$ adódik. Mivel $\mathbf{b}$ és $\mathbf{d}$ lineárisan függetlenek, ezért $c_1 + \frac{c_2}{2} - 1 = 0$ és $\frac{c_1}{2} - c_2 = 0$, ahonnan $c_1 = \frac{4}{5}$, $c_2 = \frac{2}{5}$. Visszahelyettesítve $\overrightarrow{AM} = \frac{4}{5}\mathbf{b} + \frac{2}{5}\mathbf{d}$.

1.24. Ha $|\overline{AP}| : |\overline{PB}| = m : n$, akkor $|\overline{AB}| : |\overline{PB}| = (m+n) : n$, amiből $\overrightarrow{BP} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{BA}$. De $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP}$ és $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$, így $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \frac{n}{m+n}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})$, amiből azonnal következik a bizonyítandó formula. A felezőpontot az $m = n = 1$ esetben kapjuk, és ekkor valóban $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

1.25. Az 1.16. feladat megoldását és jelöléseit használva ($\mathbf{a} = \overrightarrow{CA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{CB}$) a C pontból induló súlyvonal C-től távolabbi harmadolópontjába mutató vektor $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$. A C-ből induló és az A ponthoz tartozó súlyvonal harmadoló pontjába mutató vektor az 1.24. feladat szerint $\frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}\mathbf{b}) = \frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$. Hasonló eredményt kapunk a B-ből induló súlyvonalra is. Ez bizonyítja a feladat első állítását.

Legyen O egy tetszőleges pont, és S az ABC háromszög súlypontja. Az előzőek szerint $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$. Mivel $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, ezért $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

1.26. Jelölje az $ABCD$ tetraéder ABC lapjának súlypontját S_D, és legyen O a tér tetszőleges pontja. Az előző feladat szerint $\overrightarrow{OS_D} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$. Jelölje S a DS_D szakasz S_D ponthoz közelebbi negyedelő pontját. Ekkor az 1.24. feladatot az $m = 3$, $n = 1$ értékekkel alkalmazva kapjuk, hogy $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OD} + 3\overrightarrow{OS_D}\right)$. Innen $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$ következik. A képlet szimmetrikus volta bizonyítja, hogy bármely másik oldal súlypontjából indulva ugyanerre az eredményre jutottunk volna, azaz S pont mind a négy súlyvonalon rajta van, és negyedeli azokat.

1.28. Ha D az AB szakaszt $x : y$ arányban osztja, és m a magasság hossza, akkor $\frac{y}{m} = \frac{m}{x} = \frac{a}{b}$. Innen $\frac{x}{y} = \frac{b^2}{a^2}$. Ebből az 1.24. alapján

$$\overrightarrow{CD} = \frac{a^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{CB} + \frac{b^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{CB}.$$

1.29. *a)* igaz, *b)* hamis, az egységvektor egyenesére eső merőleges vetületének előjeles hosszával egyenlő, *c)* igaz, *d)* hamis (asszociativitásról nem is lehet szó, mert a két szorzás művelet egyike skaláris szorzás, a másika skalárral való szorzás az $\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$ szorzatban), *e)* igaz, *f)* igaz, *g)* hamis, lásd még az 1.38. feladatot,

1.30. *a)* hamis, nem kommutatív (de asszociatív), *b)* hamis, hisz $(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{0}$ akkor is fönnáll, ha $\mathbf{a}-\mathbf{b} \parallel \mathbf{c}$, nem csak akkor, ha $\mathbf{a}-\mathbf{b} = \mathbf{0}$. *c)* igaz, *d)* igaz, *e)* hamis, *f)* igaz, *g)* igaz.

1.31. $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

1.32. $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma = \sqrt{2} \cdot 2 \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}} = -2$.

1.33. $1 \cdot 2 \cdot (-1) = -2$.

1.34. 0, hisz merőlegesek ($|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma = \sqrt{2} \cdot 2 \cdot 0 = 0$).

1.35. Legyenek $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ független vektorok, $\mathbf{b}$ pedig tetszőleges. Ekkor az $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$ szorzat párhuzamos a $\mathbf{c}$ vektorral, míg az $\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$ szorzat az $\mathbf{a}$ vektorral, tehát $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} \neq \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$.

1.36. *a)* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2$ *b)* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$

1.37. A Pithagorász-tétel következményeként $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ merőlegesek.

1.38. Ha $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ és $c = 0$, akkor az X pontok kiadják a tér összes pontját, ha viszont $c \neq 0$, akkor egyetlen ilyen X pont sincs. Mivel $\mathbf{e} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ egységvektor, ezért

$$\left(c\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right) \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \left(c\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}\right) \cdot \mathbf{a} = c,$$

ezért ha Y jelöli azt a pontot, melyre

$$\overrightarrow{OY} = c\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2},$$

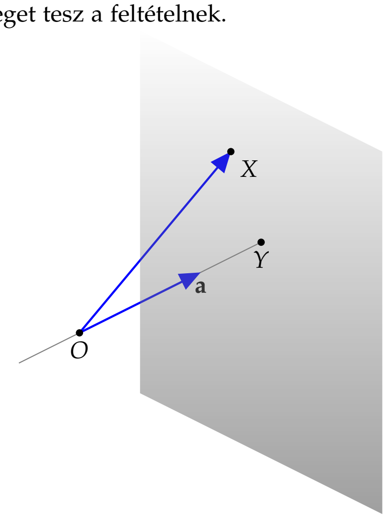
akkor $\overrightarrow{OY} \cdot \mathbf{a} = c$. Az összes olyan X pont, melyre $\overrightarrow{OX} \cdot \mathbf{a} = c$, az Y ponton átmenő és az $\mathbf{a}$ vektorra merőleges sík pontjaiból áll. Egyrészt ha X eleget tesz a feltételnek, akkor

$$\overrightarrow{XY} \cdot \mathbf{a} = \left(\overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OX}\right) \cdot \mathbf{a} = \overrightarrow{OY} \cdot \mathbf{a} - \overrightarrow{OX} \cdot \mathbf{a} = 0,$$

tehát X e sík egy pontja. Másrészt, ha X e sík egy pontja, akkor $\overrightarrow{XY} \cdot \mathbf{a} = 0$, így

$$\overrightarrow{OX} \cdot \mathbf{a} = \overrightarrow{OX} \cdot \mathbf{a} + \overrightarrow{XY} \cdot \mathbf{a} = \left(\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XY}\right) \cdot \mathbf{a} = \overrightarrow{OY} \cdot \mathbf{a} = c,$$

tehát X eleget tesz a feltételnek.



1.39. Geometriai megoldás: a három egységvektor egy szabályos háromszög három oldalvektora azonos körüljárás szerint irányítva, mivel összegük $\mathbf{0}$. Így hajlásszögük $2\pi/3 = 120°$, tehát a vektorpárok skaláris szorzata $-\frac{1}{2}$, így az összeg $-\frac{3}{2}$.

Algebrai megoldás: $(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \cdot (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = 0$, tehát $0 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 + 2(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3)$. Kihasználva, hogy a vektorok egységvektorok, kapjuk hogy $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = -\frac{3}{2}$.

1.40. Az 1.12. tétel szerint a $\mathbf{v}$ vektor megfelelő konstans együtthatókkal előállítható $\mathbf{v} = c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b} + c_3\mathbf{c}$ alakban. Az egyenlőség mindkét oldalát (skalárisan) megszorozva $\mathbf{v}$-vel, majd kihasználva a feltételekből következő $\mathbf{a}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{c}\cdot\mathbf{v} = 0$ egyenlőségeket, $\mathbf{v}^2 = 0$ adódik, ami csak úgy teljesülhet, hogy $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

1.41. Az $\mathbf{a}$ vektor hossza $\sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$, a $\mathbf{b}$ vektor hossza $\sqrt{4^2+3^2} = 5$, az $\mathbf{a}$ vektornak a vízszintes rácsvonalakkal bezárt szöge $\pi/4$, a $\mathbf{b}$ vektornál e szög szögfüggvényei $\cos\gamma = \frac{4}{5}$, $\sin\gamma = \frac{3}{5}$. Így

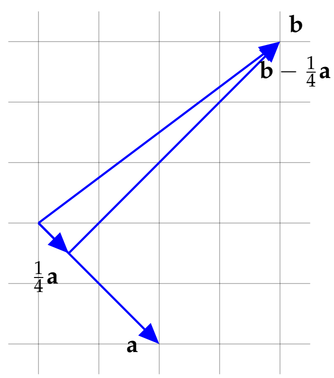
$$\cos(\gamma + \frac{\pi}{4}) = \cos\gamma\cos\frac{\pi}{4} - \sin\gamma\sin\frac{\pi}{4} = \frac{4}{5}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{5}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{5}\frac{\sqrt{2}}{2},$$

tehát a skaláris szorzat $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 2\sqrt{2}\cdot 5\cdot\frac{1}{5}\frac{\sqrt{2}}{2} = 2$.

1.42. Mivel $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 2$, $|\mathbf{a}| = 2\sqrt{2}$, ezért

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a} = \frac{2}{8}\mathbf{a} = \frac{1}{4}\mathbf{a},$$

míg az $\mathbf{a}$-ra merőleges összetevő $\mathbf{b} - \frac{1}{4}\mathbf{a}$. Ezt mutatja az alábbi ábra.



1.43. Nem, legyen pl. $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két egymásra merőleges egységvektor, és $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

1.44.

a) $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\gamma = 1\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 1$.

b) $\mathbf{0}$, hisz párhuzamosak ($\sin\gamma = 0$, így abszolút értéke 0).

1.45.

a) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{a}\times\mathbf{a} - \mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{b}\times\mathbf{a} - \mathbf{b}\times\mathbf{b} = -\mathbf{a}\times\mathbf{b} - \mathbf{a}\times\mathbf{b} = -2\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

b) $(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\times(\mathbf{i}+\mathbf{j}) = \mathbf{i}\times\mathbf{i} + \mathbf{i}\times\mathbf{j} + \mathbf{j}\times\mathbf{i} + \mathbf{j}\times\mathbf{j} + \mathbf{k}\times\mathbf{i} + \mathbf{k}\times\mathbf{j} = \mathbf{0} + \mathbf{i}\times\mathbf{j} - \mathbf{i}\times\mathbf{j} + \mathbf{0} + \mathbf{j} - \mathbf{i} = \mathbf{j} - \mathbf{i}$.

1.46. Jelölje P szomszédait Q, R és S.

a) Ekkor két lapátló-vektor például a $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}$ és a $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS}$ vektorok. Ezek szorzata:

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS}\right) &= \\ \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PS} &= \\ \overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PR} &= 1.\end{aligned}$$

Kihasználtuk, hogy merőleges vektorok skaláris szorzata 0.

b) Hasonlóan kapható meg egy lapátló-vektor és a testátló-vektor $(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS})$ szorzata:

$$\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS}\right) = \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PR} = 2.$$

c) A Q, R és S csúcsok olyan sorrendben legyenek megválasztva, hogy $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ és $\overrightarrow{PS}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkosson. Ki fogjuk használni, hogy ekkor $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PS}$. Egy élvektor és egy szomszédos lapátló-vektor vektori szorzata:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}\times\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}\right) &= \\ \overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR} &= \\ \mathbf{0} + \overrightarrow{PS} &= \overrightarrow{PS},\end{aligned}$$

vagyis a szorzat a két vektor lapjára merőleges élvektor.

d) Legyen a lapvektor a $\overrightarrow{PR}$, a nem szomszédos lapátló-vektor $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS}$. Ezek szorzata:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ}\times\left(\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS}\right) &= \\ \overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PS} &= \overrightarrow{PS} - \overrightarrow{PR},\end{aligned}$$

ami a lapátló-vektor síkjának másik lapátló-vektora.

1.47. Ha $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$ és $\mathbf{u}\perp\mathbf{w}$, akkor $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ és $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w} = 0$, így bármely $c, d \in \mathbb{R}$ számokra $\mathbf{u}\cdot(c\mathbf{v} + d\mathbf{w}) = \mathbf{u}\cdot(c\mathbf{v}) + \mathbf{u}\cdot(d\mathbf{w}) = c\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + d\mathbf{u}\cdot\mathbf{w} = c0 + d0 = 0$, tehát $\mathbf{u}$ merőleges a $c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$ lineáris kombinációra.

1.48. Három különböző dolog (így három vektor is) hatféleképp rakható sorba. Ha az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok jobbrendszert alkotnak, akkor ugyancsak jobbrendszert alkotnak a $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{a}$ és a $\mathbf{c}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorhármasok is. A további három esetben, azaz a $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$, valamint a $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$ és az $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}$ hármasok esetén balrendszert kapunk a vegyes szorzatról tanultak szerint.

1.50. Egyik lehetőség a megoldásra: $\big||\mathbf{b}|\mathbf{a}\big| = \big||\mathbf{a}|\mathbf{b}\big| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$, ezért a paralelogramma-módszert egy rombuszra kell alkalmazni. Egy másik lehetőség: az $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ és $\mathbf{b}/|\mathbf{b}|$ két egységvektor, így összegük szögfelező, mivel a paralelogramma-módszer rombuszt ad. E vektor $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$-szerese ugyanúgy szögfelező, és épp ez a feladatbeli vektor. A második kérdés megválaszolásához használjuk az 1.24. példa eredményét!

1.51. Milyen irányokat cserél föl a tükör, és milyeneket nem? Nem cseréli föl a tükör síkjával párhuzamos irányokat: minden, a tükör síkjával párhuzamos vektor tükörképe önmaga. Tehát, ha a tükör előtt állunk, és a tükör is függőleges, akkor a „fölfelé” irány a tükörképen sem változik. Viszont a tükör fölcseréli a tükörre merőleges irányokat. Mielőtt megnézzük, hogy hogy cserélődik fel a jobb és a bal, definiálnunk kell mi az, hogy jobb és bal? Egy lehetőség a definiálásra: ha értelmezve van egy viszonyítási rendszerben (pl. az emberi testhez képest, vagy a mozgó járműben,...) a *föl* és az *előre*, melyek egymásra merőleges irányok, akkor a *jobb* irány az *előre* × *föl* vektori szorzattal definiálható. Ennek képe a tükörben viszont $(-\textit{előre}) \times \textit{föl} = -\textit{jobb}$, ami épp a *bal*. (A feladatban föltett kérdés egyébként nem pontos, hisz egy vízszintesen a földre helyezett tükör megfordítja a lentet és föntet.)

1.52. Bontsuk fel $\mathbf{a}$-t az $\mathbf{e}$-vel párhuzamos $\mathbf{p}$ és rá merőleges $\mathbf{m}$ összetevőkre. $|\mathbf{e} \times \mathbf{a}| = |\mathbf{a}| \sin(\mathbf{e}, \mathbf{a})\angle$, ami megegyezik $|\mathbf{m}|$-mel. $\mathbf{e} \times \mathbf{a}$ merőleges $\mathbf{e}$ és $\mathbf{a}$ síkjára, ezért $(\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{e}$ az $\mathbf{e}$ és $\mathbf{a}$ síkjában van és $|(\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{e}| = |\mathbf{a}| \sin(\mathbf{e}, \mathbf{a})\angle$, így $(\mathbf{e} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{e} = \mathbf{m}$.

1.53. Az $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}0$ egyenlőséget $\mathbf{a}$-val vektoriálisan szorozva, átrendezés után kapjuk, hogy

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{0},$$

amiből $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$. $\mathbf{b}$-vel való szorzás után kapjuk a $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ egyenlőséget.

Az állítás megfordítása nem igaz, mivel bármely három kollineáris vektor esetén $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ akkor is, ha $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \neq \mathbf{0}0$.

1.54. *a)* V, és a körüljárás azonos. *b)* $4V$, és az $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ körüljárása az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ körüljárásával ellentétes!

1.55. *a)* igen, *b)* nem, az origó kijelölése is szükséges, *c)* igen, *d)* nem, a szokásos $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ csak ortonormált bázisban érvényes,

1.56. *a)* ilyen vektorok nincsenek (CBS-egyenlőtlenségnek ellent mond), *b)* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -9$ (ld. az 1.10 polarizációs formulát), *c)* ilyen vektorok a háromszög-egyenlőtlenség miatt nem léteznek, *d)* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -4$ (ld. az 1.9 polarizációs formulát), *e)* 17 (a 8, 15, 17 pithagorászi számhármasok)

1.57.
a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (3, -3, -3)$
b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-2, -1, 2)$
c) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 10$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-4, 8, -4)$

1.58. *a)* $\pi/2$, *b)* $\pi/3$, *c)* $\pi/4$, *d)* $3\pi/4$, *e)* $\pi/4$,

1.59. *a)* 2.701, 154.76°, *b)* 1.91986226152, 110.0°

1.60. *a)* egyenlő oldalú, *b)* tompa szögű (B csúcsnál), *c)* derékszögű (C csúcsnál).

1.61. $\arccos(1/\sqrt{n})$. $n = 2$ esetén 45°, $n = 4$ esetén 60°.

1.62. Kihasználjuk, hogy $\operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}$ a párhuzamos és $\mathbf{b} - \operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b}$ az $\mathbf{a}$-ra merőleges összetevő:
a) $(4, 6, -1) = (2, 4, -4) + (2, 2, 3)$,
b) $(5, -3, 8) = (2, 3, 6) + (3, -6, 2)$,
c) $(1, 4, 0, 3) = (2, 2, 2, 2) + (-1, 2, -2, 1)$,
d) $(4, 3, 6, 7) = (2, 4, 4, 8) + (2, -1, 2, -1)$.

1.66. Teljes indukcióval a háromszög-egyenlőtlenségből.

1.68. Az $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ alkalmazásával:

$$\begin{aligned}|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a}+\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a}+\mathbf{b}) + (\mathbf{a}-\mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a}-\mathbf{b}) \\ &= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}) + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}) \\ &= 2|\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{b}|^2.\end{aligned}$$

1.69. Használjuk az $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$ háromszög-egyenlőtlenséget az $\mathbf{u} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$ vektorokra.

1.70. Mindkét összefüggés a CBS-egyenlőtlenség mindkét oldalának négyzetreemelése után kapott egyenlőtlenséggel ekvivalens. A *b)* esetén $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \leq |\mathbf{x}|^2 |\mathbf{y}|^2$.

1.71. A feladat szerint $c \in R_a$ pontosan akkor teljesül, ha $a\ R\ c$. Tegyük fel, hogy R_a és R_b nem diszjunkt. Ha c egy közös elemük, akkor c az a-val és b-vel is relációban van, azaz $a\ R\ c$ és $b\ R\ c$, de a szimmetria miatt $c\ R\ b$, a tranzitivitás miatt pedig az $a\ R\ c$ és $c\ R\ b$ relációkból következik az $a\ R\ b$. Ekkor pedig a tranzitivitást használva bármely x elemere $b\ R\ x$-ből következik $a\ R\ x$, azaz $x \in \mathbb{R}_b$-ből következik $x \in R_a$, azaz $R_b \subseteq R_a$. Az a és b szerepét megfordítva kapjuk $R_a \subseteq R_b$, tehát $R_a = R_b$. Végül be kell még látnunk, hogy e halmazok uniója kiadja az egész X halmazt. Ez igaz, hisz minden a elemre $a\ R\ a$, azaz $a \in R_a$.

1.72. Tekintsünk egy $\vec{A}B$ és egy $\vec{C}D$ irányított szakaszt! Azt mondjuk, hogy ezek relációban vannak, ha van egy olyan eltolás, mely A-t C-be, B-t D-be viszi. E reláció ekvivalenciareláció (ellenőrizzük), így egy osztályozást definiál az irányított szakaszok halmazán. Egy ilyen osztályt nevezünk (szabad) vektornak.

1.73. A vektor iránya a félegyenesek, az állása az egyenesek halmazán – az előző feladathoz hasonlóan az eltolással – definiált ekvivalencia reláció egy ekvivalenciaosztálya.

2

Lineáris egyenletrendszerek és megoldásuk

E fejezet témái: a lineáris egyenletrendszerek geometriája, megoldásuk technikái és a megoldások halmazának szerkezete.

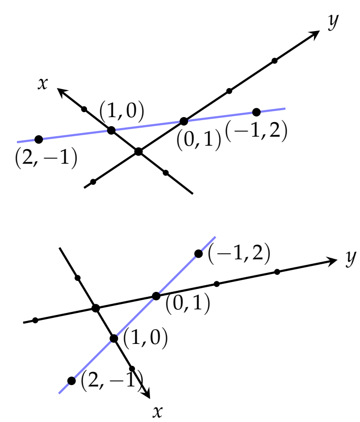
Egyenes és sík egyenletei

A 2- és 3-dimenziós tér lineáris alakzatainak áttekintése segítségünkre lesz a lineáris egyenletrendszerek megértésében.

Alakzatok implicit és explicit egyenletrendszerei

2.1. példa (Az $x + y = 1$ egyenlet). *Egy tetszőleges síkbeli koordináta-rendszerben az $x + y = 1$ egyenletet kielégítő (x, y) pontok milyen alakzatot adnak? Ábrázoljunk néhány pontot, és fogalmazzunk meg sejtést!*

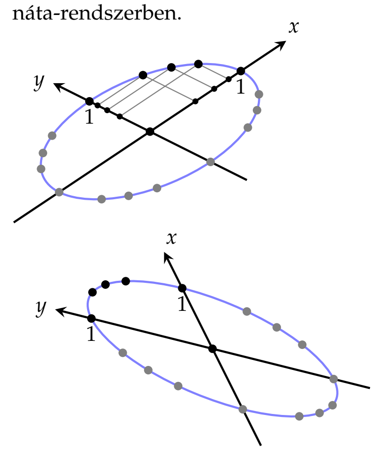
Megoldás. A 2.1 ábrán két különböző koordináta-rendszert ábrázolunk, és azokban a fenti egyenletet kielégítő pontok közül néhányat. Ennek alapján azt sejthetjük, hogy az $x + y = 1$ egyenletet kielégítő pontok egy egyenesen vannak. A sejtést hamarosan bizonyítjuk. □



2.1. ábra: Az $x + y = 1$ egyenletet kielégítő néhány pont két különböző koordináta-rendszerben.

2.2. példa (Az $x^2 + y^2 = 1$ egyenlet). *Egy tetszőleges síkbeli koordináta-rendszerben az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet kielégítő (x, y) pontok milyen alakzatot adnak? Ábrázoljunk néhány pontot, és fogalmazzunk meg sejtést!*

Megoldás. Az alábbi ábrán két koordináta rendszer ábrázoltunk, az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet kielégítő néhány ponttal. Később igazolni fogjuk, hogy az egyenletet kielégítő pontok egy ellipszisen vannak. □



2.2. ábra: Az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet kielégítő (x, y) pontok halmaza két koordináta-rendszerben.

Az előző két egyenlet mindegyikéből *kifejezhető* a két koordináta egy paraméter bevezetésével. Az $x + y = 1$, illetve az $x^2 + y^2 = 1$ egyenlet ekvivalens az

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \qquad \text{illetve az} \qquad \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi)$$

egyenletrendszerrel. Mindkettő átírható vektoralakba is. Használjuk az oszlopvektoros jelölést:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R}.$$

A latin eredetű *implicit* szó jelentése *nem kifejtett*, *rejtett*, ami az összeköt, összefügg, összekever, körülcsavar jelentésű *implico* (implicō) szó származéka. E szó a matematikában az implicit alak, implicit függvény, stb. kifejezésekben arra utal, hogy valamely fontosnak tekintett mennyiség, változó, stb. nincs kifejezve a képletből. Ugyanennek a szónak a származéka a magába foglal, maga után von jelentésű *implikál* szó is, mely a matematikai logika „ha. . . , akkor. . . ” szerkezetű műveletével, az *implikációval* is kapcsolatban van.

2.3. DEFINÍCIÓ (ALAKZAT IMPLICIT EGYENLETRENDSZERE). *Egy (geometriai) alakzat egy adott koordináta-rendszerre vonatkozó* (implicit) egyenletrendszerén *olyan, a koordinátákra felírt egyenletrendszert értünk, melynek egyszerre minden egyenletét kielégítik az alakzathoz tartozó pontok koordinátái, de más pontokéhoz tartozók nem. Az egyenletek felírhatók pontokba mutató vektorokra is, ezeket* vektoregyenletnek *nevezzük. Egy alakzat m egyenletből álló egyenletrendszerének, illetve m vektoregyenletből álló egyenletrendszerének általános alakja*

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \qquad \vdots \\ F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad \textit{illetve} \quad \begin{cases} F_1(\mathbf{r}) = 0 \\ F_2(\mathbf{r}) = 0 \\ \quad \vdots \\ F_m(\mathbf{r}) = 0 \end{cases}$$

ahol $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *a tér egy pontja, és* $\mathbf{r}$ *az oda mutató vektor.*

Ha az egyenletrendszer egy egyenletből áll, az alakzat *egyenletéről* beszélünk.

A latin eredetű *explicit* szó jelentése *kifejtett*, *világosan kimondott*, ami a kibont, szétterít, kiszabadít, átvitt értelemben tisztáz, kifejt, megfejt jelentésű *explico* (explicō) szó származéka. E szó a matematikában az explicit alak, explicit függvény, stb. kifejezésekben arra utal, hogy valamely fontosnak tekintett mennyiség, változó, stb. ki van fejezve a többi segítségével.

2.4. DEFINÍCIÓ (ALAKZAT EXPLICIT EGYENLETRENDSZERE). *Egy alakzat egy adott koordináta-rendszerre vonatkozó* explicit vagy paraméteres egyenletrendszerén *olyan egyenletrendszert értünk, melyben az egyenletek bal oldalán a pontok koordinátáit megadó változók, jobb oldalán adott paraméterek függvényei szerepelnek. Általános alakja*

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(t_1, t_2, \dots, t_k) \\ x_2 &= f_2(t_1, t_2, \dots, t_k) \\ &\vdots \\ x_n &= f_n(t_1, t_2, \dots, t_k) \end{aligned}$$

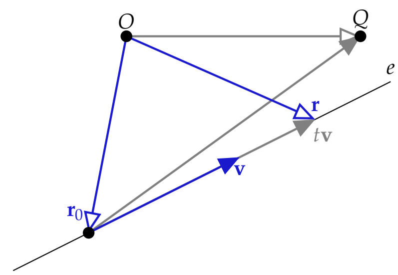
ahol $t_1 \in I_1$, $t_2 \in I_2, \dots, t_n \in I_n$, *és* $I_1, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}$. *Az ilyen egyenletrendszer egyetlen vektoregyenletté fogható össze:*

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(t_1, t_2, \dots, t_k),$$

ahol $\mathbf{f}$ *egy* $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ *függvény.*

A következőkben egyenes és sík egyenleteit és egyenletrendszereit fogjuk áttekinteni. Egyúttal látni fogjuk, hogy (lineáris) egyenletrendszer megoldása az implicit alak explicitté transzformálást jelenti.

Síkbeli egyenes egyenletei Tekintsük a sík egy tetszőleges e egyenesét, és jelöljük ki a síkban az O origót. Legyen a nemzérus $\mathbf{v}$ egy tetszőleges, az egyenessel párhuzamos vektor. Az ilyen vektorokat az egyenes *irányvektorának* nevezzük. Mutasson $\mathbf{r}_0$ az egyenes egy tetszőleges pontjába. Világos, hogy az e egyenes bármely pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektor előáll $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban, ahol t valós szám. Másrészt ha Q a sík egy tetszőleges, nem az e egyenesre eső pontja, akkor $\overrightarrow{OQ} - \mathbf{r}_0$ nem párhuzamos $\mathbf{v}$-vel, tehát nem is konstansszorosa, azaz $\overrightarrow{OQ} - \mathbf{r}_0 \neq t\mathbf{v}$ semmilyen t-re sem, így $\overrightarrow{OQ}$ nem áll elő $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban. Tehát az e tetszőleges pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektor felírható $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban, és ez csak e pontjaira igaz (ld. 2.3. ábra). Ez igazolja a következő állítást:



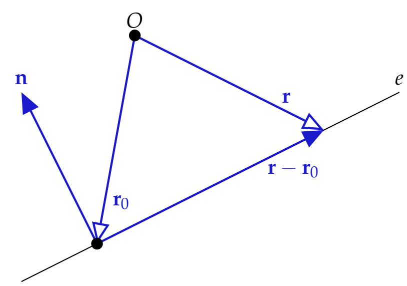
2.3. ábra: Egyenes explicit vektoregyenlete: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$.

2.5. ÁLLÍTÁS (SÍKBELI EGYENES EXPLICIT VEKTOREGYENLETE). *A sík minden egyenesének van*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ *az egyenes egy irányvektora, és* $\mathbf{r}_0$ *az egyenes egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor.*

A síkbeli egyenesre merőleges vektorokat az egyenes *normálvektorainak* nevezzük. Legyen $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ egy tetszőleges, a $\mathbf{v}$ irányvektorra merőleges vektor, azaz legyen $\mathbf{n}$ az e egy *normálvektora*. Azt, hogy az e egy tetszőleges pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektorra $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ párhuzamos $\mathbf{v}$-vel, úgy is kifejezhetjük, hogy $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ merőleges $\mathbf{n}$-re. A merőlegesség kifejezhető a skaláris szorzattal. Így az egyenes egy implicit vektoregyenletéhez jutunk: $\mathbf{r}$ pontosan akkor mutat az e egy pontjába, ha $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ (ld. 2.4. ábra). Ez az egyenlet átrendezés után $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$ alakra, majd a $C = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$ jelöléssel $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C$ alakra hozható (ld. még a 2.5. ábrát).



2.4. ábra: Síkbeli egyenes implicit vektoregyenlete: $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$.

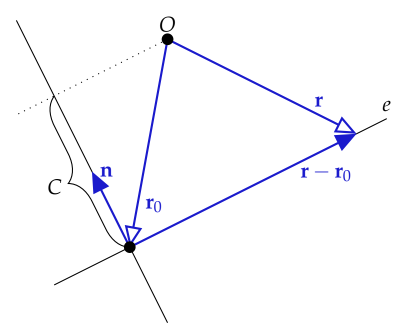
2.6. ÁLLÍTÁS (SÍKBELI EGYENES IMPLICIT VEKTOREGYENLETE). *A sík minden egyenesének van*

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0, \tag{2.2}$$

és vele ekvivalens

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C \tag{2.3}$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ *az egyenes egy normálvektora,* $\mathbf{r}_0$ *az egyenes egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor és* C *konstans.*



2.5. ábra: Síkbeli egyenes (implicit) vektoregyenlete: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C$. Ha $\mathbf{n}$ *egységvektor*, akkor az $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C$ geometriai jelentése az, hogy az egyenes bármely pontjába mutató vektornak az $\mathbf{n}$ egyenesére eső merőleges vetülete C. Ez az ábra is ezt az esetet szemlélteti.

A (2.2) alakú egyenlet könnyen átírható (2.3) alakúvá a $C = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$ jelöléssel. Az átalakítás fordított irányban is egyszerű, hisz ha $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C$, akkor találunk olyan $\mathbf{r}_0$ vektort, melyre $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0 = C$. Ez azért igaz, mert ha tetszőleges $\mathbf{n}$-re nem merőleges $\mathbf{v}$ vektorra $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = D$, akkor $\mathbf{n} \cdot (\frac{C}{D}\mathbf{v}) = C$, így az $\mathbf{r}_0 = \frac{C}{D}\mathbf{v}$ megfelel.

Az $\mathbf{r} = (x, y)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$ és $\mathbf{v} = (a, b)$ jelöléseket használva az explicit vektoregyenlet azonnal egyenletrendszerré alakítható.

2.7. ÁLLÍTÁS (SÍKBELI EGYENES EXPLICIT EGYENLETRENDSZERE). *A sík minden egyenesének van*

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \end{aligned} \tag{2.4}$$

alakú egyenletrendszere, ahol (a, b) az egyenes egy irányvektora, és (x_0, y_0) az egyenes egy tetszőleges rögzített pontja.

A következőkben megmutatjuk, hogy az explicit egyenletrendszerből a t paraméter kiküszöbölhető, így egy implicit egyenletet kapunk.

2.8. ÁLLÍTÁS (SÍKBELI EGYENES (IMPLICIT) EGYENLETE). *A sík minden egyenesének van*

$$Ax + By = C \tag{2.5}$$

alakú egyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol A és B közül nem mindkettő nulla, és $(-B, A)$ az egyenes egy irányvektora.

BIZONYÍTÁS. Ha a vagy b valamelyike 0, akkor a két egyenlet egyike felesleges, például ha $a = 0$, akkor az egyenletrendszer alakja

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0 + bt \end{aligned}$$

ami ekvivalens az $x = x_0$ egyenlettel, hisz az $y = y_0 + bt$ semmi mást nem mond, mint hogy y egy valós szám. Mivel $(a, b) \neq (0, 0)$, ezért csak az az eset marad, amikor a és b egyike sem 0. Ekkor mindkét egyenletből kifejezhető t, és a két értéket egyenlővé téve kapjuk, hogy

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b},$$

azaz

$$bx - ay = bx_0 - ay_0, \text{ vagy } b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0.$$

Az $A = b$, $B = -a$ jelöléssel a fenti egyenlet $Ax + By = Ax_0 + By_0$ alakú lesz. Az egyenlet jobb oldalán lévő konstanst C-vel jelölve az egyenes egyenlete $Ax + By = C$ alakot ölt. Másrészt könnyen látható, hogy minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, mert ekvivalens egy egyenes paraméteres egyenletrendszerével. Nevezetesen az $Ax + By = C$ egyenlet visszaírható $Ax + By = Ax_0 + By_0$ alakba, hisz az $Ax_0 + By_0 = C$ egyenletben $A \neq 0$ esetén egy tetszőleges y_0-t választva, egyértelműen kifejezhető x_0. (A $B \neq 0$ eset analóg.) Ennek alapján felírható a (2.4) egyenletrendszer. □

► A fenti állítás még egyszerűbben bizonyítható abban az esetben, ha a bázis ortonormált! Ezt az Olvasóra hagyjuk (ld. a 2.9. feladatot).

2.9. példa (Síkbeli egyenes egyenletei). *Írjuk fel annak a $(2,3)$ és az $(1,1)$ koordinátájú pontokon átmenő egyenes összes egyenlet(rendszer)ét!*

Megoldás. Ha egy egyenes átmegy e két ponton, akkor irányvektora a két pontba mutató vektorok különbsége, azaz $\mathbf{v} = (2,3) - (1,1) = (1,2)$. Legyen például $\mathbf{r}_0 = (1,1)$. Ekkor a vektoregyenlet és az explicit egyenletrendszer

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \text{illetve} \qquad \begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 1 + 2t. \end{aligned}$$

Az irányvektorból $(A,B) = (2,-1)$, innen az egyenes egyenlete $2x - y = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1$, azaz

$$2x - y = 1.$$

Az $(A,B) = (2,-1)$ vektor csak ortonormált koordináta-rendszerben egyezik meg a normálvektorral, így ott írhatjuk az egyenletet

$$(2,-1) \cdot (x-1, y-1) = 0$$

alakban. □

Síkbeli pont egyenletei Tekintsük a síkbeli (x_0, y_0) pontot. Ennek explicit egyenletrendszere, illetve vektoregyenlete:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0, \end{aligned} \qquad \text{illetve} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Ez nyilvánvaló, de didaktikai okokból hasznos erre a speciális esetre is vetni egy pillantást, ugyanis a matematikai fogalmak megértésében nagy segítségünkre lehet az extremális esetek vizsgálata.

A pont explicit egyenletrendszeréhez nincs szükség paraméterekre, így az implicit alak egyúttal explicit is. Ekkor úgy tekintünk az egyenletrendszerre, mint két egyenes egyenletére, melyek normálvektorai $(1,0)$ illetve $(0,1)$, és amelyek metszéspontja a tekintett pont.

Ez adja az ötletet, egy pont implicit egyenletrendszerének tekinthetnénk két egyenletet, melyek egymást az adott pontban metsző egy-egy egyenes egyenletei. Tehát mondhatjuk, hogy a pont implicit egyenletrendszerének általános alakja:

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y &= C_1 \\ A_2 x + B_2 y &= C_2 \end{aligned}$$

Az azonban nem igaz, hogy minden ilyen alakú egyenletrendszer egy pont egyenletrendszere, mert két egyenes metszheti egymást egyetlen pontban, de lehet, hogy nincs közös pontjuk, és lehet végtelen sok közös pontjuk is. Épp ennek a kérdésnek a részletes vizsgálata lesz a 2. fejezet témája.

A 3-dimenziós tér síkjainak egyenletei Tudjuk, hogy két lineárisan független $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektor bármely lineáris kombinációja a két vektor által meghatározott síkban van, továbbá hogy e sík bármely vektora előáll a megadott két vektor lineáris kombinációjaként (ld. 1.8.. és 1.11. tételek). Ebből azonnal adódik, hogy a sík egy rögzített pontjába mutató $\mathbf{r}_0$ vektor segítségével a sík bármelyik pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektor felírható $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ alakban.

2.10. ÁLLÍTÁS (SÍK EXPLICIT VEKTOREGYENLETE). *Bármely síknak van*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v} \tag{2.6}$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy sík egyenlete, ahol $\mathbf{u}$ *és* $\mathbf{v}$ *a sík két lineárisan független vektora és* $\mathbf{r}_0$ *a sík egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor.*

Hasonlóan a síkbeli egyeneshez, a térbeli sík egyenletéből is kiküszöbölhető a paraméter a merőlegesség felhasználásával. Az 1.47. feladat állítása szerint, ha egy vektor merőleges két tetszőleges vektor mindegyikére, akkor merőleges azok lineáris kombinációjára is. Mivel az $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ merőleges $\mathbf{u}$-ra és $\mathbf{v}$-re is, ezért merőleges azok minden lineáris kombinációjára is, azaz az $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ vektorra is. Ez az észrevétel az alapja az alábbi tételnek.

2.11. ÁLLÍTÁS (SÍK IMPLICIT VEKTOREGYENLETE). *A háromdimenziós térben minden síknak van*

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0, \tag{2.7}$$

és a vele ekvivalens

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C \tag{2.8}$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy sík egyenlete, ahol $\mathbf{n}$ *a sík egy normálvektora,* $\mathbf{r}_0$ *a sík egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor és* C *konstans.*

A bizonyítás analóg a síkbeli egyenesnél leírtakkal (ld. 2.10. feladat).

Az $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ és $\mathbf{u} = (a_1, b_1, c_1)$ $\mathbf{v} = (a_2, b_2, c_2)$ jelölésekkel az explicit vektoregyenlet egyenletrendszerré alakítható.

2.12. ÁLLÍTÁS (SÍK EXPLICIT EGYENLETRENDSZERE). *A háromdimenziós tér minden síkjának van*

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a_1 s + a_2 t \\ y &= y_0 + b_1 s + b_2 t \\ z &= z_0 + c_1 s + c_2 t \end{aligned} \tag{2.9}$$

alakú egyenletrendszere, ahol (a_1, b_1, c_1) *és* (a_2, b_2, c_2) *a sík két lineárisan független vektora, és* (x_0, y_0, z_0) *a sík egy tetszőleges rögzített pontja.*

Az explicit egyenletrendszerből kiküszöbölhető a két paraméter, ha például két egyenletből kifejezzük a paramétereket, és behelyettesítjük a harmadik egyenletbe. Így egy implicit egyenletet kapunk. A számításokat nem részletezzük, az eredmény

$$(b_1c_2 - b_2c_1)(x - x_0) + (c_1a_2 - c_2a_1)(y - y_0) + (a_1b_2 - a_2b_1)(z - z_0) = 0.$$

Az $(A, B, C) = (b_1c_2 - b_2c_1, c_1a_2 - c_2a_1, a_1b_2 - a_2b_1)$ jelöléssel a sík egyenlete $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ alakra hozható, vagy ami vele ekvivalens, $Ax + By + Cz = D$ alakra.

2.13. állítás (Sík implicit egyenlete). *A háromdimenziós térben minden síknak van*

$$Ax + By + Cz = D \tag{2.10}$$

alakú egyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy sík egyenlete, ha A, B és C legalább egyike nem nulla, és $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$, ahol (x_0, y_0, z_0) a sík valamely pontja.

A sík fenti egyenlete a sík $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ alakú vektoregyenletéből is megkapható, amit *ortonormált* koordináta-rendszerben könnyű igazolni (ld. 2.11. feladat). Mivel

$$(A, B, C) = (b_1c_2 - b_2c_1, c_1a_2 - c_2a_1, a_1b_2 - a_2b_1), \tag{2.11}$$

ami ortonormált bázisban épp az $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ vektorral egyenlő, ezért (A, B, C) merőleges a sík minden vektorára, vagyis a sík egy normálvektora. Az $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ egyenletet koordinátás alakba átírva kapjuk, hogy

$$(A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

2.14. példa (Sík egyenletei). *Írjuk fel a $(0, -1, 2)$ ponton átmenő, az $\mathbf{u} = (2, 2, 2)$ és $\mathbf{v} = (-1, 1, 5)$ vektorokkal párhuzamos sík egyenleteit!*

Megoldás. Egyszerű képletbehelyettesítés után a sík explicit vektoregyenlete és explicit egyenletrendszere

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \begin{aligned} x &= \phantom{-1+{}} 2s - t \\ y &= -1 + 2s + t \\ z &= 2 + 2s + 5t. \end{aligned}$$

Mivel a (2.11) képlet szerint $(A, B, C) = (8, -12, 4)$, ezért a sík implicit egyenlete $8(x - 0) - 12(y - (-1)) + 4(z - 2) = 0$, azaz 4-gyel való osztás és átrendezés után

$$2x - 3y + z = 5.$$

Így ortonormált koordináta-rendszerben a

$$(2, -3, 1) \cdot (x, y, z) = 5, \quad \text{vagy} \quad (2, -3, 1) \cdot (x, y + 1, z - 2) = 0$$

a sík implicit vektoregyenlete. □

A térbeli egyenes egyenletei Mindaz, amit a síkbeli egyenes explicit vektoregyenletéről mondtunk a 61. oldalon, lényegében változtatás nélkül megismételhető. Jelöljük ki a térben az origót, és tekintsük azt az e egyenest, melynek irányvektora $\mathbf{v}$, és amely átmegy azon a ponton, melybe az $\mathbf{r}_0$ vektor mutat. Világos, hogy az e egyenes bármely pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektor előáll $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban, ahol t valós szám, és az e-re nem illeszkedő pontokra ez nem áll. Így igaz a következő állítás:

2.15. ÁLLÍTÁS (TÉRBELI EGYENES EXPLICIT VEKTOREGYENLETE). *A háromdimenziós tér minden egyenesének van*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \tag{2.12}$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ *az egyenes egy irányvektora, és* $\mathbf{r}_0$ *egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor.*

Itt nem tudjuk a paramétert egyetlen vektoregyenletben kiküszöbölni, de az explicit egyenletrendszerré való átírás megy, ha felveszünk egy koordináta-rendszert, melyben $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ és $\mathbf{v} = (a, b, c)$:

2.16. ÁLLÍTÁS (TÉRBELI EGYENES EXPLICIT EGYENLETRENDSZERE). *A tér minden egyenesének van*

$$\begin{aligned} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{aligned} \tag{2.13}$$

alakú egyenletrendszere, ahol $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ *az egyenes egy irányvektora, és* (x_0, y_0, z_0) *az egyenes egy tetszőleges rögzített pontja.*

A (2.13) egyenletrendszerből a paraméter kiküszöbölhető. Szorozzuk be az első egyenletet b-vel, a másodikat a-val, majd vonjuk ki a második egyenletet az elsőből kapjuk, hogy $bx - ay = bx_0 - ay_0$. Hasonlóan eljárva az első és harmadik egyenlettel $cx - az = cx_0 - az_0$, végül az második és harmadik egyenletből $cy - bz = cy_0 - bz_0$ adódik. Az egyenleteket átrendezve az alábbi állítást kapjuk:

2.17. ÁLLÍTÁS (TÉRBELI EGYENES IMPLICIT EGYENLETRENDSZERE). *A tér minden egyenesének van két egyenletből álló implicit egyenletrendszere. Ha az* $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ *vektor az egyenes egy irányvektora, akkor a két egyenlet az alábbi három közül bármelyik kettő, amelyik nem* $0 = 0$ *alakú:*

$$\begin{aligned} b(x - x_0) &= a(y - y_0) \\ c(x - x_0) &= a(z - z_0) \\ c(y - y_0) &= b(z - z_0) \end{aligned} \tag{2.14}$$

A (2.17.) egyenletrendszer átírható a változók szerint rendezve:

$$\begin{array}{llll} bx - ay & & = bx_0 - ay_0 & \\ cx & - az & = cx_0 & - az_0 \\ & cy - bz & = & cy_0 - bz_0, \end{array}$$

de leggyakrabban az $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ esetre érvényes

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

alakkal találkozhatunk.

Bizonyítás. A (2.14) egyenleteit az állítás előtt már igazoltuk. Mivel $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, így legalább az egyik koordináta nem 0. Ha pontosan egyikük 0, pl. legyen $a \neq 0$, $b = c = 0$, akkor az egyenletrendszer

$$\begin{aligned} y &= y_0 \\ z &= z_0 \end{aligned}$$

alakú, ez két sík egyenlete, a mindkét egyenletet kielégítő pontok halmaza a síkok metszete, ami egy egyenes, mert e síkok biztosan nem párhuzamosak. (A harmadik egyenlet $0 = 0$ alakú, ami elhagyható.)

Ha a, b és c közül pontosan egy értéke 0, akkor két egyenlet azonos, így egyikük elhagyható. Például ha $a \neq 0$, $b \neq 0$ de $c = 0$, akkor az egyenletek alakja

$$\begin{aligned} b(x - x_0) &= a(y - y_0) \\ z &= z_0 \\ z &= z_0. \end{aligned}$$

Végül ha egyik együttható sem 0, akkor három sík egyenletét kaptuk, melyek közül semelyik kettő sem párhuzamos a bennük szereplő változók különbözősége miatt. Bármelyik kettő metszete egy egyenes, és mivel mindhárom metszete is egy egyenes, ezért bármelyik két egyenlet megtartható.

A tétel úgy is igazolható, hogy a (2.14) három egyenlete lineárisan összefügg, hisz az első egyenlet c-szerese mínusz a második b-szerese plusz a harmadik a-szorosa a $0 = 0$ egyenletet adja. Ez a vektoroknál látotthoz hasonlóan azt jelenti, hogy valamelyik egyenlet előáll a másik kettő lineáris kombinációjaként, ez pedig elhagyható, hisz ha egy pont kielégíti a másik két egyenletet, akkor a lineáris kombinációjukat is. □

2.18. példa (Térbeli egyenes egyenletrendszerei). *Írjuk fel annak az egyenesnek az explicit és implicit egyenletrendszerét, mely átmegy az $A(1,3,4)$ és a) a $B(3,3,1)$, illetve b) a $C(5,5,-2)$ ponton.*

Megoldás. *a)* Az A és B pontot összekötő vektor $= (2,0,-3)$. Innen az egyenes explicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= 3 \\ z &= 4 - 3t, \end{aligned}$$

melynek második egyenlete, $y = 3$, egy xz-síkkal párhuzamos sík egyenlete. A másik két egyenletből kiküszöbölve t-t, egy másik sík egyenletét kapjuk. Az egyenes ennek a két síknak a metszésvonala. Az első egyenletből $t = \frac{1}{2}(x-1)$, a harmadikból $t = -\frac{1}{3}(z-4)$ ezért $3x + 2z = 11$. Így az előző egyeneshez a következő implicit (paraméter nélküli) egyenletrendszer tartozik, mely két sík egyenletéből áll:

$$\begin{array}{rcrcl} 3x & & +2z & = & 11 \\ & y & & = & 3. \end{array}$$

b) Az A és C pontot összekötő vektor itt $= (4, 2, -6)$. Innen az egyenes explicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x &= 1 + 4t \\ y &= 3 + 2t \\ z &= 4 - 6t. \end{aligned}$$

Mindegyik egyenletből kifejezve t-t kapjuk, hogy

$$t = \frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{-6}.$$

Ez a következő három sík egyenletét adja:

$$\begin{array}{rrrcr} x & -2y & & = & -5 \\ 3x & & +2z & = & 11 \\ & 3y & +\ z & = & 13. \end{array}$$

E három sík közül bármely kettő meghatározza az adott egyenest, így e három egyenlet közül bármely kettő az egyenes (implicit) egyenletrendszere. □

Térbeli pont egyenletei Csak a teljesség és az analógiák megértése céljából vizsgáljuk meg a tér egy pontjának lehetséges egyenleteit. A térbeli (x_0, y_0, z_0) pont explicit egyenletrendszere, illetve vektoregyenlete:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \\ y &= y_0, \\ z &= z_0 \end{aligned} \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}.$$

Az explicit egyenletrendszert implicit alaknak is tekinthetjük, ekkor három – a koordinátasíkokkal párhuzamos – sík egyenletét látjuk, melyek egyetlen közös pontban metszik egymást.

A síkbeli esethez hasonlóan egy pont implicit egyenletrendszerének tekinthetnénk három egyenletet, melyek egymást az adott pontban metsző egy-egy sík egyenletei. Tehát a pont implicit egyenletrendszerének általános alakja

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z &= D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z &= D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z &= D_3, \end{aligned}$$

feltéve, hogy a síkoknak csak egyetlen közös pontjuk van E kérdés vizsgálatára visszatérünk a 2. fejezetben.

Egyenletek $\mathbb{R}^n$-ben Az egyenes és a sík explicit vektoregyenlete $\mathbb{R}^n$-ben is ugyanolyan alakú, mint $\mathbb{R}^3$-ben, azaz az egyenes explicit vektoregyenlete $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$, a síké $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ alakú.

A síkbeli egyenes és a térbeli sík vektoregyenlete $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = c$ alakú. E két esetben ez az egyenlet az n-dimenziós tér egy $n-1$-dimenziós alakzatának egyenlete ($n = 2, 3$). A későbbiekben látni fogjuk, hogy ez általában is igaz, de e pillanatban még a dimenzió fogalmát sem definiáltuk, ezért egyelőre csak nevet adunk ennek az alakzatnak. Az $\mathbb{R}^n$ térben $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ esetén az $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = c$ egyenletet kielégítő $\mathbf{r}$ vektorok végpontjainak halmazát *hipersíknak* nevezzük. Koordinátás alakban

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c,$$

ahol $\mathbf{n} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a hipersík *normálvektora* (ld. a 2.12. feladatot), $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a hipersík egy tetszőleges pontjába mutató vektor.

A következő táblázat összefoglalja geometriai alakzatoknak a továbbiak szempontjából legfontosabb egyenleteit.

		Explicit vektoregyenlet	Implicit egyenlet(rendszer)
Síkban	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$Ax + By = C$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y = C_1$ $A_2x + B_2y = C_2$
Térben	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	$Ax + By + Cz = D$
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ $A_3x + B_3y + C_3z = D_3$
$\mathbb{R}^n$-ben	hipersík	???	$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$
	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	???
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	???
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	???

2.1. táblázat: Geometriai alakzatok egyenletei: az $\mathbb{R}^n$-beli egyenletek közül többet még nem ismerünk, ezeket három kérdőjel jelzi, de arra bíztatjuk az Olvasót, hogy az analógia fonalán haladva fogalmazza meg sejtéseit.

Feladatok

2.1.• Egyenes, sík, hipersík: igaz – hamis Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül? Válaszunkat indokoljuk!

a) Az $Ax + By = C$ minden síkbeli koordinátarendszerben egy egyenes egyenlete!
b) Az $x^2 + y^2 = 4$ minden síkbeli koordinátarendszerben egy kör egyenlete!
c) Az $Ax + By = C$ lehet egy sík egyenlete!
d) Az $Ax + By = C$ egyenletű sík normálvektora (A, B, C).
e) Az $x + y = 0$, $z + w = 0$ egyenletrendszer egy $\mathbb{R}^4$-beli sík egyenletrendszere.
f) Az $x = 0$, $y = 0$ egyenletrendszer egy $\mathbb{R}^4$-beli sík egyenletrendszere.
g) Az $x_1 + 3x_3 + 5x_5 = 2$ egyenletű $\mathbb{R}^5$-beli hipersík normálvektora $(1, 0, 3, 0, 5)$.
h) $\mathbb{R}^4$-ben van olyan két sík, melyek egyetlen pontban metszik egymást!

2.2. Koordinátasíkkal párhuzamos sík egyenlete Tekintsük egy térbeli koordináta-rendszerben azt a síkot, mely párhuzamos az első két koordinátatengellyel, és a harmadik tengelyt az 5 koordinátájú pontban metszi. Írjunk fel egyenleteit!

2.3.• Határozzuk meg az implicit egyenlet(rendszer)ével megadott alábbi egyenes explicit vektoregyenletét!

a) $x + y = 1$ *b)* $2x + 3y = 6$

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ z = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ x + y + 2z + 3w = 2 \\ x + y + 2z + 2w = 3 \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} x + y + z + w = 3 \\ y + 2z + w = 2 \\ z + w = 1 \end{cases}$

2.4. Az alábbi egyenlet a megadott térben egy hipersík implicit egyenlete. Adjuk meg az explicit egyenletrendszerét!

a) $x + y = 1$, $\mathbb{R}^2$ *b)* $x + y + z = 1$, $\mathbb{R}^3$
c) $x + y = 1$, $\mathbb{R}^3$ *d)* $x + y + z + w = 1$, $\mathbb{R}^4$
e) $x + y = 1$, $\mathbb{R}^4$ *f)* $x = 1$, $\mathbb{R}^4$

2.5.• Határozzuk meg az implicit egyenlet(rendszer)ével megadott alábbi sík explicit vektoregyenletét!

a) $x + 2y + 3z = 1$ *b)* $3x + 2y + z = 6$

c) $ax + by + cz = 1$, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$ legalább egyike nem nulla paraméter

d) $\begin{cases} x + y + 2z + 6w = 4 \\ x - y + 4z = 2 \end{cases}$ *e)* $\begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ x + y + 2z + 3w = 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y = 3 \\ z + w = 1 \end{cases}$ *g)* $\begin{cases} x + y = 3 \\ w = 1 \end{cases}$

2.6. Egyenes egyenletei Írjuk fel a megadott pontokon átmenő egyenes egyenlet(rendszer)eit!

a) $A(2, 1)$, $B(3, 4)$, *b)* $A(1, 4)$, $B(3, 4)$,
c) $A(1, 4)$, $B(1, 3)$, *d)* $A(3, 4, 1)$, $B(3, 4, 2)$,
e) $A(1, 4, 1)$, $B(3, 4, 2)$, *f)* $A(1, 4, 1)$, $B(3, 2, 2)$,
g) $A(1, 1, 1, 1)$, $B(2, 3, 2, 4)$, *h)* $A(3, 4, 1, 0)$, $B(3, 2, 1, 2)$.

2.7. Sík egyenletei Írjuk fel a megadott pontokon átmenő sík egyenleteit!

a) $A(0, -1, 2)$, $B(-1, 0, 7)$, $C(2, 1, 4)$,
b) $A(0, 1, 2)$, $B(-1, 1, 7)$, $C(2, 1, 4)$,
c) $A(1, 1, 1, 1)$, $B(2, 3, 2, 4)$, $C(3, 2, 1, 0)$,
d) $A(0, -1, 2, 3)$, $B(-1, 0, 7, 4)$, $C(2, 1, 4, 2)$.

2.8. Hipersík egyenletei Írjuk fel a megadott pontokon átmenő $\mathbb{R}^4$-beli hipersík egyenleteit!

a) $A(0, 1, 1, 1)$, $B(0, 2, 3, 4)$, $C(1, 2, 1, 1)$, $D(0, 1, 2, 2)$,
b) $A(1, 1, 1, 1)$, $B(1, 2, 3, 4)$, $C(2, 2, 1, 1)$, $D(1, 1, 2, 2)$.
c) $A(1, 1, 1, 1)$, $B(1, 2, 1, 4)$, $C(2, 2, 1, 1)$, $D(1, 1, 2, 2)$.

2.9. Adjunk bizonyítást a 2.8. állításra, ha a bázis ortonormált, azaz mutassuk meg, hogy a sík minden egyenesének van

$$Ax + By = C$$

alakú egyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol A és B közül nem mindkettő nulla, és $(-B, A)$ az egyenes egy irányvektora.

2.10. Igazoljuk a 2.11. állítást.

2.11. Igazoljuk a 2.13. tételt ortonormált bázis esetén (az $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ alakú vektoregyenletéből)

2.12. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^n$ egy tetszőleges $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = c$ egyenletű hipersíkjának bármely két pontját összekötő vektor merőleges $\mathbf{n}$-re.

A lineáris egyenletrendszer és két modellje

E szakasz témája a lineáris egyenletrendszerek fogalma és a lineáris egyenletrendszer megoldásának két geometriai interpretációja: hipersíkok metszetének meghatározása és egy vektor lineáris kombinációként való előállítása. A számítások kényelmes könyvelésére bevezetjük a mátrix fogalmát.

Lineáris egyenlet és egyenletrendszer $Ax + By = C$ a síkbeli egyenes implicit egyenlete. Innen ered a lineáris egyenlet elnevezés.[1]

[1] *Lineáris:* a *vonalas* jelentésű latin lineāris szóból ered, mely a *lenfonal*, *horgászzsinór*, átvitt értelemben *vonal*, *határvonal* jelentésű linea (līnea) szó származéka. A matematikában *egyenessel kapcsolatba hozható*, illetve *elsőfokú* értelemben szokás használni.

2.19. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS EGYENLET). *Az*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{2.15}$$

alakra hozható egyenletet az x_1, $x_2 \ldots x_n$ ismeretlenekben lineáris egyenletnek *nevezzük, ahol a_1, $a_2, \ldots$ és a_n, valamint b konstansok. Az a_1, $a_2, \ldots$ és a_n konstansokat az egyenlet* együtthatóinak*, b-t az egyenlet* konstans tagjának *nevezzük.*

► Például az alábbi egyenletek lineárisak:

$$x - 2y = 1, \quad \frac{1}{2}x_1 - \sqrt{2}x_2 + (5-\pi)x_3 = 0, \quad a\cos 0.87 - 0.15c = 0.23.$$

► A következő egyenletek nem lineárisak az x, y és z ismeretlenekben:

$$xz - y = 0, \quad x + 2y = 3^z, \quad x\sin z + y\cos z + y = z^2,$$

viszont mindegyikük lineáris az x és y ismeretlenekben, hisz ekkor z paraméter, melynek bármely értéke mellett lineárisak az egyenletek.

► Az

$$x = y, \quad x = 3 - y + 2z$$

egyenletek az x, y és z ismeretlenekben lineárisak, mert ekvivalens (azonos) átalakítással a definícióbeli alakra hozhatók:

$$x - y + 0z = 0, \quad x + y - 2z = 3.$$

Lineáris egyenletek egy véges halmazát *lineáris egyenletrendszernek* nevezzük. Az egyenletrendszer ismeretlenei mindazok az ismeretlenek, amelyek legalább egy egyenletben szerepelnek. Ha egy ismeretlen egy egyenletben nem szerepel, akkor úgy tekintjük, hogy 0 az együtthatója. A jobb áttekinthetőséget az ismeretlenek azonos sorrendben való felírásával segítjük.

► Lineáris egyenletrendszerek például a következők:

$$\begin{aligned} 3x - y &= 2 \\ -x + 2y &= 6 \\ x + y &= 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad 2x - 3y + z - w = 6. \tag{2.16}$$

► Egyenletrendszer megoldása során gyakran fogunk $0 = b$ alakú egyenletekkel találkozni. Az is lehet, hogy egy egyenletrendszerben egyes együtthatók paraméterek. A következő egyenletrendszerek is lineárisak az x és y ismeretlenekben:

$$\begin{aligned} ax + \quad y &= 2a \\ x - \frac{1}{a}y &= \ \ 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x - \ \ y &= 0 \\ -x + 2y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 1 \\ 0 &= 2. \end{aligned} \tag{2.17}$$

2.20. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER). Lineáris egyenletrendszer*en ugyanazokban a változókban lineáris egyenletek egy véges halmazát értjük. Általános alakja m egyenlet és n ismeretlen esetén*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n \ &= \ b_1 \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \ldots + \ a_{2n}x_n \ &= \ b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad &\quad\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{2.18}$$

ahol x_1, x_2,... x_n az ismeretlenek, a_{ij} az i-edik egyenletben az x_j ismeretlen együtthatóját jelöli, és b_i az i-edik egyenlet konstans tagja. Ha mindegyik egyenlet konstans tagja 0*, a lineáris egyenletrendszer* homogén*, ha csak egy is különbözik* 0*-tól,* inhomogén*.*

► A (2.16) egyenletrendszerei mind inhomogének, míg a (2.17) középső egyenletrendszere homogén.

2.21. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA). *Azt mondjuk, hogy a rendezett $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ szám-n-es* megoldása *a (2.18) egyenletrendszernek, ha megoldása minden egyenletnek, azaz ha minden egyenletet kielégít az $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2$,..., $x_n = u_n$ helyettesítéssel. Ha e szám-n-est vektornak tekintjük,* megoldásvektorról *beszélünk. Az összes megoldás halmazát az egyenletrendszer* megoldáshalmaz*ának nevezzük. Egy egyenletrendszert* konzisztensnek *(vagy* megoldhatónak*) nevezünk, ha megoldáshalmaza nem üres. Ellenkező esetben az egyenletrendszer* inkonzisztens *(*nem megoldható*).*

A *konzisztes* szó jelentése: belső ellentmondástól mentes. Egyéb jelentései: szilárd, sűrű, tömött, tömör, tartalmas, egységes, következetes. A latin consistens szóból ered, melynek jelentése helytálló.

► A (2.17) első egyenletrendszerének megoldása $(x, y) = (1, a)$, a másodiké $(x, y) = (0, 0)$. A harmadik egyenletrendszernek nincs megoldása, hisz nincs olyan x és y érték, melyre fönnállna a $0x + 0y = 2$ egyenlőség.

► Általában, a

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$$

egyenletnek minden szám-n-es megoldása, míg a

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b, \quad (b \neq 0)$$

egyenletnek egyetlen megoldása sincs.

Ha egy egyenletrendszer több egyenletből áll, mint ahány ismeretlene van, *túlhatározottnak* nevezzük, míg ha kevesebb egyenletből áll, *alulhatározottnak*. E fogalmak időnként félrevezető megfogalmazásokhoz és téves következtetésekre vezetnek, ha az az elképzelés alakul ki, hogy a túlhatározottság azt jelenti: az egyenletek (a feltételek) már „túl sokan” vannak ahhoz, hogy akár csak egy szám-n-es is kielégítse. Később látni fogjuk, hogy ezzel ellentétben nem a „túl sok” egyenlet, hanem az egymásnak ellentmondó egyenletek okozzák az inkonzisztenciát. Hasonlóképp az alulhatározottság nem jelenti azt, hogy szükségképpen több megoldás is van. Alulhatározott egyenletrendszer is lehet inkonzisztens. Egyedül annyi mondható: alulhatározott egyenletrendszernek nem lehet csak egyetlen megoldása.

Ekvivalens lineáris egyenletrendszerek Az alábbi egyenletrendszerek mindegyikének $(x, y) = (2, 1)$ az egyetlen megoldása:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned} \tag{2.19}$$

2.22. DEFINÍCIÓ (EKVIVALENS EGYENLETRENDSZEREK). *Azonos ismeretlenekkel felírt két egyenletrendszert* ekvivalensnek *nevezünk, ha megoldásaik halmaza azonos.*

2.23. TÉTEL (EKVIVALENS ÁTALAKÍTÁSOK). *Az alábbi transzformációk minden egyenletrendszert ekvivalens egyenletrendszerbe visznek át:*
1. *két egyenlet felcserélése;*
2. *egy egyenlet nem nulla számmal való szorzása;*
3. *egy egyenlet konstansszorosának egy másikhoz adása.*

Ezen kívül

4. *egy* $0 = 0$ *alakú egyenlet elhagyása*

is ekvivalens átalakítás, ami eggyel csökkenti az egyenletek számát.

BIZONYÍTÁS. Az első kettő és a negyedik átalakítás nyilvánvalóan nem változtatja meg a megoldások halmazát (a negyedikkel kapcsolatban lásd a 2.20. feladatot). Nézzük a harmadik átalakítást. Tekintsük az *eredeti* egyenletrendszer egy megoldását, és azt az *új* egyenletrendszert, melyet az i-edik egyenlet c-szeresének a j-edikhez adásával kapunk. Világos, az átalakítás előtt is elvégezhetjük a behelyettesítést, akkor viszont egy kielégített egyenlőség konstansszorosát adjuk egy másikhoz, ami így ugyancsak ki lesz elégítve. Tehát az eredeti egyenletrendszer minden megoldása az újnak is megoldása. Másrészt viszont az új egyenletrendszer minden megoldása az eredetinek is megoldása, hisz az visszakapható az újból az i-edik egyenlet $-c$-szeresének a j-edikhez adásával. Vagyis a két megoldáshalmaz megegyezik. Tehát ez az átalakítás is ekvivalens. □

► Az

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 2 = 0$$

egyenlet nem lineáris, mert a z-vel való beszorzás nem ekvivalens átalakítás, tehát a lineáris $x + y + 2z = 0$ egyenlettel nem ekvivalens.

Mátrixok A számtáblázatokat, azaz a *mátrixokat* egyelőre csak az egyenletrendszerek megoldásának kényelmes leírására fogjuk használni, később azonban a velük végezhető műveletekkel a lineáris algebra kulcsfogalmává válik.

A mátrixba írt számokat a *mátrix elemeinek* nevezzük. A mátrix méretének jellemzéséhez mindig előbb a sorok, majd az oszlopok számát adjuk meg, tehát egy $m \times n$-es mátrixnak m sora és n oszlopa van. Egy

Mátrix: a latin mater (māter) (*anya*, *szülőanya*, *forrás*) szó származéka a matrix (mātrīx), melynek jelentése az európai nyelvekben a következő változásokon ment át: *anyaállat*, *vemhes állat*, *anyaméh*, *bezárt hely*, *ahonnan valami kifejlődik*, *bezárt*, *körülzárt dolgok sokasága*, *tömbje*. Jelentése az élettanban méh, a geológiában finomszemcsés kő, melybe fossziliák, kristályok, drágakövek vannak zárva, az anatómiában a körmöt, fogat kialakító szövet.

ilyen mátrix általános alakja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \text{vagy} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

mi az előbbit fogjuk használni.

A mátrixokat[2] általában nagy betűvel jelöljük, e könyvben – követve a műszaki nyelv szokásait – félkövér nagy betűvel. A mátrix elemeit általában a mátrixot jelölő nagy betűvel azonos kis betűvel jelöljük, tehát **A** elemei a_{11}, a_{12}.... A fenti mátrixra szokás még a

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n} \text{ vagy egyszerűen az } \mathbf{A} = [a_{ij}]$$

jelölést, míg elemére a $(\mathbf{A})_{ij}$ jelölést használni.

Mindig az első index jelöli a sor, a második az oszlop számát, tehát a_{23} a 2-dik sor 3-adik eleme. A félreérthetőség elkerülésére a_{ij} helyett $a_{i,j}$ is írható (pl. $a_{n,n-1}$). A mátrix *főátlójába* azok az elemek tartoznak, amelyek ugyanannyiadik sorban vannak, mint ahányadik oszlopban, azaz a például a fenti mátrixban a főátló elemei a_{11}, a_{22},....

A gyakorlatban igen nagy méretű mátrixokat is kezelni kell. Ha elemeik nagy része 0, *ritka mátrixoknak* nevezzük. A nagy méretű nem ritka mátrixokat *sűrűnek* nevezzük.

A vektorokat is szokás *mátrix jelöléssel*, *mátrix alakban*, azaz egy 1-soros vagy 1-oszlopos mátrixszal leírni – ahogy azt az első fejezetben mi is tettük. Az $n \times 1$-es mátrixot *oszlopvektornak* (*oszlopmátrixnak*), az $1 \times n$-es mátrixot *sorvektornak* (*sormátrixnak*) nevezzük. Az, hogy egy n-dimenziós vektort sor- vagy oszlopvektorral reprezentáljunk, döntés (szokás, ízlés) kérdése. Például az $(1, 2)$ vektornak megfelelő sorvektor és oszlopvektor

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ illetve } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

A széles körben elterjedt szokást követve alapértelmezésben az oszlopvektoros jelölést fogjuk használni.

Az **A** mátrix i-edik sorvektorát $\mathbf{a}_{i*}$ vagy $(\mathbf{A})_{i*}$, a j-edik oszlopvektorát $\mathbf{a}_{*j}$ vagy $(\mathbf{A})_{*j}$ jelöli összhangban az elemek indexelésével. Hasonló jelölést használnak a mátrix alapú nyelvek is (ld. a széljegyzetet). Ha csak oszlopvektorokkal dolgozunk, a j-edik oszlopvektort egyszerűbben, $\mathbf{a}_j$-vel jelöljük.

2.24. példa (Mátrixok és elemeik). *Ha*

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \text{ akkor } c_{23} = 7,\ \mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_{*2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix},\ \mathbf{c}_{2*} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

[2] A programnyelvekben – ellentétben a matematikával – a kisbetűvel/nagybetűvel való jelölésnek nincs a mátrixot az elemétől való megkülönböztető szerepe. A legtöbb magasszintű nyelvben az `A`-val jelölt mátrix (informatikai szóhasználattal *tömb*) i-edik sorának j-edik elemét `A[i,j]` vagy `A(i,j)` jelöli. Az alacsonyabb szintű C-típusú nyelvekben nincs 2-dimenziós tömb, a mátrixot egy olyan 1-dimenziós tömb reprezentálja, melynek minden eleme 1-dimenziós tömb, így `A[i]` az i-edik sort, `A[i][j]` az i-edik sor j-edik elemét jelöli. A mátrix alapú nyelvekben egy mátrix egy sorvektora vagy oszlopvektora könnyen kiemelhető, pl. az `A` mátrix 2. sorát az `A(2,:)`, 3. oszlopát a `A(:,3)` kóddal érhetjük el. Sok programnyelvben a tömbök elemeit nem 1-től, hanem 0-tól indexelik, ilyen például a C és a Python is.

Vektorok magyar irodai és általános iskolában használt jelölése – a tizedes vessző használata miatt – pontosvesszőt tesz a *vektor koordinátái* közé *elválasztójelként*. Magyar nyelvű felsőbb matematika szövegekben ez nem szokás, mi is elkerüljük, és tizedespontot, vektor koordinátái közt vesszőt használunk. Vegyük észre, hogy vektorok sorvektorral (sormátrixszal) való megadásnál írásjelet nem használunk, csak szóközzel választjuk el a koordinátákat!

Egyenletrendszer mátrixa és bővített mátrixa Az egyenletrendszer *együtthatómátrixa* az egyenletek együtthatóit, míg *bővített* mátrixa, vagy egyszerűen csak *mátrixa* az egyenletek együtthatóit és konstans tagjait tartalmazza. Az áttekinthetőség érdekében a bővített mátrixban egy függőleges vonallal választhatjuk el az együtthatókat a konstans tagoktól. A 2.20. definícióbeli általános alak együttható- és bővített mátrixa:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

2.25. PÉLDA (MÁTRIX HASZNÁLATA A MEGOLDÁSHOZ). *Oldjuk meg a következő – egyenleteivel és mátrixával is megadott – egyenletrendszert!*

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 2z &= 7 \\ x + y + z &= 3 \\ 2x + 2y + 3z &= 6 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right].$$

MEGOLDÁS. A megoldást párhuzamosan mindkét alakon szemléltetjük. Első lépésként kicseréljük az első két egyenletet/sort:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + 3y + 2z &= 7 \\ 2x + 2y + 3z &= 6 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

Az első egyenlet/sor 2-szeresét kivonjuk a második, majd a harmadik egyenletből/sorból (azaz -2-szeresét hozzáadjuk a második majd a harmadik egyenlethez/sorhoz).

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ y &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

E ponton az egyenletrendszerről leolvasható y és z értéke: $y = 1, z = 0$. Ezeket az első egyenletbe helyettesítve az $x + 1 + 0 = 3$ egyenletet kapjuk, amiből kifejezhető x értéke: $x = 2$.

Másik megoldási módszerhez jutunk, ha a visszahelyettesítés helyett folytathatjuk az ekvivalens átalakítások sorozatát. Vonjuk ki a második, majd a harmadik egyenletet/sort az elsőből:

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \\ z &= 0 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Így olyan alakra hoztuk az egyenletrendszert, illetve a bővített mátrixot, amiből azonnal leolvasható a megoldás: $(x, y, z) = (2, 1, 0)$. □

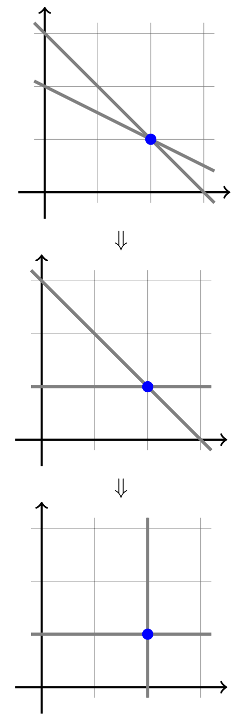
Sormodell: hipersíkok metszete A lineáris egyenletrendszerek szemléltetésére két geometriai modellt mutatunk, melyek segíteni fognak az általánosabb fogalmak megértésében, szemléltetésében.

Egyenletrendszer megoldásának szemléltetése a sormodellben jól nyomon követhető a SagePlayer sormodell című demonstrációján. Ott saját bővített mátrixokkal is lehet kísérletezni.

Tudjuk, hogy a kétváltozós lineáris $ax + by = c$ egyenletet kielégítő pontok halmaza egyenest alkot, ha a és b legalább egyike nem 0. (Ha $a = b = c = 0$, akkor az egyenlet alakja $0x + 0y = 0$, azaz $0 = 0$, ami minden (x, y) számpárra fennáll, tehát a megoldások halmaza a sík összes pontjának halmazával azonos. Ha $a = b = 0$, de $c \neq 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása, a megoldáshalmaz üres.)

2.26. PÉLDA (SORMODELL KÉT KÉTISMERETLENES EGYENLETTEL). *Ábrázoljuk az alábbi egyenletrendszereket és megoldásukat a sormodellben!*

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \quad \text{az} \quad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 7 \end{aligned} \quad \text{és az} \quad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 6 \end{aligned}$$



2.6. ábra: Egyenletrendszer megoldásának szemléltetése

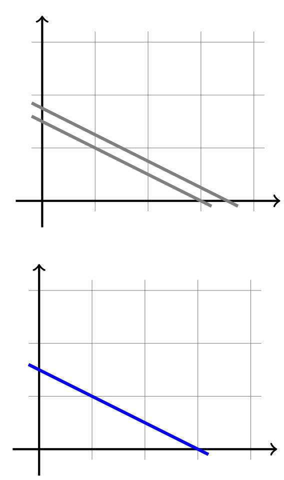
MEGOLDÁS. Az első egyenletrendszer szerinti ábra egy metsző egyenespárt tartalmaz. Metszéspontjuk a megoldás. Ezt a 2.6 ábra felső rajza mutatja. Oldjuk meg az egyenletrendszert! A megoldás közben két újabb egyenletrendszert kapunk:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Ezek sormodelljeit a 2.6 ábra mutatja.

A második egyenletrendszer nem oldható meg, mert az egyenleteknek megfelelő két egyenes párhuzamos, és nincs közös pontjuk. Az algebrai megközelítés is ezt adja: ha az első egyenlet kétszeresét kivonjuk a másodikból, az ellentmondó $0 = 1$ egyenletet kapjuk. Másként fogalmazva: az $0x + 0y = 1$ egyenletet kielégítő pontok halmaza üres.

A harmadik egyenletrendszer egyenleteihez két egybeeső egyenes tartozik. Az egyenletrendszer megoldáshalmaza tehát ennek az egyenesnek a pontjaiból áll. Ha az első egyenlet kétszeresét kivonjuk a másodikból, a $0 = 0$ egyenletet kapjuk, amely így elhagyható. A megmaradó $x + 2y = 3$ egyenlet összes megoldása paraméteres alakba írva például $(x, y) = (3 - 2t, t)$. □



2.7. ábra: A megoldás szemléltetése, ha a két egyenlet egyikének bal oldala nullává tehető

Röviden áttekintjük a három egyenletből álló háromismeretlenes egyenletrendszerek sormodelljeit a 3-dimenziós térben.

Ha a három egyenlettel meghatározott három sík általános helyzetű, azaz normálvektoraik lineárisan függetlenek, akkor az egyenletrendszernek egyetlen megoldása van (ld. 2.8. (a) ábra). Például a 2.25. példabeli egyenletrendszernek egyetlen megoldása van: $(x, y, z) = (2, 1, 0)$.

Ha a normálvektorok közt lineáris kapcsolat van, akkor a megoldások száma vagy 0 vagy végtelen lesz. Tekintsük az

$$\begin{aligned} 2x + y + 2z &= 5 \\ x + y + z &= 3 \\ 3x + 2y + 3z &= 8 \end{aligned} \qquad \text{és az} \qquad \begin{aligned} 2x + y + 2z &= 5 \\ x + y + z &= 3 \\ 3x + 2y + 3z &= 9 \end{aligned}$$

egyenletrendszereket. A normálvektorok mindkettőben egy síkba (de nem egy egyenesbe) esnek, mivel $(2,1,2) + (1,1,1) - (3,2,3) = \mathbf{0}$, így a síkok párhuzamosak egy egyenessel. Az első egyenletrendszer esetén ugyanez a lineáris kapcsolat az egyenletek közt is, azaz az első kettőt kivonva a harmadikból a $0 = 0$ egyenletre jutunk, ami elhagyható, a maradék két sík metszete pedig egyenes (ld. a 2.8 *b)* ábra). A második egyenletrendszer esetén a $0 = 1$ egyenletre jutunk, azaz a bal oldalak közti lineáris kapcsolat nincs meg a jobb oldalak közt. Ekkor a síkoknak nincs közös pontjuk (ld. a 2.9. *(b)* ábrát).

Végül ha a síkok közt vannak párhuzamosak, de nem egybe esők, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása (ld. a 2.9. *(a)* ábrát), míg ha mindhárom sík egybe esik, a sík pontjai adják az összes megoldást (ld. a 2.8. *(c)* ábrát).

2.27. ÁLLÍTÁS (SORMODELL). *Ha egy n-ismeretlenes egyenlet bal oldalán nem minden együttható 0, akkor az egyenletet kielégítő pontok (azaz az egyenlet megoldásai) egy hipersíkot alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben. Ha egy n-ismeretlenes egyenletrendszer m ilyen egyenletből áll, akkor az egyenletrendszer megoldása a nekik megfelelő m hipersík közös része $\mathbb{R}^n$-ben.*

Az m egyenlet a skaláris szorzás segítségével tömörebb alakban is fölírható. Az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú lineáris egyenletrendszer i-edik egyenletének alakja

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

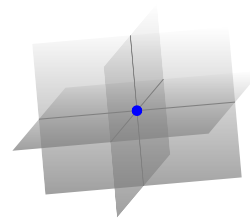
Ha $\mathbf{a}_{i*}$ jelöli az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorvektorát, és $\mathbf{x}$ az ismeretlenek vektorát, akkor az előző egyenlet a következő alakot ölti:

$$\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = b_i. \tag{2.20}$$

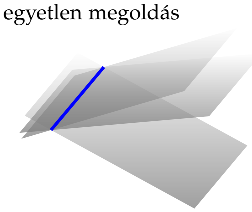
Ez különösen akkor lesz érdekes, ha homogén lineáris egyenletrendszereket fogunk vizsgálni, mert ott mindegyik egyenlet $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = 0$ alakot ölt, ami azt jelenti, hogy olyan $\mathbf{x}$ vektort keresünk, mely merőleges az $\mathbf{a}_{i*}$ vektorok mindegyikére.

Oszlopmodell: vektor előállítása lineáris kombinációként E modellben az egyenletrendszerre úgy tekintünk, mint egy olyan vektoregyenletre, amelyben egy vektort kell előállítani adott vektorok lineáris kombinációjaként. Például az

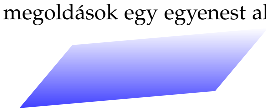
$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}, \qquad \text{és az} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$



(a) Három általános helyzetű sík: egyetlen megoldás

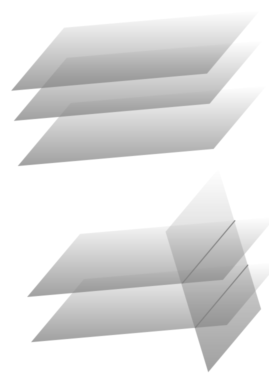


(b) Egy egyenesen átmenő, de nem csupa azonos sík: végtelen sok megoldás, a megoldások egy egyenest alkotnak



(c) Azonos síkok: végtelen sok megoldás, a megoldások egy síkot alkotnak

2.8. ábra: Konzisztens (megoldható) egyenletrendszerek ábrázolása (a megoldáshalmazt kék szín jelzi)



(a) A síkok közül legalább kettő párhuzamos, de nem azonos.

(b) Egy egyenessel párhuzamos, de egymással nem párhuzamos és közös egyenest sem tartalmazó három sík.

2.9. ábra: Nem megoldható egyenletrendszerek szemléltetése egy egyenletrendszer (ld. 2.26. példa) és egy vele ekvivalens vektoregyenlet. Itt az a feladat, hogy megkeressük az $(1,1)$ és $(1,2)$ vektoroknak azt a lineáris kombinációját, amely egyenlő a $(3,4)$ vektorral.

Az oszlopmodell lépései jól nyomon követketők a SagePlayer oszlopmodell című demonstrációján. Ott saját bővített mátrixokkal is lehet kísérletezni.

2.28. PÉLDA (OSZLOPMODELL). *Ábrázoljuk a 2.26. példában megadott*

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 7 \end{aligned} \quad \text{és} \quad \begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x + 4y &= 6 \end{aligned}$$

egyenletrendszereket az oszlopmodellben!

MEGOLDÁS. Az első egyenletrendszer esetén két lineárisan független vektor lineáris kombinációjaként kell előállítani egy harmadik vektort. Ezt szemlélteti a 2.10 ábra. Érdekességként itt is megmutatjuk, hogy az egyenletrendszer megoldásának lépései hogy mutatnak e modellben. Az ekvivalens átalakítások lépései:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x + y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x \quad &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

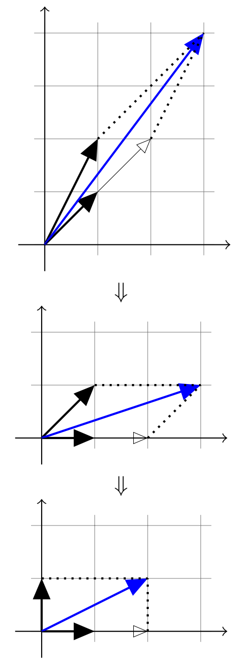
Vektoros alakban:

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} y = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} y = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} y = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}.$$

A második és harmadik egyenletrendszer vektoros alakja

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} y = \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix} y = \begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}.$$

A 2.11 ábráról szemléletesen is látható, hogy az egyik vektoregyenletnek nincs megoldása, míg a másiknak végtelen sok is van. □



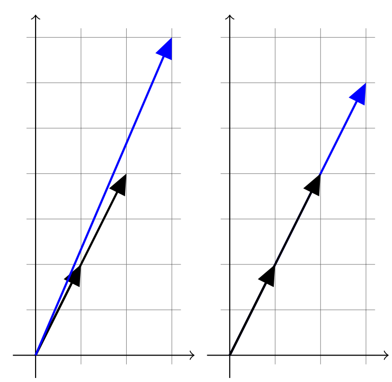
2.10. ábra: A megoldás lépései a oszlopmodellben.

Általánosan kimondható a következő:

2.29. ÁLLÍTÁS (OSZLOPMODELL). *A 2.20. definícióban megadott (2.18) egyenletrendszer a következő vektoregyenlettel ekvivalens:*

$$\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix} x_2 + \ldots + \begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer megoldása ekvivalens egy vektoregyenlet megoldásával, ahol az egyenletrendszer konstans tagjaiból álló vektort kell az együtthatómátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként előállítani.



2.11. ábra: Oszlopmodell lineárisan összefüggő vektorok esetén.

E modell szerint egy egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha az együtthatómátrix oszlopvektorainak összes lineáris kombinációjából álló halmazban a konstans tagokból álló vektor is szerepel (ld. 2.22. feladat).

Feladatok

Lineáris egyenletek és egyenletrendszerek

2.13.• Melyek lineáris egyenletek az x, y és z változókban az alábbiak közül?

a) $3x - (\ln 2)y + e^3 z = 0.4$ *b)* $a^2 x - b^2 y = 0$

c) $xy - yz - zx = 0$ *d)* $(\sin 1)x + y - \pi z = 0$

e) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ *f)* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

Igazoljuk, hogy az alábbi egyenletrendszerek ekvivalensek!

2.14. $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ y = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 3 \\ x = 2 \end{cases}$

2.15. $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 0x + 0y = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 7 \end{cases}$

Oldjuk meg (fejben számolva) az alábbi lineáris egyenletrendszereket az $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ paraméterválasztás esetén!

2.16. $\begin{cases} (2a - b)x + (3a - c)y = 0 \\ (3b - 2c)x + (b - 2a)y = 0 \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} (b - a)x + (3a - c)y = 1 \\ (3b - 2c)x + (b - 2a)y = 0 \end{cases}$

2.18. $\begin{cases} (b - a)x + (3a - c)y = 1 \\ (3b - 2c)x + (b - 2a)y = 1 \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} (b - a)x + (3a - c)y = 1 \\ (3b - 2c)x + (c - b)y = 2 \end{cases}$

2.20. Egyenletrendszerek közös megoldása Tekintsük az azonos ismeretleneket tartalmazó $\mathcal{E}_1$ és $\mathcal{E}_2$ egyenletrendszereket. Legyen ezek megoldáshalmaza $\mathcal{M}_1$, illetve $\mathcal{M}_2$. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{E}$ az $\mathcal{E}_1$ és $\mathcal{E}_2$ egyenletrendszerek egyesítése, azaz $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$, és $\mathcal{M}$ az $\mathcal{E}$ megoldáshalmaza, akkor $\mathcal{M}$ az $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$ közös része, azaz $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$.

Vizsgáljuk meg ezt az állítást az alábbi esetekben:

a) $\mathcal{E}_1 = \{ x + y = 2 \}$, $\mathcal{E}_2 = \{ x - y = 0 \}$;

b) $\mathcal{E}_1 = \{ x + y = 2,\ x - y = 0 \}$, $\mathcal{E}_2 = \{ x - y = 0 \}$;

c) $\mathcal{E}_1 = \{ x + y = 2,\ x - y = 0 \}$, $\mathcal{E}_2 = \{ x - y = 1 \}$;

d) $\mathcal{E}_1 = \{ x + y = 2,\ x - y = 0 \}$, $\mathcal{E}_2 = \{ 0x + 0y = 0 \}$;

e) $\mathcal{E}_1$ tetszőleges egyenletrendszer, $\mathcal{E}_2 = \{ 0 = 0 \}$.

Sormodell, oszlopmodell

2.21.• Sor és oszlopmodell Rajzoljuk fel a következő két egyenletrendszerhez tartozó sormodell és oszlopmodell szerinti ábrát!

a) $\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ 3x - 2y &= 4 \end{aligned}$ *b)* $\begin{aligned} 2x + 4y &= 3 \\ 3x + 6y &= 4 \end{aligned}$

2.22. Sor- és az oszlopmodell 3D-ben Vizsgáljuk meg az alábbi két – azonos együtthatómátrixú – egyenletrendszer megoldhatóságát a sor- és az oszlopmodellben:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 3 \\ x + 2y + 4z &= 3 \\ 3x + 4y + 8z &= 9 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y + 2z &= 3 \\ x + 2y + 4z &= 3 \\ 3x + 4y + 8z &= 1 \end{aligned}$$

2.23. Sor és oszlopmodell $m \neq n$ esetén Vizsgáljuk meg az alábbi három egyenletrendszer megoldhatóságát a sor- és az oszlopmodellben:

$$a)\ \begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + y &= 4 \\ x + 3y &= 5 \end{aligned} \qquad b)\ \begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 4 \\ x + 3y &= 5 \end{aligned} \qquad c)\ \begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + 2y &= 3 \\ x + 3y &= 5 \end{aligned}$$

2.24.• Igaz – hamis Mely állítások igazak, melyek hamisak az alábbiak közül?

a) Ha egy n-ismeretlenes egyenletrendszer olyan hipersíkok egyenleteiből áll, melyek közt van két párhuzamos, akkor az egyenletrendszer nem oldható meg.

b) Ha egy n-ismeretlenes egyenletrendszer nem oldható meg, akkor az egyenletek olyan hipersíkok egyenletei, melyek közt van két párhuzamos, de nem azonos hipersík.

c) Ha egy n-ismeretlenes egyenletrendszer csak két egyenletből áll, akkor az oszlopmodell szerint pontosan akkor oldható meg tetszőleges jobb oldal esetén, ha a vektoregyenlet bal oldalán szereplő vektorok közt van kettő lineárisan független.

2.25.• Egészítsük ki az alábbi állításokat úgy, hogy igazak legyenek!

a) Egy két egyenletből álló háromismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra a(z) ..-dimenziós térben .. darab ......ból/ből áll, melyek ha ...., akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása, egyébként megoldásainak száma .... Oszlopmodellje a(z) ..-dimenziós térben .. darab ....ból/ből áll.

b) Egy három egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra a(z) ..-dimenziós térben .. darab ....ból/ből áll, míg az oszlopmodellje a ..-dimenziós térben .. darab ......ból/ből.

c) Egy négy egyenletből álló ötismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra a(z) ..-dimenziós térben .. darab ....ból/ből áll. Oszlopmodellje a(z) ..-dimenziós térben .. darab ....-ból/ből áll.

Megoldás kiküszöböléssel

E fejezetben alaposabban megismerjük a kisméretű egyenletrendszerek megoldásában hasznos, a kiküszöbölésre épülő klasszikus megoldási módszert.

Elemi sorműveletek és a lépcsős alak A lineáris egyenletrendszerek egyik megoldási módszerének lényege, hogy ekvivalens átalakításokkal olyan alakra hozzuk az egyenletrendszert, melyből – visszahelyettesítések után, vagy azok nélkül – azonnal leolvasható az eredmény. Az átalakításokat praktikus okból a bővített mátrixon hajtjuk végre.[3]

A 2.23. tételben felsorolt első három ekvivalens átalakításnak megfelelő mátrixtranszformációk az elemi sorműveletek:

2.30. DEFINÍCIÓ (ELEMI SORMŰVELETEK). *Egy mátrix sorain végzett alábbi műveleteket* elemi sorműveleteknek *nevezzük:*

1. Sorcsere: *két sor cseréje.*
2. Beszorzás: *egy sor beszorzása egy nemnulla számmal.*
3. Hozzáadás: *egy sorhoz egy másik sor konstansszorosának hozzáadása.*

Természetesen egy sort el is oszthatunk egy nemnulla c számmal, hisz az az $1/c$-vel való beszorzással egyenértékű. Hasonlóképp levonhatjuk egy sorból egy másik sor c-szeresét, hisz az a $-c$-szeresének hozzáadásával ekvivalens. Az elemi sorműveleteket más feladatok megoldásában is használjuk, ahol a mátrix mérete nem változhat, ezért a zérussor elhagyását nem szokás elemi sorműveletnek tekinteni. Az elemi sorműveletek mintájára elemi oszlopműveletek is definiálhatók. Az elemi átalakításokra a következő jelöléseket fogjuk használni:

1. $S_i \leftrightarrow S_j$: az i-edik és a j-edik sorok cseréje (oszlopcserénél $O_i \leftrightarrow O_j$).
2. cS_i: az i-edik sor beszorzása c-vel (cO_i).
3. $S_i + cS_j$: a j-edik sor c-szeresének az i-edik sorhoz adása ($O_i + cO_j$).

Az egyenletrendszer megoldásban az együtthatómátrix eddig látott átlós vagy háromszögszerű alakra való hozása lesz a kulcslépés.

2.31. DEFINÍCIÓ (LÉPCSŐS ALAK). *Egy mátrix* lépcsős, *vagy* sorlépcsős alakú, *ha kielégíti a következő két feltételt:*

1. *a csupa* 0*-ból álló sorok (ha egyáltalán vannak) a mátrix utolsó sorai;*
2. *bármely két egymás után következő nem-*0 *sorban az alsó sor elején (legalább eggyel) több* 0 *van, mint a fölötte lévő sor elején.*

A nemnulla sorok első zérustól különböző elemének főelem *(*vezérelem *vagy* pivotelem*), az ilyen elem oszlopának* főoszlop *(*bázisoszlop*) a neve.*

A következő mátrixok lépcsős alakúak:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

[3] Lineáris egyenletrendszerek felírása és megoldása már időszámításunk előtt 300 körül babiloni iratokban szerepelt. Az első századra teszik a kínai Jiǔzhāng Suànshù (tradicionális jelekkel: 九章算術, egyszerűsített jelekkel: 九章算术) című mű megjelenését, mely az előző ezer évben összegyűlt matematikai tudást foglalja össze (címének magyar fordítása „A matematikai művészet kilenc fejezete” vagy „Kilenc fejezet a matematikai eljárásokról” lehet). E műben már a kiküszöbölés (azaz a Gauss-elimináció) néven ismert technikát alkalmazzák lineáris egyenletrendszer megoldására. A két fenti műben szereplő egyenletrendszerek, és további történeti részletek olvashatók a The MacTutor History of Mathematics archive című weboldalon.

Gauss-módszer A *Gauss-módszer*, más néven *Gauss-kiküszöbölés* vagy *Gauss-elimináció* a lineáris egyenletrendszerek megoldásának egy módszere. Lényege, hogy a lineáris egyenletrendszer bővített mátrixát elemi sorműveletekkel lépcsős alakra hozzuk, és abból visszahelyettesítéssel meghatározzuk a megoldás általános alakját. A módszer könnyen algoritmizálható, ha sorban haladunk az oszlopokon. A módszert már használtuk a 2.25. példa első megoldásában.

2.32. példa (Gauss-módszer, egy megoldás). *Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-módszerrel:*

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2x + 2y + 3z &= 2 \\ x + 3y + 3z &= 4 \\ x + 2y + z &= 5 \end{aligned}$$

Megoldás. Írjuk fel az egyenletrendszer bővített mátrixát, és *oszloponként haladva* küszöböljük ki – nullázzuk ki – a főelemek alatti elemeket!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{S_2-2S_1\\ S_3-S_1\\ S_4-S_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{S_4-\frac{1}{2}S_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{S_4-\frac{3}{2}S_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2y + z &= 4 \\ - z &= 2 \end{aligned}$$

A harmadik egyenletből $z = -2$, ezt a másodikba helyettesítve $y = 3$, ezeket az elsőbe helyettesítve kapjuk, hogy $x = 1$, azaz az egyetlen megoldás $(x, y, z) = (1, 3, -2)$. □

Mit csinálunk akkor, ha a lépcsős alak szerint kevesebb a főelemek, mint az oszlopok száma? Egyelőre bevezetünk két elnevezést, melyek jelentése hamarosan világos lesz: az egyenletrendszer azon változóit, melyek főelemek oszlopaihoz tartoznak, *kötött változóknak*, míg az összes többi változót *szabad változónak* nevezzük.

2.33. példa (Gauss-módszer, végtelen sok megoldás). *Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-módszerrel:*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 &= 1 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Írjuk fel az egyenletrendszer bővített mátrixát, és oszloponként haladva küszöböljük ki a főelemek alatti elemeket!

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}1&2&1&2&1&1\\1&2&3&3&1&0\\3&6&7&8&3&1\end{array}\right]\xrightarrow[S_3-3S_1]{S_2-S_1}\left[\begin{array}{ccccc|c}1&2&1&2&1&1\\0&0&2&1&0&-1\\0&0&4&2&0&-2\end{array}\right]\xrightarrow{S_3-2S_2}$$
$$\left[\begin{array}{ccccc|c}1&2&1&2&1&1\\0&0&2&1&0&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]\longrightarrow\begin{aligned}x_1+2x_2+\ x_3+2x_4+x_5&=\ \ 1\\2x_3+\ x_4\qquad&=-1\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer kötött változói a lépcsős alak főoszlopaihoz tartozó változók, azaz x_1 és x_3. A szabad változók: x_2, x_4, x_5. A szabad változóknak tetszőleges értékeket adhatunk, a kötöttek értéke kifejezhető velük. Legyen például a szabad változók értéke $x_2 = s$, $x_4 = t$, $x_5 = u$. Ezek behelyettesítése után a fenti egyenletek közül először a másodikból kifejezzük x_3-at, majd azt behelyettesítjük az elsőbe, ahonnan kifejezzük az x_1-et, azaz a fenti egyenletekből kifejezzük a kötött változókat:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{3}{2}-2s-\frac{3}{2}t-u\\x_3 &= -\frac{1}{2}\qquad\ \ -\frac{1}{2}t\end{aligned}$$

Innen az egyenletrendszer megoldása:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(\frac{3}{2}-2s-\frac{3}{2}t-u,s,-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t,t,u),$$

vagy mátrixjelöléssel

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}-2s-\frac{3}{2}t-u\\s\\-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t\\t\\u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\\0\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{bmatrix}+u\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Később különösen ez utóbbi felírásmód lesz hasznos, melyben vektorok lineáris kombinációja szerepel. □

Világos, hogy e példa utolsó alakjában a szabad változóknak tetszőleges értéket adhatunk, melyből a kötött változók egyértelműen kifejezhetők, és így e módszerrel az egyenletrendszer összes megoldását megkaptuk. Az ilyen módon megadott megoldást az egyenletrendszer *általános megoldásának*, a konkrét paraméterértékekhez tartozó megoldásokat *partikuláris megoldásoknak* nevezzük. Például az előző példabeli egyenletrendszer egy partikuláris megoldása az $s = 0$, $t = 1$, $u = 2$ értékekhez tartozó

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(-2,0,-1,1,2).$$

Kérdés, hogy e módszerrel minden lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza meghatározható-e? A választ a következő tétel adja:

2.34. TÉTEL (LÉPCSŐS ALAKRA HOZÁS). *Bármely mátrix elemi sorműveletekkel* lépcsős *alakra hozható.*

BIZONYÍTÁS. Tekintsünk egy tetszőleges $m \times n$-es mátrixot. A következő eljárás egyes lépéseiben e mátrixnak le fogjuk takarni egy-egy sorát vagy oszlopát. Az egyszerűség kedvéért a letakarás után keletkezett mátrix sorainak és oszlopainak számát ismét m és n fogja jelölni, a_{ij} pedig a letakarások után maradt mátrix i-edik sorának j-edik elemét.

1. Ha az első oszlopban csak 0 elemek állnak, takarjuk le ezt az oszlopot, és tekintsük a maradék mátrixot. Ha ennek első oszlopában ismét csak 0 elemek vannak, azt is takarjuk le, és ezt addig folytassuk, míg egy olyan oszlopot nem találunk, amelyben van nem 0 elem. Ha ilyen oszlopot *nem találunk*, az eljárásnak vége, a mátrix lépcsős alakú.
2. Ha az első oszlop első sorában álló elem 0, akkor cseréljük ki e sort egy olyannal, melynek első eleme nem 0. Így olyan mátrixot kaptunk, amelyben $a_{11} \neq 0$.
3. Tekintsük az i-edik sort $i = 2$-től $i = m$-ig. Ha az i-edik sor első eleme $a_{i1} \neq 0$, akkor az első sor $-a_{i1}/a_{11}$-szeresét adjuk hozzá, azaz hajtsuk végre az $S_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} S_1$ elemi átalakítást. Mivel $a_{i1} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{11} = 0$, ezért e lépés után az a_{11} alatti elemek mind 0-k lesznek.
4. A fenti átalakítás után takarjuk le az első sort és az első oszlopot. Ha ekkor *nem marad* a mátrixban több sor, vége az eljárásnak, a korábban letakart részeket feltárva megkaptuk a lépcsős alakot. Egyébként ugorjunk vissza az 1. lépéshez, és folytassuk az eljárást.

Világos, hogy ez az eljárás véges sok lépésben véget ér, melynek eredményeként eljutunk az eredeti mátrix egy lépcsős alakjához. □

Egy *inhomogén lineáris egyenletrendszerhez tartozó homogén lineáris egyenletrendszeren* azt a homogén egyenletrendszert értjük, melyet az inhomogénből a konstans tagok 0-ra változtatásával kapunk.

2.35. PÉLDA (HOMOGÉN LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA). *Oldjuk meg a 2.33. példabeli egyenletrendszerhez tartozó*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszert.

MEGOLDÁS. Mivel homogén lineáris egyenletrendszerről van szó, a megoldáshoz szükségtelen a bővített mátrixot használni, hisz annak utolsó oszlopa csak nullákból áll, így az elemi sorműveletek közben nem változik. Az együtthatómátrix lépcsős alakja ugyanazokkal a sorműveletekkel megkapható, mint a 2.33. példa megoldásában, azaz

$$\begin{bmatrix}1&2&1&2&1\\1&2&3&3&1\\3&6&7&8&3\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&1&2&1\\0&0&2&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\longrightarrow$$

$$\begin{aligned}x_1+2x_2+x_3+2x_4+x_5&=0\\2x_3+x_4&=0\end{aligned}$$

Innen a megoldás is ugyanúgy kapható meg, sőt, ugyanaz a lineáris kombináció szerepel benne a konstans tagok nélkül:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(-2s-\frac{3}{2}t-u,s,-\frac{1}{2}t,t,u),$$

vagy mátrixjelöléssel

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2s-\frac{3}{2}t-u\\s\\-\frac{1}{2}t\\t\\u\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-\frac{3}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{bmatrix}+u\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

A homogén és inhomogén egyenletrendszerek e példából sejthető kapcsolatára még visszatérünk a 3.16. tételben. □

Az egyenletrendszer megoldása tehát geometriailag egy alakzat implicit alakjából az explicit alak fölírását jelenti:

2.36. PÉLDA (SÍKOK METSZÉSVONALÁNAK MEGHATÁROZÁSA). *Határozzuk meg az alábbi két sík metszésvonalának explicit (paraméteres) alakját!*

$$\begin{aligned}x+y+z&=1\\3x+4y&=2\end{aligned}$$

MEGOLDÁS. A fenti egyenletekkel megadott két sík metszésvonalának meghatározásához, pontosabban a metszésvonal explicit, paraméteres egyenletrendszerének felírásához egyszerűen meg kell oldani a két egyenletből álló egyenletrendszert:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\3&4&0&2\end{array}\right]\xrightarrow{S_2-3S_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&-3&-1\end{array}\right]\longrightarrow\begin{aligned}x+y+z&=1\\y-3z&=-1\end{aligned}$$

Ebből $z=t$ paraméterválasztással $y=-1+3t$ és $x=2-4t$, azaz

$$(x,y,z)=(-4t+2,3t-1,t)=(2,-1,0)+t(-4,3,1),$$

vagy mátrixjelöléssel

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-4\\3\\1\end{bmatrix}.$$ □

Redukált lépcsős alak A visszahelyettesítés lépése kihagyható, ha folytatjuk a kiküszöbölést, mint azt már láttuk a 2.25. példában.

2.37. definíció (Redukált lépcsős alak). *Egy mátrix* redukált lépcsős, *vagy* redukált sorlépcsős alakú, *ha kielégíti a következő feltételeket:*
1. *lépcsős alakú;*
2. *minden főelem egyenlő* 1*-gyel;*
3. *a főelemek oszlopaiban a főelemeken kívül minden elem* 0*;*

A főelemet itt vezéregyesnek *vagy* vezető egyesnek *is szokás nevezni.*

Például a következő mátrixok redukált lépcsős alakúak:

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & -4\\0 & 0 & 1 & 6\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Minden valós, vagy racionális elemű mátrix redukált lépcsős alakra hozható, azonban az egészegyütthatós mátrixok általában nem, ha az egészeken belül akarunk maradni. Azonban az egészegyütthatós mátrixok is redukált lépcsős alakra hozhatók a racionálisok számkörében.

2.38. példa (Redukált lépcsős alakra hozás). *Hozzuk redukált lépcsős alakra a következő mátrixot!*

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\1 & 1 & 2\\2 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

Megoldás. Egy lehetséges megoldás:

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\1 & 1 & 2\\2 & 2 & 4\end{bmatrix} \xrightarrow[S_3-2S_1]{S_2-S_1} \begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\0 & -2 & 2\\0 & -4 & 4\end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}S_2}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & -4 & 4\end{bmatrix} \xrightarrow{S_3+4S_2} \begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow{S_1-3S_2} \begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Egy másik lehetséges megoldás, mely *azonos megoldásra vezet*!

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\1 & 1 & 2\\2 & 2 & 4\end{bmatrix} \xrightarrow{S_1\leftrightarrow S_2} \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\1 & 3 & 0\\2 & 2 & 4\end{bmatrix} \xrightarrow[S_3-2S_1]{S_2-S_1} \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 2 & -2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}S_2}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} \xrightarrow{S_1-S_2} \begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

□

Gauss – Jordan-módszer A *Gauss – Jordan-módszer* (*Gauss – Jordan-kiküszöbölés*, *Gauss – Jordan-elimináció*) a lineáris egyenletrendszerek olyan megoldási módszere, melyben a bővített mátrixot elemi sorműveletekkel *redukált* lépcsős alakra hozzuk. Innen leolvasható a megoldás.

2.39. PÉLDA (GAUSS – JORDAN-MÓDSZER, EGY MEGOLDÁS). *Oldjuk meg a 2.32. példában felírt egyenletrendszert Gauss – Jordan-módszerrel!*

MEGOLDÁS. Felírjuk az egyenletrendszer bővített mátrixát, és a 2.32. példában látott módon eljutunk a lépcsős alakhoz, majd folytatjuk, először beszorozzuk a sorokat a főátlóbeli elem reciprokával, majd a harmadik oszlopot, végül a másodikat kinullázzuk:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{\cdots} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[-S_3]{1/2S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{S_2-\frac{1}{2}S_3 \\ S_1-2S_3}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{S_1-S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 3 \\ z & = & -2 \end{array}$$

Tehát az egyenletrendszer egyetlen megoldása $(x, y, z) = (1, 3, -2)$. □

2.40. PÉLDA (GAUSS – JORDAN-MÓDSZER, VÉGTELEN SOK MEGOLDÁS). *Oldjuk meg a 2.33. példabeli egyenletrendszert Gauss – Jordan-módszerrel!*

MEGOLDÁS. A 2.33. példában eljutottunk egy lépcsős alakig. Az eljárást folytatjuk, míg a redukált lépcsős alakra nem jutunk.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\cdots} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{1/2S_2 \\ S_1-S_2}}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 \quad + \frac{3}{2}x_4 + x_5 & = & \frac{3}{2} \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 \quad & = & -\frac{1}{2} \end{array}$$

Az $x_2 = s$, $x_4 = t$, $x_5 = u$ helyettesítés és az x_1 és x_3 változók kifejezése után a megoldás vektor- és mátrixjelöléssel:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u, s, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, t, u\right),$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$ □

A redukált lépcsős alak egyértelműsége Fontos következményei vannak a következő tételnek:

2.41. TÉTEL (A REDUKÁLT LÉPCSŐS ALAK EGYÉRTELMŰ). *Minden mátrix redukált lépcsős alakra hozható, amely egyértelmű.*

BIZONYÍTÁS. A redukált lépcsős alak létezését már beláttuk, az egyértelműségre indirekt bizonyítást adunk. Tegyük fel, hogy van egy olyan mátrix, mely elemi sorműveletekkel két különböző redukált lépcsős alakra hozható. Jelölje ezeket $\mathbf{R}$ és $\mathbf{S}$. Mivel mindketten ugyanazzal a mátrixszal ekvivalensek, elemi sorműveletekkel egymásba alakíthatóak, vagyis egymással is ekvivalensek. Válasszuk ki oszlopaik közül azt a balról első oszlopot, melyben különböznek, valamint az összes előttük álló vezéroszlopot. Az így kapott mátrixokat jelölje $\hat{\mathbf{R}}$ és $\hat{\mathbf{S}}$. Tehát $\hat{\mathbf{R}} \neq \hat{\mathbf{S}}$, mert különböznek az utolsó oszlopukban. Például, ha

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{9} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

akkor

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & \boxed{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ez az oszlop, melyben különböznek, nem lehet az első oszlop, mert ha az a zérusvektor az egyik mátrixban, akkor a sorekvivalencia miatt a másikban is az lenne, egyébként pedig ez az oszlop mindenképp az első helyen 1-est, alatta 0-kat tartalmaz.

Tekintsük az így kapott $\hat{\mathbf{R}}$, $\hat{\mathbf{S}}$ mátrixokat egy-egy egyenletrendszer bővített együtthatómátrixának. Ezek általános alakja így a következő:

$$\hat{\mathbf{R}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & r_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{vagy} \quad \hat{\mathbf{R}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{és}$$

$$\hat{\mathbf{S}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & s_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{vagy} \quad \hat{\mathbf{S}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Mivel oszlopok kihagyása nem változtat a sorekvivalencián – hisz elemi sorműveletekben műveletet csak egy oszlopon belül végzünk –, ezért az $\hat{\mathbf{R}}$ és $\hat{\mathbf{S}}$ mátrixok ekvivalensek, azaz a hozzájuk tartozó két egyenletrendszernek ugyanaz a megoldása. Ez csak úgy lehet, ha vagy minden $i = 1, \dots, k$ indexre $r_i = s_i$, vagy egyik egyenletrendszer sem oldható meg, azaz mindkét esetben azt kaptuk, hogy $\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{S}}$, ami ellentmondás. Ez bizonyítja, hogy a kiinduló $\mathbf{R} \neq \mathbf{S}$ feltevés helytelen volt, tehát $\mathbf{R} = \mathbf{S}$. (Holzmann[4] bizonyítása alapján.) □

[4] Wolf Holzmann. Uniqueness of reduced row echelon form. `http://www.cs.uleth.ca/~holzmann/notes/reduceduniq.pdf`, 2002

Mivel a redukált lépcsős alak egyértelmű, definiálhatunk egy függvényt, mely minden mátrixhoz annak ezt az alakját rendeli. Az $\operatorname{rref}(\mathbf{A})$ jelölést mi arra a függvényre fogjuk alkalmazni, mely egy $m \times n$-es mátrixhoz a redukált lépcsős alakjának – ellentétben a programnyelvekkel – a zérussorok elhagyásával kapott alakját rendeli. Például

$$\operatorname{rref}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}.$$

Szimultán egyenletrendszerek Gyakori feladat az alkalmazásokban, hogy sok olyan egyenletrendszert kell megoldani, amelyek csak a konstans tagokban térnek el egymástól. A kiküszöböléses módszerekkel ezek egyszerre is megoldhatók alig több erőforrás felhasználásával, mint ami egyetlen egyenletrendszer megoldásához szükséges.

2.42. DEFINÍCIÓ (SZIMULTÁN EGYENLETRENDSZEREK). *Több egyenletrendszer halmazát* szimultán egyenletrendszernek *nevezünk, ha együtthatómátrixaik azonosak.*

2.43. PÉLDA (SZIMULTÁN EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA). *Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket!*

$$\begin{aligned} x+y+z&=3 & u+v+w&=3 & r+s+t&=0\\ 2x+3y+2z&=7 & 2u+3v+2w&=7 & 2r+3s+2t&=0\\ 2x+2y+3z&=6 & 2u+2v+3w&=7 & 2r+2s+3t&=1 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Mivel e három egyenletrendszer együtthatómátrixa azonos, a bal oldal átalakítását elég egyszer elvégezni, a jobb oldalak átalakítását pedig vele együtt. Ehhez a szimultán egyenletrendszerre a következő bővített mátrixot érdemes képezni:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&3&3&0\\2&3&2&7&7&0\\2&2&3&6&7&1\end{array}\right]$$

A megoldáshoz használjuk a Gauss–Jordan-módszert:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 7 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 7 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[S_3-2S_1]{S_2-2S_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[S_1-S_3]{S_1-S_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Ebből leolvasható mindhárom egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

□

► Ha tudjuk, hogy több egyenletrendszerből álló szimultán egyenletrendszerről van szó, mindegyik egyenletrendszerben használhatjuk ugyanazokat a változókat.

► Később látni fogjuk, hogy ha $\mathbf{A}$ invertálható, $\mathbf{B}$ tetszőleges mátrix, és soraik száma azonos, akkor az $[\mathbf{A}|\mathbf{B}]$ redukált lépcsős alakjából leolvasható az $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ mátrix.

*Kiküszöbölés $\mathbb{Z}_p$-ben** Ha p prím, akkor a modulo p maradékosztályok közti műveletek minden olyan tulajdonsággal rendelkeznek, melyet a kiküszöbölés során a valós számok körében használtunk. Ennek következtében a Gauss- és Gauss–Jordan-módszerek minden további nélkül használhatók $\mathbb{Z}_p$ fölötti egyenletrendszerekre is. (Lásd még az 549. oldalon az algebrai testről írtakat.)

2.44. PÉLDA (EGYENLETRENDSZER $\mathbb{Z}_2$ FÖLÖTT). *4-bites kódszavakat küldünk, bitjeit jelölje a, b, c és d. Hibajavító kódot készítünk úgy, hogy minden kódszó végére három paritásbitet teszünk, nevezetesen a $b+c+d$, $a+c+d$ és $a+b+d$ bitet. Az összeadás itt természetesen $\mathbb{Z}_2$ fölött értendő. Például a 0110 kódszó helyett a 0110011 kódszót küldjük. Egy üzenetben az egyik ilyen 7-bites kódszó első 4 bitjét a vevő szerkezet bizonytalanul érzékeli, amit kapunk, az a $(?,?,?,?,1,0,1)$ kódvektor. Mi lehetett az eredeti üzenet, ha az utolsó 3 bit biztosan jó?*

E feladatban definiált kódot $[7,4,3]_2$ bináris *Hamming-kódnak* nevezzük. $16 = 2^4$ kódszóból áll, és bármely két kódszava legalább 3 helyen különbözik, így bármely 5 bit egyértelműen megadja a maradék kettőt. Eszerint legföljebb 2 bithiba felismerhető (jelezhető), és legföljebb 1 bithiba ki is javítható.

MEGOLDÁS. Az a, b, c és d bitek ismeretlenek, melyekre

$$\begin{aligned} b+c+d &= 1 \\ a+\phantom{b+{}}c+d &= 0 \\ a+b+\phantom{c+{}}d &= 1 \end{aligned}$$

Oldjuk meg ezt az egyenletrendszert Gauss–Jordan kiküszöböléssel $\mathbb{Z}_2$ fölött. Ne felejtsük, hogy $\mathbb{Z}_2$-ben $1+1=0$, így $1=-1$, azaz a kivonás nem különbözik az összeadástól.

$$\left[\begin{array}{cccc|c}0&1&1&1&1\\1&0&1&1&0\\1&1&0&1&1\end{array}\right]\xrightarrow{S_1\leftrightarrow S_2}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&1&1&0\\0&1&1&1&1\\1&1&0&1&1\end{array}\right]\xrightarrow{S_3+S_1}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&1&1&0\\0&1&1&1&1\\0&1&1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{S_3+S_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&1&1&0\\0&1&1&1&1\\0&0&0&1&0\end{array}\right]\xrightarrow[S_1+S_3]{S_2+S_3}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&0\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{array}\right]\longrightarrow\begin{aligned}a\quad+c\quad&=0\\b+c\quad&=1\\d&=0\end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből $d = 0$. A szabad változó c, legyen $c = s$. Így a második egyenletből $b = 1 + c$, azaz $b = 1 + s$ és az elsőből $a = c$, azaz $a = s$. A megoldás általános alakban $(a, b, c, d) = (s, 1 + s, s, 0)$, azaz $(a, b, c, d) = (0, 1, 0, 0) + s(1, 1, 1, 0)$. Az $s = 0$ és az $s = 1$ értékekhez tartozó megoldások tehát: $(0, 1, 0, 0)$ és $(1, 0, 1, 0)$.

Ha az egyenletrendszert vektoregyenletnek tekintjük, akkor az első megoldás azt mutatja, hogy az együtthatómátrix második oszlopa megegyezik a jobb oldallal (és valóban), a második megoldás pedig azt, hogy az első és a harmadik oszlop összege a jobb oldalt adja. □

2.45. PÉLDA (EGYENLETRENDSZER $\mathbb{Z}_5$ FÖLÖTT). *Oldjuk meg az alábbi két egyenletrendszert $\mathbb{Z}_5$ fölött.*

$$\begin{aligned}2x+3y&=1\\3x+2y&=4\end{aligned}\qquad\begin{aligned}2x+3y&=1\\3x+4y&=3\end{aligned}$$

MEGOLDÁS. A számolás megkönnyítésére vagy készítsünk osztási táblát, vagy használjuk az 548. oldalon található A.5. ábra szorzástábláját.

$$\left[\begin{array}{cc|c}2&3&1\\3&2&4\end{array}\right]\xrightarrow{3S_1}\left[\begin{array}{cc|c}1&4&3\\3&2&4\end{array}\right]\xrightarrow{S_2-3S_1}\left[\begin{array}{cc|c}1&4&3\\0&0&0\end{array}\right],$$

azaz az egyenletrendszernek több megoldása van. Itt ez nem azt jelenti, hogy végtelen sok, hanem azt, hogy legalább egy paraméter végigfut $\mathbb{Z}_5$ összes elemén. Szabad változó az y, legyen $y = s$, így $x = 3 - 4s = 3 + s$, tehát $(x, y) = (3 + s, s)$, azaz a vektorok mátrixjelölésével:

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad s\in\mathbb{Z}_5$$

Mivel $\mathbb{Z}_5$-nek öt eleme van, ezért s-nek is ennyi értéke lehet, azaz az első egyenletrendszer összes megoldása $(3, 0)$, $(4, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 4)$. A másik egyenletrendszer megoldása:

$$\left[\begin{array}{cc|c}2&3&1\\3&4&3\end{array}\right]\xrightarrow{3S_1}\left[\begin{array}{cc|c}1&4&3\\3&4&3\end{array}\right]\xrightarrow{S_2-3S_1}\left[\begin{array}{cc|c}1&4&3\\0&2&4\end{array}\right]\xrightarrow{3S_2}\left[\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&2\end{array}\right].$$

Így a megoldás $(x, y) = (0, 2)$. □

Feladatok

Mátrix lépcsős és redukált lépcsős alakja

2.26• Lépcsős alak: igaz – hamis Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

a) Egy mátrix minden lépcsős alakjában ugyanannyi nemzérus sor van.

b) Egy mátrix minden lépcsős alakjában ugyanannyi főoszlop (bázisoszlop) van.

c) Minden valós mátrixnak van lépcsős alakja, ami egyértelmű.

d) Különböző mátrixoknak különböző a redukált lépcsős alakjuk.

e) Ha egy mátrix elemi sorműveletekkel egy másikba vihető, akkor redukált lépcsős alakjuk megegyezik.

Határozzuk meg valamely lépcsős alakját, majd a redukált lépcsős alakját az alábbi mátrixoknak!

2.27. $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2.28. $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2.29• A három elemi sorművelet egyike elvégezhető a másik kettő segítségével is. Melyik és hogyan?

Egyenletrendszer megoldása Gauss-módszerrel

Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket Gauss-módszerrel!

2.30. $$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=1\\ x_2+x_3+x_4&=2\\ x_3+x_4+x_5&=2\\ x_4+x_5+x_1&=1 \end{aligned}$$

2.31. $$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=4\\ -x_1+x_2-x_3&=2\\ 2x_1+x_2+2x_3&=1\\ 4x_1+4x_2+4x_3&=1 \end{aligned}$$

2.32• $$\begin{aligned} 7x+14y-21z&=7\\ x+2y-3z&=1\\ 5x+10y+15z&=5\\ 3x+6y-9z&=3 \end{aligned}$$

2.33. $$\begin{aligned} x+3y+z&=1\\ 2x+7y+2z&=0\\ x+4y+4z&=1\\ x+4y+z&=-1\\ 4x+15y+10z&=2 \end{aligned}$$

2.34. $$\begin{aligned} x+y&=4\\ 3x-y&=2\\ -3x+5y&=2\\ x+2y&=1 \end{aligned}$$

2.35. $$\begin{aligned} x_1+x_2+4x_4&=3\\ x_2-x_3+3x_4&=1\\ x_1-2x_2+3x_3-5x_4&=0\\ 3x_1-x_2+4x_3&=5 \end{aligned}$$

Egyenletrendszer megoldása Gauss–Jordan-módszerrel

2.36. Oldjuk meg az alábbi szimultán egyenletrendszereket!

a) $\begin{cases} 2x+y=1\\ 5x+3y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+y=0\\ 5x+3y=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y=2\\ 4x+2y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+y=2\\ 4x+2y=4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+z=1\\ x+2y+3z=4\\ x+2y+2z=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+z=0\\ x+2y+3z=5\\ x+2y+2z=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+z=1\\ x+2y+3z=4\\ x+2y+z=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+z=1\\ x+2y+3z=5\\ x+2y+z=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+z=0\\ x+2y+3z=6\\ x+2y+z=2 \end{cases}$

Egyenletrendszerek

2.37• Egyenletrendszerek: igaz – hamis Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

a) A bővített mátrixon végrehajtott elemi sorműveletek közben az egyenletrendszer megoldáshalmaza nem változik.

b) Egy lineáris egyenletrendszer nem konzisztens, ha több egyenletből áll, mint ahány ismeretlenes.

c) Ha egy valósegyütthatós lineáris egyenletrendszernek van két különböző megoldása, akkor végtelen sok is van.

d) Egy homogén lineáris egyenletrendszer mindig konzisztens.

Ekvivalensek-e az alábbi egyenletrendszerek?

2.38. $\begin{cases} 3x+2y-2z=1\\ 2x+3y-3z=-1\\ 4x+2y=8 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+2y-2z=0\\ 3x+3y-2z=3\\ 5x-3y+2z=5 \end{cases}$

2.39. $\begin{cases} 2x+3y+5z=0 \\ 3x+2y+2z=3 \\ 5x \phantom{{}+2y} -4z=9 \end{cases}$ $\begin{cases} x-y-3z=3 \\ 5x+5y+7z=3 \end{cases}$

2.40. Csak egész számokkal számolva megoldható-e az az egyenletrendszer, melynek bővített mátrixa a következő:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & 3 & 7 \\ 11 & 7 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & 3 & 7 \\ 11 & 7 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

2.41. Egy legalább 2-ismeretlenes lineáris egyenletrendszerről annyit tudunk, hogy egyértelműen megoldható, és hogy bővített mátrixának elemei sorfolytonosan olvasva számtani sorozatot adnak. Mi a megoldása?

2.42. Lineárisra visszavezethető egyenletrendszerek Oldjuk meg az alábbi, nem lineáris egyenletrendszereket!

a) $\begin{aligned} 2\sqrt{x}+2\sqrt{y}&=8 \\ 3\sqrt{x}+\sqrt{y}&=4 \end{aligned}$ *b)* $\begin{aligned} 2x^3+2y^2&=8 \\ 3x^3+y^2&=4 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2e^x+2e^y&=8 \\ 3e^x+e^y&=4 \end{aligned}$ *d)* $\begin{aligned} 2\cos x+2\cos y&=8 \\ 3\cos x+\cos y&=4 \end{aligned}$

2.43. Egyenletrendszer pozitív egész megoldásokkal Egy érmegyűjteményben régi 1, 5 és 10Ft-osok vannak, összesen 11 darab, 53Ft összértékben. Melyik érméből hány darab van?

Megoldás a gyakorlatban

Bár e szakasz tartalma elsősorban nem a lineáris algebra, hanem a numerikus analízis témakörébe tartozik, ismerete elengedhetetlen annak, aki a gyakorlatban lineáris algebrai eszközöket alkalmaz. Először a Gauss- és Gauss–Jordan-kiküszöbölés műveletigényét, majd numerikus megbízhatóságának kérdését vizsgáljuk. Ezután az iterációs módszerek lényegét vázoljuk, melyek alkalmazásakor az együtthatómátrix nem változik, így a számítási hibák sem halmozódnak. Ráadásul e módszerek a ritka mátrixokat sem „rontják el”, mint a Gauss-módszer, mely sok zérust írhat felül.

A kiküszöbölés műveletigénye Ahhoz, hogy a lineáris egyenletrendszerek különböző megoldási módszereit össze tudjuk hasonlítani, azt is tudnunk kell, mennyi a műveletigényük. A flop mértékegységről részletesen a függelékben írunk az 554. oldalon.

2.46. tétel (A kiküszöbölés műveletigénye). *A Gauss- és a Gauss–Jordan-módszer műveletigénye egy n-ismeretlenes, n egyenletből álló egyenletrendszer esetén egyaránt*

$$\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}-\frac{5n}{6} \text{ összeadás/kivonás, } \frac{n^3}{3}+n^2-\frac{n}{3} \text{ szorzás/osztás.}$$

azaz összesen

$$\frac{2}{3}n^3+\frac{3}{2}n^2-\frac{7}{6}n \text{ flop,}$$

azaz jó közelítéssel $2n^3/3$ flop.

Bizonyítás. Először felelevenítünk két elemi összefüggést, amire a bizonyításban szükség van:

$$\begin{aligned} 1+2+\ldots+n &= \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n, \\ 1^2+2^2+\ldots+n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n. \end{aligned}$$

A továbbiakban feltételezzük, hogy a kiküszöbölés során a főátlóba kerülő elemek egyike sem 0. A Gauss-módszernél a főátló alatti elemek eliminálásához $\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{3}n$ összeadás és $\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2-\frac{5}{6}n$ szorzás szükséges. A visszahelyettesítés $\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$ összeadásból és $\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$ szorzásból áll. Ha a Gauss–Jordan-módszernél a főátló alatti elemek kiküszöbölése mellett a főátló elemeit is 1-re változtatjuk, az $\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{3}n$ összeadás mellett $\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$ szorzás szükséges. A főátló feletti elemek eliminálásához $\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$ összeadás és ugyanennyi szorzás kell. A számítások részletezését az olvasóra hagyjuk. □

Numerikusan instabil egyenletrendszerek A gyakorlati feladatokban gyakran mérési eredményekkel, így nem pontos adatokkal dolgozunk.

2.47. PÉLDA (INSTABIL EGYENLETRENDSZER). *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!*

$$\begin{aligned} 6.73x - 8.97y &= 5.61 \\ 4.79x - 6.39y &= 3.99 \end{aligned}$$

Mutassuk meg, hogy az együtthatók 0.01*-dal való megváltoztatása a megoldások nagy megváltozását okozhatja, sőt az is elérhető, hogy az egyenletrendszernek ne legyen, vagy épp végtelen sok megoldása legyen!*

MEGOLDÁS. Az egyenletrendszer megoldása: $x = 1.5$, $y = 0.5$. Az első egyenletben az x együtthatóját változtassuk 6.72-re. Ekkor az egyenletrendszer megoldása $x \approx -2.26$, $y \approx -2.32$. Ezután változtassuk az y együtthatóját -8.96-ra. Ekkor a megoldás $x \approx 4.35$, $y \approx 2.64$. Ha végül az első egyenlet konstans tagját is megváltoztatjuk egy századdal 5.62-re, akkor $x \approx 7.21$, $y \approx 4.78$ lesz az eredmény, ha pedig 5.60-ra, akkor – csemegeként – ismét a kerek $x = 1.5$, $y = 0.5$ értékeket kapjuk.

A fenti egyenletrendszeren tovább változtatva az együtthatókat az is elérhető, hogy végtelen sok megoldása legyen:

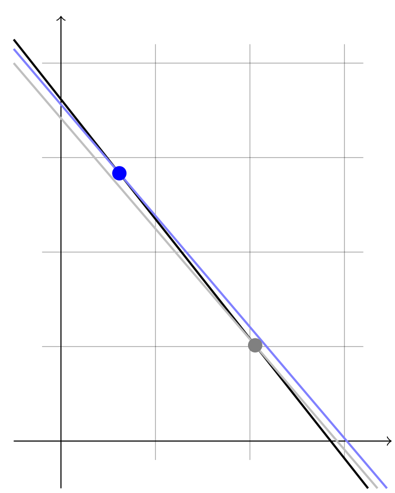
$$\begin{aligned} 6.72x - 8.96y &= 5.60 \\ 4.80x - 6.40y &= 4.00 \end{aligned}$$

ugyanis itt a két egyenlet egymás konstansszorosa. Ha pedig a második egyenlet konstans tagját visszaírjuk 3.99-re, egy ellentmondó egyenletrendszert kapunk. □

Ilyen megbízhatatlan eredmények a gyakorlatban használhatatlanok! Az olyan egyenletrendszert, melyben az együtthatók vagy a konstans tagok kis változása a megoldásban nagy változást okoz, *numerikusan instabilnak* vagy *rosszul kondicionáltnak* nevezzük. Egyébként *numerikusan stabil*, illetve *jól kondicionált* egyenletrendszerről beszélünk.

Világos, hogy a fentiek nem precíz matematikai fogalmak, de adható a kondicionáltság fokát mérő szám. Az azonban, hogy egy adott egyenletrendszer megoldásai elfogadhatóak-e vagy nem, csak a feladat döntheti el.

A numerikus instabilitás okát szemlélteti a 2.12. ábra. Kétváltozós egyenletrendszerek esetén, ha a két egyenes grafikonja „közel” van egymáshoz, azaz majdnem egybe esnek, akkor kis változások az egyeneseken messze vihetik a metszéspontot, de párhuzamossá is tehetik a két egyenest.



2.12. ábra: Instabil egyenletrendszer, melyben az egyenletek együtthatóinak kis megváltoztatása a megoldás nagy megváltozását okozza.

Ha a gyakorlatban numerikusan instabil egyenletrendszerrel találkozunk, vizsgáljuk meg, hogy az egyenleteink közti „majdnem” lineáris összefüggőség mögött nem valódi lineáris összefüggőség van-e kis mérési hibával.

Részleges főelem-kiválasztás A következőkben lebegőpontos aritmetikát használunk. A számításokat úgy végezzük el, hogy az adott pontosságnak megfelelően minden részeredményt p értékes jegyre kerekítünk.

2.48. PÉLDA (GAUSS-MÓDSZER LEBEGŐPONTOS SZÁMOKKAL). *Oldjuk meg az alábbi – numerikusan stabil – egyenletrendszert pontosan, majd 3 értékes jegy pontossággal számolva.*

$$\begin{aligned} 10^{-4}x + y &= 2 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Pontosan számolva

$$\left[\begin{array}{rr|r} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{S_2 - 10^4 S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 0 & -1-10^4 & -2\cdot 10^4 \end{array}\right]$$

amiből az eredmény $x = y = \frac{2\cdot 10^4}{1+10^4}$. Igazolható, hogy az egyenletrendszer numerikusan stabil, ami azt jelenti, hogy például 10^{-4} helyébe 0-t helyettesítve, vagyis kicsit változtatva egy együtthatót, a kapott

$$\left[\begin{array}{rr|r} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

egyenletrendszer megoldása csak kicsit különbözik az előzőtől: $x = y = 2$. Végezzük most el a Gauss-kiküszöbölést 3 értékes jeggyel számolva:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{S_2 - 10^4 S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 0 & -1-10^4 & -2\cdot 10^4 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 0 & -10^4 & -2\cdot 10^4 \end{array}\right],$$

ahol a közelítésnél a $\mathrm{fl}(-1-10^4) = -10^4$ összefüggést használtuk. Az így kapott egyenletrendszernek viszont $x = 0$, $y = 2$ a megoldása, ami nagyon messze van az eredeti egyenletrendszer megoldásától! Most végezzünk egy apró változtatást: először cseréljük fel a két egyenletet!

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0 \\ 10^{-4} & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{S_2 - 10^{-4} S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1+10^{-4} & 2 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

amelynek megoldása $x = y = 2$, ami nagyon közel van a pontos megoldáshoz! Mi az oka a két megoldás közti különbségnek? □

Mindkét megoldásban az első egyenlet konstansszorosát hozzáadtuk a második egyenlethez, de az első esetben az első oszlop kisebb, a másodikban az nagyobb elemét választottuk főelemnek. Amikor a kisebbet választottuk, akkor az első sort egy kis számmal osztottuk, vagyis repciprokával – egy nagy számmal – szoroztuk, és ezt adtuk a második sorhoz. A nagy számmal való beszorzás következtében a második egyenlet együtthatóit „elnyomták” e nagy számok, nagyon megváltoztatva az egyenletet, aminek következtében a megoldások is nagyon megváltoztak! A $\mathrm{fl}(-1-10^4) = -10^4$ kerekítés hatása, vagyis a -1 „eltüntetése”, ekvivalens azzal, mintha az eredeti egyenletrendszer helyett a következőt kéne megoldani:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10^{-4} & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ennek valóban $x = 0$, $y = 2$ a megoldása! Amikor az első oszlop nagyobbik elemét választottuk főelemnek, a sort egy kis számmal kellett szorozni, és ezt hozzáadni a másik sorhoz, vagyis az egyenletrendszer kevésbé torzult. Ennek alapján megfogalmazható egy széles körben elterjedt szabály: a Gauss-féle kiküszöbölési eljárás során, lebegőpontos adatokkal dolgozva minden oszlopban a szóbajöhető elemek közül – sorcserék segítségével – mindig a legnagyobb abszolút értékűt válasszuk főelemnek! E módszert *részleges főelem-kiválasztásnak*, illetve *részleges pivotálásnak* nevezzük. (Bizonyos esetekben jobb eredmény kapható a *teljes főelem-kiválasztás* módszerével, amikor főelemnek az összes még hátralévő elem abszolút értékben legnagyobbikát választjuk. Ez az eljárás műveletigényesebb, ritkán alkalmazzák.)

2.49. PÉLDA (RÉSZLEGES FŐELEM-KIVÁLASZTÁS). *Részleges főelem-kiválasztással hozzuk lépcsős alakra az alábbi mátrixot!*

$$\begin{bmatrix} 1.8 & 3.0 & 3.0 & 3.7 & 7.5 \\ 3.6 & 3.2 & 3.6 & 6.2 & 7.8 \\ 7.2 & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 2.4 & 5.4 & 5.2 & 2.6 & 5.2 \end{bmatrix}$$

MEGOLDÁS. Az első oszlop legnagyobb eleme a harmadik sorban van, így az első és a harmadik sor cseréjével kezdünk:

$$\xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_3} \begin{bmatrix} \mathbf{7.2} & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 3.6 & 3.2 & 3.6 & 6.2 & 7.8 \\ 1.8 & 3.0 & 3.0 & 3.7 & 7.5 \\ 2.4 & 5.4 & 5.2 & 2.6 & 5.2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{S_2 - S_1/2 \\ S_3 - S_1/4 \\ S_4 - S_1/3}} \begin{bmatrix} \mathbf{7.2} & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 0.0 & 1.4 & 1.2 & 5.0 & 7.2 \\ 0.0 & 2.1 & 1.8 & 3.1 & 7.2 \\ 0.0 & \mathbf{4.2} & 3.6 & 1.8 & 4.8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_4} \begin{bmatrix} \mathbf{7.2} & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 0.0 & \mathbf{4.2} & 3.6 & 1.8 & 4.8 \\ 0.0 & 2.1 & 1.8 & 3.1 & 7.2 \\ 0.0 & 1.4 & 1.2 & 5.0 & 7.2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{S_3 - S_2/2 \\ S_4 - S_2/3}} \begin{bmatrix} \mathbf{7.2} & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 0.0 & \mathbf{4.2} & 3.6 & 1.8 & 4.8 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.2 & 4.8 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & \mathbf{4.4} & 5.6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{S_3 \leftrightarrow S_4} \begin{bmatrix} \mathbf{7.2} & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 0.0 & \mathbf{4.2} & 3.6 & 1.8 & 4.8 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & \mathbf{4.4} & 5.6 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.2 & 4.8 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_4 - S_3/2} \begin{bmatrix} \mathbf{7.2} & 3.6 & 4.8 & 2.4 & 1.2 \\ 0.0 & \mathbf{4.2} & 3.6 & 1.8 & 4.8 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & \mathbf{4.4} & 5.6 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & \mathbf{2.0} \end{bmatrix}$$ □

Skálázás A részleges főelem-kiválasztásban az oszlop legnagyobb elemét választottuk. Mi történik, ha a mátrix egy sorát beszorozzuk egy skalárral? Nem rontja el a módszert?

2.50. PÉLDA (SOR SZORZÁSA). *A 2.48. példában szorozzuk meg az első egyenletet* 10^5*-nel, azaz a kisebb elemből csináljunk nagyot, és ezt az egyenletrendszert is oldjuk meg részleges főelem-kiválasztással.*

$$\begin{aligned} 10x + 10^5 y &= 2 \cdot 10^5 \\ x - \quad y &= \quad 0 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Egy egyenlet beszorzása egy nemzérus számmal ekvivalens átalakítás, így ennek az egyenletrendszernek is $x = y = \frac{2\cdot 10^4}{1+10^4}$ a pontos megoldása. Ha 3 értékes jegyre számolunk, és alkalmazzuk a részleges főelem-kiválasztás módszerét, akkor ismét rossz eredményt kapunk:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10 & 10^5 & 2\cdot 10^5 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{S_2 - \frac{1}{10}S_1} \left[\begin{array}{cc|c} 10 & 10^5 & 2\cdot 10^5 \\ 0 & -1-10^4 & -2\cdot 10^4 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cc|c} 10 & 10^5 & 2\cdot 10^5 \\ 0 & -10^4 & -2\cdot 10^4 \end{array}\right],$$

amiből $x = 0$ és $y = 2$. □

Hasonlóképp zavart okozhat az együtthatómátrix egy oszlopának beszorzása is, ami az egyenletrendszeren például úgy valósítható meg, ha egyik változó mértékegységét megváltoztatjuk. (Ha például a korábban kilométerben meghatározott ismeretlent milliméterben keressük, együtthatóját minden egyenletben 10^6-nal kell osztani.)

Az együtthatók ilyen „egyenetlenségeiből” származó számítási hibák csökkentésére a *skálázás* nevű gyakorlati módszer ajánlható. Ez a következő két skálázási szabály követéséből áll, mely a tapasztalatok szerint a gyakorlati feladatok nagy részében nagyon jó eredményt ad a részleges főelem-kiválasztással együtt alkalmazva:

1. *Oszlopok skálázása:* Válasszunk a feladatban szereplő mennyiségeknek természetes mértékegységet, ezzel általában elkerülhetők az együtthatók közti tetemes nagyságrendi különbségek. Ezen kívül nincs szükség az oszlopok elemeinek beszorzására.
2. *Sorok skálázása:* Az egyenletrendszer $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ bővített mátrixának minden sorát osszuk el az $\mathbf{A}$ együtthatómátrix adott sorbeli legnagyobb abszolút értékű elemével. Így $\mathbf{A}$ minden sorának 1 a legnagyobb eleme.

Nem ismeretes olyan módszer, mely a lebegőpontos ábrázolás korlátai mellett hatékonyan megtalálná a lehető legpontosabb eredményt. Az elmélet és a tapasztalatok alapján sűrű, nem túlzottan nagy méretű egyenletrendszerekre a skálázott főelem kiválasztásos Gauss-módszer ajánlható. A ritka együtthatómátrixú egyenletrendszerekre az iteratív módszerek általában jobb eredményt adnak.

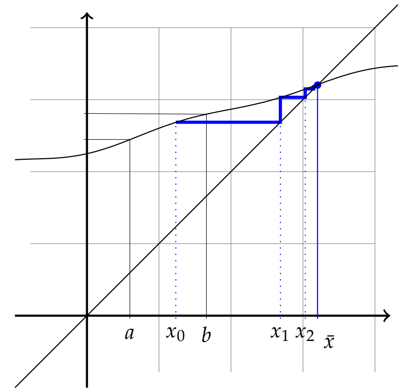
Iteratív módszerek Az iteratív módszerek lényege, hogy olyan

$$\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k, \dots$$

vektorsorozatot generálunk, mely az adott egyenletrendszer megoldásvektorához konvergál (a felső index itt nem hatványozást jelent!). Első pillanatra meglepőnek tűnhet végtelen sorozattal keresni a megoldást, de mivel számításaink eleve csak véges pontosságúak, gyakran igen kevés lépésben elérhetjük a megkívánt pontosságot. Ráadásul a kerekítési hibák még növelhetik is a konvergencia sebességét.

Az alapgondolat – a matematika több más területén is gyümölcsöző módszer – a fixpontkeresés. Ennek lényegét először egy egyváltozós függvény példáján mutatjuk be. Legyen f egy minden valós helyen értelmezett függvény, mely bármely két a és b pontot két olyan pontba visz, melyek távolsága a és b távolságának legföljebb a fele. Képletben:

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}|b - a|, \text{ azaz } \frac{|f(b) - f(a)|}{|b - a|} \leq \frac{1}{2}.$$



2.13. ábra: Egy függvény, mely bármely a és b pontot két olyan pontba visz, melyek távolsága a és b távolságának legföljebb a fele, így a függvény minden különbségi hányadosa abszolút értékben legföljebb 1/2. E függvénynek pontosan egy fixpontja van, mely megkapható egy tetszőleges x_0 pontból induló $x_k = f(x_{k-1})$ sorozat határértékeként.

Ez azt jelenti, hogy f összes különbségi hányadosa legfeljebb 1/2. A sokkal általánosabban megfogalmazható Banach-féle fixpont tétel szerint ekkor egyetlen olyan $\bar{x}$ pont létezik, hogy $\bar{x} = f(\bar{x})$, és ez megkapható úgy, hogy egy tetszőleges x_0 pontból kiindulva képezzük az

$$x_0,\ x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1), \dots,\ x_{k+1} = f(x_k), \dots$$

sorozatot, és vesszük a határértékét. Ekkor

$$\bar{x} = \lim_{k \to \infty} x_k.$$

A 2.13. ábra szemlélteti a fenti állítást. Az 1/2-es szorzó kicserélhető tetszőleges 0 és 1 közé eső q konstansra.

A Banach fixponttétel – nem a legáltalánosabb formájában – $\mathbb{R}^n$-ben a következőképpen szól:

2.51. TÉTEL (BANACH-FÉLE FIXPONTTÉTEL). *Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$* kontrakció, *azaz olyan függvény, hogy bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorra*

$$d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \leqslant q d(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

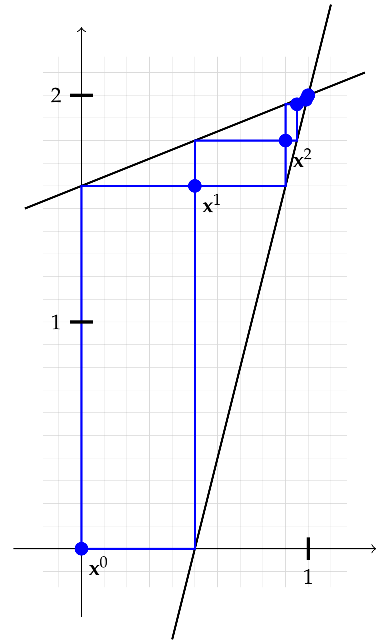
ahol $0 < q < 1$ adott konstans. Ekkor pontosan egy olyan $\bar{\mathbf{x}}$ vektor van, melyre $f(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{x}}$, azaz f-nek pontosan egy fixpontja van. Ez megkapható a $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^k = \bar{\mathbf{x}}$ határértékkel, ahol $\mathbf{x}^0$ tetszőleges és $\mathbf{x}^{k+1} = f(\mathbf{x}^k)$.

Képzeljük el, hogy egy nagyobb gumilapot néhányan körbeállva egy kerek asztal tetején széthúznak az asztal széléig, majd (most jön a leképezés!) visszaengedik eredeti állapotába. Ekkor igaz az, hogy az asztalon pontosan egy olyan pont van, mely fölött a gumilap helyben marad. E pont megkapható, ha kiválasztunk az asztalon egy tetszőleges P_0 pontot, és megnézzük, hogy a kinyújtott gumilap e fölötti pontja összehúzódáskor hová ugrik, legyen ez a P_1 pont az asztalon. A kinyújtott gumilap P_1 fölötti pontja összehúzódáskor az P_2 pont fölé ugrik, stb. Az így kapott pontsorozat a fixponthoz konvergál.

A bizonyítás a Cauchy-sorozatok konvergenciájára épül, itt nem részletezzük. $\mathbb{R}^2$ esetén egyszerű szemléltetés adható a tételre, ami megtalálható a széljegyzetben.

A Banach-tételt úgy fogjuk használni az egyenletrendszerek megoldásánál, hogy a változókat átrendezve az egyenletrendszer $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$ alakú legyen, ahol $\mathbf{x}$ jelöli az ismeretlenek vektorát. A továbbiakban négyzetes együttható-mátrixú egyenletrendszerekkel foglalkozunk.

Jacobi-iteráció Az iteráció arra épül, hogy a k-adik egyenletből kifejezzük a k-adik változót, ebből kapjuk az $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$ alakot.



2.14. ábra: A Jacobi-iteráció szemléltetése

2.52. PÉLDA (JACOBI-ITERÁCIÓ). *Oldjuk meg a*

$$\begin{aligned} 4x - y &= 2 \\ 2x - 5y &= -8 \end{aligned}$$

egyenletrendszert Jacobi-iterációval, 3 tizedes pontossággal számolva.

MEGOLDÁS. Az egyenletrendszert kiküszöböléssel megoldva kapjuk, hogy $\mathbf{x} = (1, 2)$ az egyetlen megoldás.

Hozzuk az egyenletrendszert $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$, azaz $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] = f(\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right])$ alakra. Az első egyenletből fejezzük ki az x-et, a másodikból y-t:

$$x = \frac{y+2}{4}, \quad y = \frac{2x+8}{5}.$$

Válasszunk egy $\mathbf{x}^0$ vektort tetszőlegesen, legyen pl. $\mathbf{x}^0 = (0, 0)$, azaz $x = y = 0$. A fenti képletekbe helyettesítve kapjuk, hogy $\mathbf{x}^1 = (\frac{0+2}{4}, \frac{0+8}{5}) = (0.5, 1.6)$. A további értékeket egy táblázatban adjuk meg:

	$\mathbf{x}^0$	$\mathbf{x}^1$	$\mathbf{x}^2$	$\mathbf{x}^3$	$\mathbf{x}^4$	$\mathbf{x}^5$	$\mathbf{x}^6$	$\mathbf{x}^7$	$\mathbf{x}^8$
x	0	0.5	0.9	0.95	0.99	0.995	0.999	1.000	1.000
y	0	1.6	1.8	1.96	1.98	1.996	1.998	2.000	2.000

E példa esetén tehát a végtelen sorozat konvergensnek mutatkozott, de a kerekítési hiba folytán véges sok lépés után megtalálta a konvergenciapontot. □

Az általános eset hasonlóan írható le. Tegyük fel, hogy az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\ \ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

egyenletrendszer egyértelműen megoldható, és főátlójának minden eleme különbözik 0-tól. A *Jacobi-iteráció* menete tehát a következő. A k-adik egyenletből fejezzük ki az x_k változót:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 \qquad\qquad - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1,n-1}x_{n-1} - a_{1n}x_n) \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 \qquad\qquad - \ldots - a_{2,n-1}x_{n-1} - a_{2n}x_n) \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1} \qquad\qquad). \end{aligned} \tag{2.23}$$

Válasszunk az ismeretlenek $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektorának egy $\mathbf{x}^0$ kezdőértéket, pl. legyen $\mathbf{x}^0 = (0, 0, \ldots, 0)$. A (2.23) egyenletrendszer jobb oldalába helyettesítsük be $\mathbf{x}^0$ koordinátáinak értékét, a bal oldal adja $\mathbf{x}^1$ koordinátáit. Ezt a lépést ismételjük meg, generálva az $\mathbf{x}^2$, $\mathbf{x}^3$,... vektorokat addig, míg el nem érjük a megfelelő pontosságot.

Gauss – Seidel-iteráció A Jacobi-iteráció gyorsasága növelhető, ha a (2.23) minden egyenletének jobb oldalába azonnal a már kiszámolt változók új értékeit helyettesítjük. Ezt az algoritmust *Gauss – Seidel-iterációnak* nevezzük.

A kétismeretlenes

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

egyenletrendszer esetén a Jacobi-iterációnál használt

$$x_{k+1} = \frac{b_1 - a_{12}y_k}{a_{11}}, \quad y_{k+1} = \frac{b_2 - a_{21}x_k}{a_{22}} \tag{2.24}$$

képletek helyett, a Gauss – Seidel-iteráció az

$$x_{k+1} = \frac{b_1 - a_{12}y_k}{a_{11}}, \quad y_{k+1} = \frac{b_2 - a_{21}x_{k+1}}{a_{22}} \tag{2.25}$$

képleteket használja.

2.53. PÉLDA (GAUSS – SEIDEL-ITERÁCIÓ). *Oldjuk meg a*

$$\begin{aligned} 4x - y &= 2 \\ 2x - 5y &= -8 \end{aligned}$$

egyenletrendszert Gauss – Seidel-iterációval.

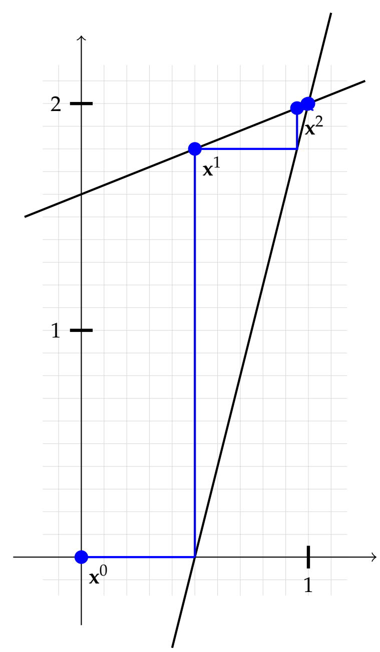
MEGOLDÁS. A Gauss – Seidel-iterációnál a sorozatot a

$$x_{k+1} = \frac{2 + y_k}{4}, \quad y_{k+1} = \frac{8 + 2x_{k+1}}{5}$$

formulák generálják. A kiszámolt értékeket táblázatban adjuk meg de úgy, hogy jelezzük a kiszámítás sorrendjét (néhány lépést fejben ellenőrizzünk):

	$\mathbf{x}^0$	$\mathbf{x}^1$	$\mathbf{x}^2$	$\mathbf{x}^3$	$\mathbf{x}^4$
x	0	0.5	0.95	0.995	1.000
y	0	1.8	1.98	1.998	2.000

Hasonlítsuk össze az eredményt a Jacobi iterációnál készített táblázattal. A megoldás szemléltetése a 2.15. ábrán látható. □



2.15. ábra: A Gauss – Seidel-iteráció szemléltetése

Az iterációk konvergenciája Vajon a Jacobi- és a Gauss – Seidel-iterációk mindig konvergens sorozatot adnak-e, ha az egyenletrendszer egyértelműen megoldható? A válasz: nem, de bizonyos – egyszerűen ellenőrizhető, és kikényszeríthető – feltételek fennállása esetén igen.

2.54. PÉLDA (DIVERGENS ITERÁCIÓ). *Oldjuk meg Jacobi- és Gauss – Seidel-iterációval a következő egyenletrendszert:*

$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ 2x - y &= 5 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Alakítsuk át az egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x &= y + 2 \\ y &= 2x - 5 \end{aligned}$$

Először próbálkozzunk Jacobi-iterációval:

	$\mathbf{x}^0$	$\mathbf{x}^1$	$\mathbf{x}^2$	$\mathbf{x}^3$	$\mathbf{x}^4$	$\mathbf{x}^5$	$\mathbf{x}^6$	$\mathbf{x}^7$	$\mathbf{x}^8$
x	0	2	-3	1	-9	-1	-21	-5	-45
y	0	-5	-1	-11	-3	-23	-7	-47	-15

Úgy tűnik, nem konvergens a vektorsorozat, mint ahogy nem tűnik annak a Gauss – Seidel-iterációnál sem:

	$\mathbf{x}^0$	$\mathbf{x}^1$	$\mathbf{x}^2$	$\mathbf{x}^3$	$\mathbf{x}^4$	
x	0	2	1	-1	-5	-13
y	0	-1	-3	-7	-15	-31

A divergencia leolvasható az iterációkat szemléltető ábrákról is! □

2.55. DEFINÍCIÓ (SORONKÉNT DOMINÁNS FŐÁTLÓJÚ MÁTRIX). *Azt mondjuk, hogy az $n \times n$-es* $\mathbf{A}$ *mátrix* soronként (szigorúan) domináns főátlóval rendelkezik, *vagy* soronként (szigorúan) domináns főátlójú, *ha a főátló minden eleme abszolút értékben nagyobb a sorában lévő többi elem abszolút értékeinek összegénél, azaz képletben*

$$\begin{array}{rcccccc}
|a_{11}| > & & & |a_{12}| + \ldots + |a_{1,n-1}| + & |a_{1n}| \\
|a_{22}| > & |a_{21}| & & + \ldots + |a_{2,n-1}| + & |a_{2n}| \\
\vdots & & & \ddots & \vdots \\
|a_{n-1,n-1}| > & |a_{n-1,1}| + & |a_{n-1,2}| + \ldots & & + |a_{n-1,n}| \\
|a_{nn}| > & |a_{n1}| + & |a_{n2}| + \ldots + |a_{n,n-1}| & &
\end{array}$$

Hasonlóan definiálható az oszloponként domináns főátlójú mátrix.

Világos, hogy az alábbi mátrixok soronként domináns főátlójúak:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -10 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -1 & -2 & 10 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & .25 & .25 & .25 \\ .25 & 1 & .25 & .25 \\ .25 & .25 & 1 & .25 \\ .25 & .25 & .25 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az alábbi mátrixok nem soronként domináns főátlójúak, de sorcserékkel azzá tehetők:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & -2 & 10 \\ -10 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} .25 & .25 & .25 & 1 \\ 1 & .25 & .25 & .25 \\ .25 & .25 & 1 & .25 \\ .25 & 1 & .25 & .25 \end{bmatrix}.$$

Az alábbi egyenletrendszer együtthatómátrixa soronként domináns főátlójú:

$$\begin{aligned} 4x - y &= 11 \\ 2x - 5y &= -17 \end{aligned}$$

2.56. TÉTEL (ELÉGSÉGES FELTÉTEL AZ ITERÁCIÓK KONVERGENCIÁJÁRA). *Ha az n egyenletből álló n-ismeretlenes egyenletrendszer együtthatómátrixa soronként domináns főátlójú, akkor bármely indulóvektor esetén a Jacobi- és a Gauss–Seidel-iteráció is konvergens.*

► A bizonyításhoz, mely a Banach-fixponttételre épít, itt még hiányoznak eszközeink, de két változó esetére a 2.47. feladat megoldást ad.

► A tételbeli feltétel nem szükséges, csak elégséges, azaz olyan egyenletrendszeren is konvergens lehet valamelyik iteráció, melynek nem domináns főátlójú az együtthatómátrixa.

► Hasonló tétel igaz oszloponként domináns főátlójú együtthatómátrixok esetén is.

► A domináns főátlójú mátrixokon a Gauss–Seidel-iteráció sosem lassabb, mint a Jacobi-iteráció, sőt, gyakran érezhetően gyorsabb. Az viszont előfordulhat, hogy a Gauss–Seidel-iteráció divergens, míg a Jacobi-iteráció konvergens (ld. 2.48. feladat).

► A gyakorlatban ezeknél hatékonyabb iterációkat használnak. E témában az Olvasó figyelmébe ajánljuk a *numerikus módszerek* tárgyú könyveket, web-oldalakat, például Faragó István és Horváth Róbert jegyzetét[5].

[5] Faragó István, Horváth Róbert. *Numerikus módszerek*. BME, http://math.bme.hu/~rhorvath/nummodszjegyzet.pdf, 2013

Feladatok

2.44. Oldjuk meg a

$$\begin{aligned} 4x - y &= 8 \\ 2x - 5y &= -5 \end{aligned}$$

egyenletrendszert Jacobi- és Gauss – Seidel-iterációval! Számoljunk 3, majd 4 értékes jegyre!

2.45. Oldjuk meg a

$$\begin{aligned} x + 4y + 2z &= 5 \\ 3x - 2y + 7z &= -3 \\ 5x - 2y + z &= 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert Jacobi- és Gauss – Seidel-iterációval! Számoljunk 3 értékes jegyre!

2.46. Működnek-e a Jacobi- és Gauss – Seidel-iterációk a

$$\begin{aligned} 4x + 5y &= 1 \\ 5x + 7y &= 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszeren, bár az nem domináns főátlójú, és sorcserével sem tehető azzá?

2.47. Igazoljuk, hogy ha a kétismeretlenes

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

egyenletrendszer együtthatómátrixa domináns főátlójú, akkor a Jacobi-iterációnál a (2.24) képletben használt

$$f : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{b_1 - a_{12}y}{a_{11}} \\ \frac{b_2 - a_{21}x}{a_{22}} \end{bmatrix}$$

függvény és a Gauss – Seidel-iterációnál a (2.25) képletből származó

$$g : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}y \\ \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}\left(\frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}y\right) \end{bmatrix}$$

függvény mindegyike kontrakció, azaz bármely két $\mathbf{x}^1 = (x_1, y_1)$ és $\mathbf{x}^2 = (x_2, y_2)$ vektor esetén

$$\begin{aligned} &d(f(\mathbf{x}^1), f(\mathbf{x}^2)) \leqslant q d(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) \quad \text{és} \\ &d(g(\mathbf{x}^1), g(\mathbf{x}^2)) \leqslant r d(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2), \end{aligned}$$

ahol $0 < q < 1$ és $0 < r < 1$ adott konstansok.

2.48. JACOBI-ITERÁCIÓ KONVERGÁL, GAUSS – SEIDEL-ITERÁCIÓ NEM Írjunk programot annak az állításnak az ellenőrzésére, hogy a

$$\begin{aligned} x + z &= 0 \\ -x + 5/6y &= 0 \\ x + 2y - 3z &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszeren a Jacobi-iteráció konvergál, a Gauss – Seidel-iteráció nem.

2.49. GAUSS-ELIMINÁCIÓ DOMINÁNS FŐÁTLÓJÚ MÁTRIXON Bizonyítsuk be, hogy ha az $\mathbf{A}$ mátrix főátlója soronként domináns, akkor végrehajtható rajta a főelem-kiválasztásos Gauss-elimináció sorcsere nélkül!

2.50. AZ ITERÁCIÓK SZEMLÉLTETÉSE Az A városból elindul egy A jelű vonat a B város felé, vele egy időben a B városból egy B jelű A felé. A B vonat indulásával egy időben a B vonat orráról elindul egy légy is A felé, de amint találkozik az A vonattal megfordul, és addig repül, míg a B vonattal nem találkozik, amikor ismét megfordul, stb. Mindhármuk sebessége konstans, de a légy sebessége nagyobb mindkét vonaténál.

1. Egy táblázatban megadjuk mindkét vonat távolságát az indulási helyüktől km-ben mérve azokban a pillanatokban, amikor a légy épp a B vonattal találkozik.

	(x_0, y_0)	(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	(x_3, y_3)
x: távolság A-tól	0	40	48	49.6
y: távolság B-től	0	80	96	99.2

   Számítsuk ki a táblázat egy-két további oszlopát! Milyen messze van A város B-től?

2. Most egy másik táblázatban megadjuk annak a vonatnak a távolságát az indulási helyétől, amelyik épp találkozik a léggyel:

	y_0	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3
x: távolság A-tól		30		46		49.2	
y: távolság B-től	0		80		96		99.2

   Számítsuk ki a táblázat egy-két további oszlopát! Milyen messze van A város B-től?

3. Mi köze van e feladatnak a Jacobi- és a Gauss – Seidel-iterációhoz?

Megoldások

2.1. *a)* igaz, *b)* hamis, de pl. ortonormált bázisban igaz, *c)* igaz, *d)* hamis, a sík normálvektora $(A, B, 0)$, *e)* igaz, ugyanis az

$$(x, y, z, w) = (1, -1, 0, 0)t + (0, 0, 1, -1)s$$

explicit egyenlet egy sík egyenlete, *f)* igaz, *g)* igaz, ha $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ jelöli az alakzat egy általános pontját, *h)* igaz, például az $x = 0$, $y = 0$ egyenletrendszerű sík, és $z = 0$, $w = 0$ egyenletrendszerű sík egytlen közös pontja a $(0, 0, 0, 0)$ pont.

2.2. Egy tetszőleges $P(x, y, z)$ pont harmadik koordinátája megegyezik a rajta átfektetett és az első két koordinátatengellyel párhuzamos sík harmadik koordinátatengellyel való metszéspontjának koordinátájával. Ezért a feladatbeli sík minden pontjának $(a, b, 5)$ a koordinátás alakja, ahol a és b valósok, másrészt az ilyen alakú pontok mind e síkon vannak. Tehát olyan egyenletet keresünk, amelyben az ismeretlenek x, y és z, továbbá x és y értéke tetszőleges valós szám, z pedig csak 5 lehet.

Implicit egyenlet a $z = 0$ (másként $0x + 0y + z = 5$), explicit vektoregyenlete és explicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x &= s \\ y &= t \\ z &= 5, \end{aligned} \qquad \text{és} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ 5 \end{bmatrix}.$$

2.3. *a)* Több megoldás is lehetséges. Ha $t = x$-et választjuk paraméternek, akkor $x = t$, $y = 1 - t$, amiből a vektoregyenlet:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t.$$

Az y-t választva paraméternek

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

b) Az $x = t$ paraméterválasztás esetén

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2/3 \end{bmatrix} t.$$

Az $x = 3t$-t választva paraméternek

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} t.$$

c) Az $x = t$ paraméterválasztás esetén

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} t.$$

d) Az $x = t$ paraméterválasztás esetén

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} t.$$

e) Az $x = t$ paraméterválasztás esetén

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t.$$

f) Az $x = t$ paraméterválasztás esetén

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} t.$$

A $w = t$ paraméterválasztás esetén

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

2.4. *a)* $x = t$, $y = 1 - t$ *b)* $x = s$, $y = t$, $z = 1 - s - t$ *c)* $x = s$, $y = 1 - s$, $z = t$

d) $x = r$, $y = s$, $z = t$, $w = 1 - r - s - t$ *e)* $x = r$, $y = 1 - r$, $z = s$, $w = t$ *f)* $x = 1$, $y = r$, $z = s$, $w = t$

2.6. *a)* Az explicit egyenletrendszer $x = 2 + t$, $y = 1 + 3t$, a vektoregyenlet

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} t.$$

Az implicit egyenletek $3(x - 2) = y - 1$, $(3, -1) \cdot (x - 2, y - 1) = 0$, $(3, -1) \cdot (x, y) = 5$, $3x - y = 5$.

d) $x = 3$, $y = 4$,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

g) Az $A(1,1,1,1)$ ponton átmenő, $\overrightarrow{AB} = (1,2,1,3)$ irányvektorú egyenes explicit vektoregyenlete és explicit egyenletrendszere

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 1 + 2t \\ z &= 1 + t \\ w &= 1 + 3t. \end{aligned}$$

Az implicit egyenletrendszerek megkaphatók a t kifejezésével az előző egyenletrendszerből:

$$x - 1 = \frac{y-1}{2} = z - 1 = \frac{w-1}{3}.$$

Innen három *független* egyenlet kiválasztása többféleképp is lehetséges, egyik például a következő:

$$\begin{aligned} 2x - y \qquad &= 1 \\ x \quad - z \quad &= 0 \\ 3x \qquad - w &= 2. \end{aligned}$$

2.7. *a)* A három pontba mutató vektorok különbségei a síkkal párhuzamos vektorok, így azokkal felírható a sík mindegyik egyenlete. Két vektor a lehetséges háromból:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (2,1,4) - (0,-1,2) = (2,2,2), \text{ és} \\ \mathbf{v} &= (-1,0,7) - (0,-1,2) = (-1,1,5). \end{aligned}$$

Ezek alapján például az $\mathbf{r}_0 = (0,-1,2)$ választás mellett a sík egyenletei megegyeznek a 2.14. példában leírtakkal, mivel ugyanarról a síkról van szó.

c) Az $\overrightarrow{AB} = (1,2,1,3)$ és az $\overrightarrow{AC} = (2,1,0,-1)$ vektorok segítségével azonnal fölírható a sík egyenlete:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Kiküszöbölve az s és t paramétereket két egyenletet kaphatunk, például

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z \qquad &= 2 \\ y - 5z + w &= -3. \end{aligned}$$

2.8. *a)* $\overrightarrow{AB} = (0,1,2,3)$, $\overrightarrow{AC} = (1,1,0,0)$, $\overrightarrow{AD} = (0,0,1,1)$. Innen a vektoregyenlet:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Az explicit egyenletrendszer

$$\begin{aligned} x &= \qquad\quad s \\ y &= 1 + \;\; r + s \\ z &= 1 + 2r \qquad + t \\ w &= 1 + 3r \qquad + t \end{aligned}$$

Ebben az explicit egyenletrendszerben keressünk három olyan egyenletrendszert, melyek megoldhatók az r, s, t ismeretlenekre nézve, és ezeket helyettesítsük be a negyedik egyenletbe. Eredményül az

$$x - y - z + w = 1$$

egyenletet kapjuk, mely a hipersík implicit egyenlete.

b) $\overrightarrow{AB} = (0,1,2,3)$, $\overrightarrow{AC} = (0,1,0,0)$, $\overrightarrow{AD} = (0,0,1,1)$. Innen a vektoregyenlet:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Az implicit egyenlet $x = 0$.

c) $\overrightarrow{AB} = (0,1,0,3)$, $\overrightarrow{AC} = (1,1,0,0)$, $\overrightarrow{AD} = (0,0,1,1)$. Innen a vektoregyenlet:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Az implicit egyenlet $y + z = 0$.

2.9. Mivel (A,B) az egyenes egy normálvektora, ezért ha $\mathbf{r}$ az egyenes egy tetszőleges, $\mathbf{r}_0$ egy rögzített pontjába mutató vektor, akkor az $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_0, y - y_0)$ merőleges a normálvektorra, így skaláris szorzatuk 0, azaz

$$(A,B) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0.$$

E skaláris szorzást elvégezve az $Ax + By = Ax_0 + By_0$ formulát kapjuk, ami a kívánt alakú. Másrészt ha $Ax + By = C$, akkor $(A,B) \neq (0,0)$ miatt az $Ax_0 + By_0 = C$ egyenlet megoldható. Egy ilyen megoldásra $Ax + By = Ax_0 + By_0$, amiből $(A,B) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$, tehát (x,y) csak az (x_0, y_0) ponton átmenő, (A,B)-re merőleges egyenes pontja lehet.

2.13. *a)* igen, *b)* igen, *c)* nem, *d)* igen, *e)* igen, *f)* nem.

2.14. Könnyen látható, hogy mindkét egyenletrendszer egyetlen megoldása: $x = 2$, $y = 1$, tehát a két egyenletrendszer ekvivalens.

2.15. Az első egyenletrendszer nem oldható meg a $0 = 3$ alakú egyenlet miatt, de a második sem, mivel nincs olyan x és y, melyre $x + y = 2$ és $x + y = 7$ lenne, hisz $2 \neq 7$.

2.16. Behelyettesítés után mindkét egyenlet $0 = 0$ alakú, amit tetszőleges x és y kielégít, így az összes (x, y) számpár megoldása az egyenletrendszernek.

2.17. $x = 1$, y tetszőleges, azaz az összes $(1, y)$ alakú számpár megoldás.

2.18. A második egyenlet behelyettesítés után $0 = 1$ alakú, így az egyenletrendszernek nincs megoldása.

2.19. $x = 1$, $y = 2$, azaz $(x, y) = (1, 2)$ az egyetlen megoldás.

2.21. *a)* A sormodellben két metsző egyenest kell megrajzolni ($y = 7/3x - 2/3x$, $y = -2 + 3/2x$), melyek a $(2, 1)$ pontban metszik egymást, míg az oszlopmodellben a $(2, 3)$, a $(3, -2)$ vektorokat és azok lineáris kombinációjaként előállított $(7, 4) = 2(2, 3) + (3, -2)$ vektort!

b) A sormodellben két párhuzamos egyenest kell megrajzolni, míg az oszlopmodellben a $(2, 3)$ és a $(4, 6)$ vektorokat, melyek egy egyenesbe esnek, és semmilyen lineáris kombinációjuk sem adja ki a $(3, 4)$ vektort!

2.22. A három sík közül semelyik kettő nem párhuzamos, másrészt a normálvektorai egy síkba esnek, ugyanis $2(1, 1, 2) + (1, 2, 4) = (3, 4, 8)$. Ez azt jelenti, hogy van olyan vektor, mely mindhárom síkkal párhuzamos. Az első esetben a három sík egy egyenesen megy át, mivel van a síkoknak közös pontjuk, pl. a $(3, 0, 0)$ pont, így végtelen sok megoldása is van, míg a második esetben a síkoknak nincs közös pontjuk.

Az egyenletrendszerek ekvivalensek a következő vektoregyenletekkel:

$$\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}y + \begin{bmatrix}2\\4\\8\end{bmatrix}z = \begin{bmatrix}3\\3\\9\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}y + \begin{bmatrix}2\\4\\8\end{bmatrix}z = \begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}.$$

Itt a közös együtthatómátrix minden oszlopvektora benne van a

$$2x + y - z = 0$$

egyenletű síkban, (ez könnyen ellenőrizhető a vektorok koordinátáinak a sík egyenletébe való helyettesítésével), és ki is feszítik a síkot, mert a három vektor nem kollineáris. Másrészt a $(3, 3, 9)$ vektor is benne van e síkban, a $(3, 3, 1)$ vektor viszont nem. Tehát az első egyenletrendszer megoldható, a második nem.

2.23. A sormodell szerinti ábra az *a)* esetben 3 síkbeli egyenest tartalmaz, melyek közt van két párhuzamos, így az egyenletrendszer nem oldható meg. A *b)* esetben a három egyenes egy ponton megy át, ez a megoldás: $x = 2$, $y = 1$. A *c)* esetben ugyan nincsenek párhuzamos egyenesek, de nincs közös pontjuk sem, így az egyenletrendszer nem oldható meg. Az oszlopmodell szerint az *a)*

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + y &= 4 \\ x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

egyenletrendszer ekvivalens a következővel:

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}y = \begin{bmatrix}3\\4\\4\end{bmatrix}.$$

Az $(1, 1, 1)$ és az $(1, 1, 2)$ vektorok benne fekszenek az $x = y$ egyenletű síkban, mivel első két koordinátájuk megegyezik, ezért minden lineáris kombinációjuk is ebbe a síkba esik. A $(3, 4, 4)$ vektor viszont nem esik e síkba, így *független* az előbbi kettőtől, tehát nem áll elő azok lineáris kombinációjaként. Vagyis ez az egyenletrendszer nem oldható meg. A *b)* és *c)* egyenletrendszerekben a bal oldali két vektor, az $(1, 1, 1)$ és az $(1, 2, 3)$ az $x - 2y + z = 0$ egyenletű síkban van, melyben a $(3, 4, 5)$ vektor benne van, míg a $(3, 3, 5)$ vektor nincs benne, tehát *b)* megoldható, *c)* nem.

2.24. *a)* hamis, az állítás csak úgy igaz, ha a párhuzamos hipersíkok különbözőek is (két azonos hipersíkot párhuzamosnak tekintünk), *b)* hamis, például a 2.9. *(a)* ábrán látható esetben nincsenek párhuzamos síkok, és mégsincs megoldás, *c)* igaz, mert akkor a jobb oldalon álló bármely vektor kifejezhető e két kétdimenziós vektor lineáris kombinációjaként, tehát az egyenletrendszer megoldható.

2.25.

a) Egy két egyenletből álló háromismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra a **három**dimenziós térben **két** darab **síkból** áll, melyek ha **párhuzamosak, de nem azonosak**, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása, egyébként megoldásainak száma **végtelen**. Oszlopmodellje a **két**dimenziós térben **négy** darab **vektorból** áll (három lineáris kombinációja a negyedik).

b) Egy három egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra a **két**dimenziós térben **három egyenesből** áll, míg az oszlopmodellje a **három**dimenziós térben **három** darab **vektorból**.

c) Egy négy egyenletből álló ötismeretlenes egyenletrendszer sormodellje szerinti ábra az **öt**dimenziós térben **négy** darab **hipersíkból** áll. Oszlopmodellje a **négy**dimenziós térben **hat** darab **vektorból** áll.

2.26. *a)* Igaz, ez a szám megegyezik a főelemek számával. *b)* Igaz, ez a szám megegyezik a főelemek számával. *c)* Hamis, van lépcsős alakja minden mátrixnak, de csak a redukált lépcsős alak egyértelmű. *d)* Hamis. *e)* Igaz.

2.27. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

2.28. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

2.29. A sorcsere előállítható a beszorzás és a hozzáadás segítségével, nevezetesen az $S_i \leftrightarrow S_j$ sorcsere ekvivalens az

$$S_i + S_j,\ S_j - S_i,\ S_i + S_j,\ -S_j,$$

elemi sorműveletekkel. Ellenőrzésül a mátrixokon való hatásukat is megadjuk:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{s}_i \\ \vdots \\ \mathbf{s}_j \\ \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow{S_i+S_j} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{s}_i+\mathbf{s}_j \\ \vdots \\ \mathbf{s}_j \\ \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow{S_j-S_i} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{s}_i+\mathbf{s}_j \\ \vdots \\ -\mathbf{s}_i \\ \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow{S_i+S_j} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{s}_j \\ \vdots \\ -\mathbf{s}_i \\ \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow{-S_j} \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{s}_j \\ \vdots \\ \mathbf{s}_i \\ \vdots \end{bmatrix}$$

2.30. Az egyenletrendszernek és lépcsős alakjának bővített mátrixa:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Legyen $x_5 = t$, az utolsó egyenletből $x_4 = 1 - \frac{1}{2}t$, a harmadik egyenletbe való helyettesítés után $x_3 1 - \frac{1}{2}t$, a második egyenletből $x_2 = t$, végül az első egyenletből $x_1 = -\frac{1}{2}t$. Tehát a megoldás

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t \\ t \\ 1-\frac{1}{2}t \\ 1-\frac{1}{2}t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Az $x_4 = t$ paraméterválasztás esetén az eredmény törtmentes alakot ölt:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-1 \\ -2t+2 \\ t \\ t \\ -2t+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

2.31. Egyetlen elemi sorművelet világossá teszi, hogy az egyenletrendszer inkonzisztens:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{S_4-4S_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{array}\right]$$

2.32. Az elemi sorműveletek:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 14 & -21 & 7 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & 10 & 15 & 5 \\ 3 & 6 & -9 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{7}S_1, \frac{1}{5}S_3, \frac{1}{3}S_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{S_2-S_1 \\ S_3-S_1 \\ S_4-S_1}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Innen a megoldás:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

E feladat arra példa, hogy abból, hogy az egyenletek száma több az ismeretleneknél, nem következik, hogy az egyenletrendszer inkonzisztens. Sőt, mint látjuk, akár végtelen sok megoldása is lehet!

2.33. $(x, y, z) = (19/3, -2, 2/3)$ az egyetlen megoldás. E feladat arra példa, hogy abból, hogy az egyenletek száma több az ismeretleneknél, nem következik, hogy az egyenletrendszer inkonzisztens.

2.34. Az egyenletrendszer inkonzisztens.

2.35. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-s-t \\ 1+s-3t \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

2.36.

a) Felírjuk a bővített mátrixot, majd használjuk a Gauss–Jordan-módszert:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{S_2-\frac{5}{2}S_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{2S_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{S_1-S_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}S_1}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}\right].$$

Az első egyenletrendszer megoldása $x = 3$, $y = -5$, a másodiké $x = -1$, $y = 2$.

b) Az első egyenletrendszer ellentmondásos, a második megoldásai $x = 1 - \frac{1}{2}t$, $y = t$, ugyanis

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{rref}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

c) A megoldások leolvashatók a bővített mátrix redukált lépcsős alakjából:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{rref}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right].$$

d) A megoldások leolvashatók a bővített mátrix redukált lépcsős alakjából:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right].$$

2.37. *a)* Igaz. *b)* Hamis, az egyenletrendszer megoldhatósága nem függ az egyenletek számától. Az ismeretlenek számánál akár kevesebb, akár több egyenletből álló rendszer akár konzisztens, akár inkonzisztens is lehet. *c)* Igaz. *d)* Igaz, a nullvektor mindig megoldás.

2.38. Igen, mindkettőnek $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ az egyetlen megoldása, azaz megoldáshalmazaik megegyeznek.

2.39. Igen, mindkettő bővített együtthatómátrixának redukált lépcsős alakja a zérussor nélkül

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.8 & 1.8 \\ 0 & 1 & 2.2 & -1.2 \end{bmatrix}$$

2.40. *a)* Igen. *b)* Nem.

2.41. Ha az egyenletrendszernek van legalább három sora, akkor – mivel bármely két szomszédos sor különbsége azonos – az első két sor lineáris kombinációjaként megkapható az összes többi, így nem tudunk $n > 2$ esetén n független egyenletből álló n-ismeretlenes egyenletrendszert fölírni, hogy csak egyetlen megoldása legyen. Ha $n = 2$, akkor a bővített mátrix és annak lépcsős alakja

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & a+d & a+2d \\ a+3d & a+4d & a+5d \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

ahol a tetszőleges, $d \neq 0$. Innen a megoldásvektor $(-1, 2)$. (Két ismeretlen, de kettőnél több egyenlet esetén, $d \neq 0$ mellett két független egyenlet lesz, melyek ugyanezt a megoldást adják).

2.42. Mind a négy egyenlet megfelelő helyettesítéssel a következő lineáris egyenletrendszerre vezet:

$$\begin{aligned} 2X + 2Y &= 8 \\ 3X + Y &= 4 \end{aligned}$$

Ennek megoldása $X = 0$, $Y = 4$. Innen *a)* $(x, y) = (0, 16)$, *b)* két megoldás van: $(0, 2)$ és $(0, -2)$, *c)* ez az egyenletrendszer nem oldható meg, mivel a $\mathrm{e}^x = 0$ egyenlet nem oldható meg, *d)* ez az egyenletrendszer sem oldható meg, mivel a $\cos x = 4$ egyenlet nem oldható meg (a valós számok körében).

2.43. Jelölje az 1, 5 és 10Ft-osok számát rendre x, y és z. A feladat a következő egyenletrendszerre vezet:

$$x + y + z = 11 \qquad (2.21)$$

$$x + 2y + 5z = 53 \qquad (2.22)$$

Ennek megoldásai $(x, y, z) = (\frac{1}{2} + \frac{5}{4}t, \frac{21}{2} - \frac{9}{4}t, t)$. A 10Ft-os érmék száma legföljebb 5, így elég a $t = 1, 2, \ldots, 5$ értékeket kipróbálni. Az egyetlen megoldás, amely pozitív egészekből áll, azaz ahol minden érme darabszáma pozitív egész: $x = 3$, $y = 6$, $z = 2$. (Ha észrevesszük, hogy csak úgy kaphatunk egész megoldásokat, ha t néggyel osztva kettő maradékot ad, akkor a $t = 2$ eseten kívül más megoldás nem is jöhet szóba.)

2.44. A Jacobi-iteráció lépéseinek táblázata 3 értékes jeggyel számolva $\mathbf{x}^0 = (0, 0)$ kezdővektorral:

	$\mathbf{x}^0$	$\mathbf{x}^1$	$\mathbf{x}^2$	$\mathbf{x}^3$	$\mathbf{x}^4$	$\mathbf{x}^5$	$\mathbf{x}^6$
x	0	2	2.25	2.45	2.48	2.50	2.50
y	0	1	1.80	1.90	1.98	1.99	2.00

Az iteráció lépései 4 értékes jeggyel számolva:

	$\mathbf{x}^0$	$\mathbf{x}^1$	$\mathbf{x}^2$	$\mathbf{x}^3$	$\mathbf{x}^4$	$\mathbf{x}^5$	$\mathbf{x}^6$	$\mathbf{x}^7$	$\mathbf{x}^8$
x	0	2	2.25	2.45	2.475	2.495	2.498	2.500	2.5
y	0	1	1.80	1.90	1.980	1.990	1.998	1.999	2.0

2.45. Az egyenletrendszer sorcserékkel domináns főátlójúvá tehető. A megoldás $(x, y, z) = (1, 1.25, -0.5)$.

2.50. A Jacobi-iteráció szerinti módon, a vonatok valamelyikének és a légynek a k-adik találkozásából kiszámítva a $k+1$-edik találkozásra jellemző távolságokat, az $x_{k+1} = ay_k + b$, $y_{k+1} = cx_k + d$ egyenletekre jutunk. Az első táblázat adatait behelyettesítve, és a, b, c és d értékre megoldva az $a = 1/10$, $b = 40$, $c = 2/5$, $d = 80$ értékeket kapjuk, amiből a táblázat további értékei számolhatók, és az eredeti egyenletrendszer is fölírható:

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{10}y &= 40 \\ -\frac{2}{5}x + \phantom{\frac{1}{10}}y &= 80. \end{aligned}$$

Ennek megoldása $(x, y) = (50, 100)$, vagyis a vonatok találkozásáig az A vonat 50 km-t, a B vonat 100 km-t tesz meg. Eszerint a két város 150 km-re van egymástól.

A Gauss–Seidel-iteráció szerinti $x_{k+1} = ay_k + b$, $y_{k+1} = cx_{k+1} + d$ egyenletek épp illeszkednek a feladat második táblázatához az $a = 1/5$, $b = 30$, $c = 1$, $d = 50$ értékekkel. Ez az

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{5}y &= 30 \\ -x + \phantom{\frac{1}{5}}y &= 50 \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez tartozik, melynek megoldása ismét $(x, y) = (50, 100)$.

3
Megoldhatóság és a megoldások tere

E fejezetet az egyenletrendszer megoldásainak jellemzésére szánjuk. Ennek során egy apró lépést teszünk a vektortér általános fogalmának bevezetése felé, és megmutatjuk, hogy egy lineáris egyenletrendszer megoldásai vektorteret alkotnak. Végül megmutatjuk, hogy minden konzisztens lineáris egyenletrendszer origóhoz legközelebbi megoldása az egyetlen, mely a sortérbe esik.

Homogén és inhomogén egyenletrendszerek megoldásai

Az előzőekben a megoldások megtalálásának módszereit tanulmányoztuk. E szakaszban a megoldhatóság kérdését és a megoldások halmazának legfontosabb tulajdonságait vizsgáljuk. A vizsgálatokban a lineáris egyenletrendszerek mindkét geometriai interpretációja fontos szerepet kap.

Kötött változók száma, mátrix rangja A redukált lépcsős alak egyértelműségének nyilvánvaló, de fontos folyománya az alábbi eredmény:

3.1. KÖVETKEZMÉNY (FŐELEMEK OSZLOPAI). *Egy valós mátrix bármely lépcsős alakjában a főelemek ugyanazokban az oszlopokban vannak, tehát ezek száma is független a lépcsős alaktól.*

A bizonyítás azonnal adódik abból, hogy bármely lépcsős alak főelemeiből kapjuk a redukált lépcsős alak vezéregyeseit, így bármely lépcsős alak főelemei ugyanott vannak, ahol a vezéregyesek, a redukált lépcsős alak pedig egyértelmű.

Ebből az is következik, hogy bármely valós mátrix esetén

bármely lépcsős alak főelemeinek száma	=	bármely lépcsős alak nemzérus sorainak száma	=	a redukált lépcsős alak vezéregyeseinek száma.

Ez a következő definícióhoz vezet.

3.2. DEFINÍCIÓ (MÁTRIX RANGJA). *Egy mátrix valamely lépcsős alakjában a nemnulla sorok számát a mátrix* rangjának *nevezzük. Az* $\mathbf{A}$ *mátrix rangját* $\mathrm{r}(\mathbf{A})$, $\operatorname{rang}(\mathbf{A})$ *vagy* $\operatorname{rank}(\mathbf{A})$ *jelöli.*

3.3. PÉLDA (MÁTRIX RANGJÁNAK KISZÁMÍTÁSA). *Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját!*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

MEGOLDÁS. Az első és második mátrix lépcsős alakú, rangjuk 1, ill. 2. A harmadik és negyedik mátrix elemi sorműveletekkel

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \text{ illetve } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

alakra hozható, tehát a rang 4, illetve 2. □

3.4. ÁLLÍTÁS (KÖTÖTT ÉS SZABAD VÁLTOZÓK SZÁMA). *Ha egy n-ismeretlenes egyenletrendszer megoldható, és együtthatómátrixának rangja r, akkor a Gauss- vagy a Gauss–Jordan-módszerrel kapott megoldásában a kötött változók száma r, a szabad változók száma $n - r$.*

► Megjegyezzük, hogy egyelőre csak annyit látunk, hogy ha az együtthatómátrix és a bővített mátrix rangja r, akkor az egyenletrendszernek *van olyan megoldása*, amelyben a kötött változók száma r, a szabad változóké $n - r$, és egy ilyen megoldás megkapható a Gauss- vagy a Gauss–Jordan-módszerrel. Arról még nem tudunk semmit, hogy a változók sorrendjének felcserélésével, vagy más megoldási módszerrel nem kaphatjuk-e meg ugyanezt a megoldást több vagy épp kevesebb kötött változóval. A következő, 3. fejezetben be fogjuk látni, hogy a kötött és szabad változók száma független a változók sorrendjétől, és a meghatározásuk módszerétől.

► Például a

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

bővített mátrixhoz tartozó egyenletrendszerben 3 a kötött és 4 a szabad változók száma.

Egyenletrendszer megoldhatóságának feltétele Tudjuk, hogy egy lineáris egyenletrendszer pontosan akkor *nem* oldható meg, ha a bővített mátrix lépcsős alakjának van olyan sora, melyben csak a legutolsó elem nem nulla. Ez ugyanis egyenletté visszaírva $0 = c$ alakú, ahol $c \neq 0$, és ennek az egyenletnek nincs megoldása. Ez viszont azt jelenti, hogy ilyenkor a bővített mátrix rangja nagyobb az együtthatómátrix rangjánál. E megállapítás azonnali következménye a következő tétel.

3.5. TÉTEL (A MEGOLDHATÓSÁG MÁTRIXRANGOS FELTÉTELE). *Legyen egy n-ismeretlenes lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixa $\mathbf{A}$, a konstans tagokból álló vektora $\mathbf{b}$.*

1. *Ez az egyenletrendszer* pontosan akkor oldható meg, *ha együtthatómátrixának és bővített mátrixának rangja megegyezik, azaz*

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}).$$

2. *Ez az egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg* egyértelműen, *ha együtthatómátrixának és bővített mátrixának rangja megegyezik az ismeretlenek számával, azaz*

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n.$$

BIZONYÍTÁS. 1. Az egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha bővített mátrixának lépcsős alakjában nincs olyan sor, melynek csak az utolsó eleme nem 0. Ez épp azt jelenti, hogy $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$.

2. Egy egyenletrendszer akkor oldható meg egyértelműen, ha megoldható, és nincs szabad változója, azaz az együtthatómátrix rangja megegyezik az ismeretlenek számával. □

Az előzőekből az is adódik, hogy egy lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van egynél több megoldása, ha

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) < n.$$

(Miért nem lehet $\mathrm{r}(\mathbf{A}) > n$?)

Egy valós együtthatós egyenletrendszernek csak úgy lehet egynél több megoldása, ha van szabad változója. Viszont annak minden értékéhez egy-egy másik megoldás tartozik, vagyis ekkor az egyenletrendszernek valós együtthatós esetben végtelen sok megoldása van. Így, ha $\mathbf{A}$ valós mátrix, akkor a megoldások száma, a két rang és az ismeretlenek száma közt a következő a kapcsolat:

Feltétel	Megoldások száma
$\mathrm{r}(\mathbf{A}) < \mathrm{r}(\mathbf{A}\|\mathbf{b})$	0
$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}\|\mathbf{b}) = n$	1
$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}\|\mathbf{b}) < n$	∞

Ha az egyenletrendszer homogén lineáris, azaz mindegyik konstans tag 0, akkor az elemi sorműveletek közben a bővített mátrix utolsó oszlopában minden elem 0 marad, így ebben az oszlopban biztosan nem lesz főelem. Eszerint a homogén lineáris egyenletrendszerek mindig megoldhatók, hisz ekkor a $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ összefüggés mindig fönnáll. A megoldhatóság persze e feltétel ellenőrzése nélkül is látszik, hisz az $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ mindig megoldás! Mivel $\mathrm{r}(\mathbf{A})$ megegyezik a redukált lépcsős alak főelemeinek számával, ezért $\mathrm{r}(\mathbf{A}) \leq m$ és $\mathrm{r}(\mathbf{A}) \leq n$ is fönnáll, ahol m az egyenletek, n az ismeretlenek száma. Így viszont $m < n$ esetén $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$ nem állhat fönn, tehát a homogén lineáris egyenletrendszernek van az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ vektoron kívül is megoldása. Ezzel bizonyítottuk a következő tételt:

3.6. TÉTEL (HOMOGÉN LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDHATÓSÁGA). *Az $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer mindig megoldható, mert a nullvektor – az ún.* triviális megoldás *– mindig megoldás. Pontosan akkor van* nemtriviális*, vagyis a $\mathbf{0}$-vektortól különböző megoldása is, ha*

$$\mathrm{r}(\mathbf{A}) < n,$$

ahol n az ismeretlenek – azaz $\mathbf{A}$ oszlopainak – számát jelöli. Speciálisan, az m egyenletből álló homogén lineáris egyenletrendszernek $m < n$ esetén mindig van nemtriviális megoldása.

Valós együtthatós homogén lineáris egyenletrendszerekre az előző táblázat a következő alakot ölti:

Feltétel	Megoldások száma
$\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$	1
$\mathrm{r}(\mathbf{A}) < n$	∞

3.7. PÉLDA (EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSAINAK SZÁMA). *Az a paraméter mely értékei mellett van az alábbi egyenletrendszernek* 0, 1, *illetve* ∞ *sok megoldása?*

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 + a x_3 &= 1 \\ x_1 + a x_2 + \ \ x_3 &= a \\ a x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 &= a^2 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Hozzuk a bővített mátrixot lépcsős alakra:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & a^2 \end{array}\right] \overset{S_2-S_1}{\underset{S_3-aS_1}{\Longrightarrow}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & a^2-a \end{array}\right] \overset{S_3+S_2}{\Longrightarrow}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2) & (a+1)(a-1) \end{array}\right]$$

Látható, hogy $a = 1$ esetén az utolsó két sorban minden elem 0, tehát az együtthatómátrix és a bővített mátrix rangja is 1, így az egyenletrendszer az $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ egyenlettel ekvivalens. Ennek megoldása: $(x_1, x_2, x_3) = (1 - s - t, s, t)$, azaz oszlopvektor alakba írva:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ha $a = -2$, akkor az együtthatómátrix rangja 2, a bővített mátrix rangja 3, tehát az egyenletrendszer nem oldható meg (az utolsó sor egyenletté visszaírva $0 = 3$ alakú). Minden egyéb esetben, azaz ha $a \neq 1$ és $a \neq -2$, akkor a két rang 3, ami megegyezik az ismeretlenek számával, tehát egyetlen megoldás van. Ez ki is fejezhető:

$$x_1 = \frac{(a+1)^2}{a+2}, \quad x_2 = \frac{1}{a+2}, \quad x_3 = -\frac{a+1}{a+2}. \qquad \square$$

Homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai Tekintsünk egy tetszőleges homogén lineáris egyenletrendszert. Mint a 3.6. tételben láttuk, ez biztosan megoldható, és a megoldások halmazában a nullvektor benne van. Mit mondhatunk a megoldások halmazáról, ha több megoldása is van a homogén egyenletrendszernek?

3.8. ÁLLÍTÁS (MEGOLDÁSOK LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJA). *Egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak bármely lineáris kombinációja is megoldás.*

BIZONYÍTÁS. Elég az állítást két megoldásra bizonyítani. Jelölje $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ az egyenletrendszer együtthatómátrixának oszlopvektorait. Legyen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ két tetszőleges megoldás, azaz

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_n x_n &= \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_1 y_1 + \mathbf{a}_2 y_2 + \ldots + \mathbf{a}_n y_n &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

és c, d legyen két tetszőleges skalár. Megmutatjuk, hogy ekkor $c\mathbf{x} + d\mathbf{y}$ is megoldás, ugyanis

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}_1(cx_1 + dy_1) + \mathbf{a}_2(cx_2 + dy_2) + \ldots + \mathbf{a}_n(cx_n + dy_n) = \\ &(c\mathbf{a}_1 x_1 + d\mathbf{a}_1 y_1) + (c\mathbf{a}_2 x_2 + d\mathbf{a}_2 y_2) + \ldots + (c\mathbf{a}_n x_n + d\mathbf{a}_n y_n) = \\ &c(\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_n x_n) + d(\mathbf{a}_1 y_1 + \mathbf{a}_2 y_2 + \ldots + \mathbf{a}_n y_n) = \\ &\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

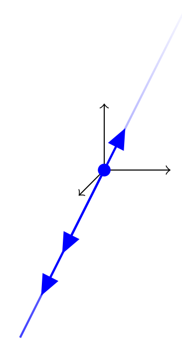
azaz $c\mathbf{x} + d\mathbf{y}$ is megoldás. Ez bizonyítja állításunkat.

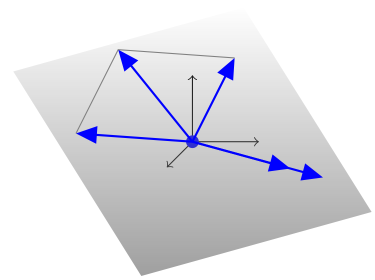
E bizonyítás az oszlopmodellre épült, de hasonlóan egyszerű bizonyítás adható a sormodellben is (ld. 3.10. feladat). $\square$

Vektortér és altér Eddig vektortéren az összes rendezett szám-n-esek halmazát értettük, ahol n egy rögzített pozitív egész. A következőkben kiterjesztjük a vektortér fogalmát.

Egyelőre csak a valós vektorokkal foglalkozunk, azaz vektoron rendezett valós szám-n-est értünk, ahol n tetszőleges pozitív egész.

3.9. DEFINÍCIÓ (VEKTORTÉR). *Vektortéren vektorok olyan nem üres $\mathcal{V}$ halmazát értjük, melyre igaz, hogy $\mathcal{V}$ bármely két vektora összeadható, és összegük is $\mathcal{V}$-beli, valamint $\mathcal{V}$ bármely valós c számmal vett szorzata is $\mathcal{V}$-beli. Másként fogalmazva $\mathcal{V}$ vektortér, ha zárt a vektorösszeadás és a skalárral szorzás műveletére.*



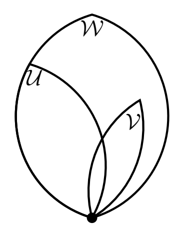


3.1. ábra: *a)* Egy origón átmenő egyenes bármely vektorának konstansszorosa és bármely két vektorának összege az egyenesbe esik, *b)* egy origón átmenő sík bármely vektorának konstansszorosa és bármely két vektorának összege a síkba esik.

3.10. DEFINÍCIÓ (ALTÉR). *Ha $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ két vektortér és $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, akkor azt mondjuk, hogy az $\mathcal{U}$ vektortér a $\mathcal{V}$ vektortér* altere. *Jelölése: $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$.*

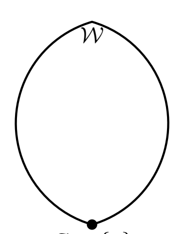
► Az $\mathcal{A}$ vektorhalmaz pontosan akkor vektortér, ha az $\mathcal{A}$-beli vektorok lineáris kombinációi is mind $\mathcal{A}$-ban vannak (ld. 3.6. feladat).
► Minden pozitív n egész esetén $\mathbb{R}^n$ vektortér.
► A síkban ($\mathbb{R}^2$-ben) egy origón átmenő egyenes vektorai (az egyenes pontjaiba mutató helyvektorok) vektorteret alkotnak, mely $\mathbb{R}^2$ altere.
► A térben ($\mathbb{R}^3$-ben) bármely origón átmenő sík vagy egyenes vektorai vektorteret alkotnak (ld. a 3.1. ábrát), mely az $\mathbb{R}^3$ altere.
► Az $\mathbb{R}^3$ imént felsorolt alterei – az origón átmenő egyenes és sík – „olyanok”, mint az $\mathbb{R}$ és az $\mathbb{R}^2$. E ködös megfogalmazást a vektortér absztrakt definíciója és a vektorterek izomorfizmusának fogalma tisztázza (ld. a 13 fejezetet). Látni fogjuk, hogy $\mathbb{R}^n$ alterei valóban mind „olyanok”, mint $\mathbb{R}^k$, ahol $k \leqslant n$.

A halmazok szemléltetésére használt Venn-diagramok mintájára a vektorterek altereinek *néhány tulajdonságát* levélszerű alakzatokon fogjuk szemléltetni. E *levéldiagram* leveleinek közös alsó „szárnál lévő” csúcsa jelzi a zérusvektort (ld. 3.2. ábra). A levelek felső csúcsába a tér nevét írhatjuk. Mint ahogy a Venn-diagram sem, úgy a levéldiagram sem alkalmas minden tulajdonság szemléltetésére!



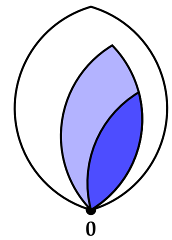
3.2. ábra: Egy $\mathcal{W}$ vektortér az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ altereivel és a közös zérusvektorral

Felsoroljuk az alterek néhány egyszerűen belátható tulajdonságát, néhányukat e diagrammal szemléltetve:
► Minden altérnek eleme a nullvektor, hisz bármely altérbeli vektorral együtt annak 0-szorosa is, vagyis a $\mathbf{0}$-vektor is eleme az altérnek.
► Minden altérbeli $\mathbf{x}$ vektorral együtt annak ellentettje (-1-szerese), a $-\mathbf{x}$ vektor is eleme az altérnek.
► Minden vektortér maga is altér (saját maga altere), hisz bármely két vektorának összes lineáris kombinációját is tartalmazza.
► A nullvektor önmagában alteret alkot, ez a *zérustér*, amit $\mathcal{Z}$ jelöl. A nulltér kifejezést másra használjuk, ne keverjük a kettőt össze.
► Egy $\mathcal{V}$ vektortér zérusvektorát tartalmazó $\mathcal{Z}$ zérusteret és magát $\mathcal{V}$-t a $\mathcal{V}$ tér *triviális altereinek* nevezzük (ld. 3.3. ábra).



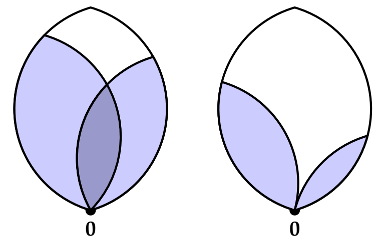
3.3. ábra: A $\mathcal{W}$ vektortér két triviális altere: maga $\mathcal{W}$, és a $\mathcal{Z}$ zérustér

► Altér altere altér, azaz ha $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$, és $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{U}$, akkor $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$. (ld. 3.4. ábra).



3.4. ábra: Altér altere is altér

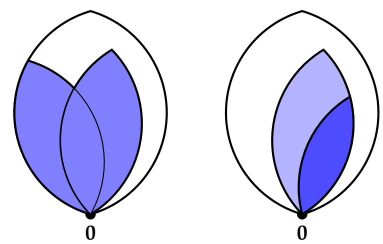
► Két altér metszete altér. Ha $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ egy vektortér két altere, és $\mathcal{W}$ a közös részük, akkor $\mathcal{W}$ nem üres, hisz a nullvektor benne van. Másrészt bármely két $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{W}$ vektor összes lineáris kombinációja benne van $\mathcal{U}$-ban és $\mathcal{V}$-ben is, így metszetükben is. Alterek metszetére is a $\cap$ jelet használjuk, tehát az előbbi alterekre $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \mathcal{W}$ (ld. 3.5. ábra).



3.5. ábra: Alterek metszete is altér, de az megeshet, hogy ez a metszet csak az egyetlen nullvektorból álló zérustér.

► Egy vektortér tetszőleges számú (akár végtelen sok) alterének közös része is altér.

► Két altér egyesítése csak akkor altér, ha egyik altere a másiknak. Például a térben egy origón átmenő egyenes és egy origón átmenő sík vektorait egyesítve csak akkor kapunk alteret, ha az egyenes a síkba esik.



3.6. ábra: Két altér egyesítése csak akkor altér, ha egyik a másik altere

3.11. PÉLDA (ALTÉR). *Altér-e az alábbi vektorhalmaz* $\mathbb{R}^3$*-ben?*
a) $\{\, (x, y, z) \mid x = y,\ z = xy \,\}$,
b) $\{\, (s + 2t, s - 1, 2s + t) \mid s, t \in \mathbb{R} \,\}$,
c) $\{\, (x, y, z) \mid 2x - y + z = 0 \,\}$,
d) $\{\, (x, y, z) \mid x = 2t,\ y = -t,\ z = t,\ t \in \mathbb{R} \,\}$.

MEGOLDÁS. *a)* nem altér. Például az $(1, 1, 1)$ vektor benne van e halmazban, azonban kétszerese nem.

b) nem altér. A nullvektor nincs a vektorhalmazban, ugyanis az $s + 2t = 0$, $s - 1 = 0$, $2s + t = 0$ egyenletrendszernek nincs megoldása.

c) altér, ami az $\mathbf{n} = (2, -1, 1)$ normálvektorú sík pontjaiba mutató helyvektorokból áll. A sík vektoregyenlete $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0$. Ha $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ a sík két vektora, azaz $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0$ és $\mathbf{n} \cdot \mathbf{y} = 0$, akkor $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = 0$ és $\mathbf{n} \cdot (c\mathbf{x}) = 0$ is fönnáll bármely $c \in \mathbb{R}$ valós számra, tehát valóban alteret kaptunk.

d) altér, ami a $\mathbf{v} = (2, -1, 1)$ vektor skalárszorosaiból áll. Ezek közül bármely kettő összege és bármelyik skalárszorosa is e halmazba tartozik, tehát e vektorok valóban alteret alkotnak. E vektorok végpontjai egy origón áthaladó egyenes pontjait adják. □

► Könnyen belátható, hogy $\mathbb{R}^2$ alterei az alábbiak: *a)* a zérusvektorból álló egyelemű halmaz, azaz a zérustér, *b)* egy origón átmenő egyenes összes vektora, *c)* a sík összes vektora.

► Hasonlóképp $\mathbb{R}^3$ alterei: *a)* a zérusvektorból álló egyelemű halmaz, *b)* egy origón átmenő egyenes összes vektora, *c)* egy origón átmenő sík összes vektora, *d)* a tér összes vektora.

► Egy egyetlen n-ismeretlenes – azaz egy $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0$ – egyenletből álló homogén egyenletrendszer megoldáshalmaza egy origót tartalmazó $\mathbb{R}^n$-beli hipersík. Ez altér, ami az előző példa *c)* pontjához hasonlóan bizonyítható. Alterek metszete altér, így a több egyenletből álló homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza mindig altér, hisz hipersíkok metszete, és e metszet nem üres, mivel a $\mathbf{0}$ benne van. A következő paragrafus ugyanezt az oszlopmodellben megvizsgálja meg.

Kifeszített altér A homogén lineáris egyenletrendszer összes megoldását néhány vektor lineáris kombinációjaként állítottuk elő. A megoldások alterét tehát „generálja” vagy geometrikusabb szóhasználattal „kifeszíti” néhány megoldásvektor.

3.12. DEFINÍCIÓ (KIFESZÍTETT ALTÉR). *Adva van egy $\mathcal{V}$ vektortér. A $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathcal{V}$ vektorok*

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k$$

alakú lineáris kombinációinak halmazát a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots$, $\mathbf{v}_k$ vektorok által kifeszített altérnek *nevezzük. Jelölése:* $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ *vagy* $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$.

Megmutatjuk, hogy e fogalomban az altér szó használata jogos:

3.13. ÁLLÍTÁS (A KIFESZÍTETT ALTÉR ALTÉR). *A $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathcal{V}$ vektorok által kifeszített* $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ *vektorhalmaz $\mathcal{V}$ egy altere.*

BIZONYÍTÁS. Be kell látni, hogy $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ bármely vektorának skalárszorosa és bármely két vektorának összege is ide tartozik. Legyen

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k, \quad \text{és} \quad \mathbf{v} = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \ldots + d_k\mathbf{v}_k$$

a $\operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ két tetszőleges vektora, és legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós. Ekkor

$$x\mathbf{u} = (xc_1)\mathbf{v}_1 + (xc_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (xc_k)\mathbf{v}_k \in \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k),$$

és

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (c_1 + d_1)\mathbf{v}_1 + \ldots + (c_k + d_k)\mathbf{v}_k \in \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k). \qquad \square$$

A 3.8. állítás az altér fogalmát és az előző tételt használva a következő alakot ölti:

3.14. ÁLLÍTÁS (MEGOLDÁSOK ALTERE). *Egy n-ismeretlenes* homogén *lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza alteret alkot $\mathbb{R}^n$-ben.*

3.15. DEFINÍCIÓ (NULLTÉR). *Az $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak alterét az $\mathbf{A}$ mátrix* nullterének *nevezzük és $\mathcal{N}(\mathbf{A})$-val jelöljük.*

A 2.35. példában megoldottunk egy homogén lineáris egyenletrendszert, így ezzel meghatároztuk együtthatómátrixának nullterét is, azaz

$$\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}\right) = \left\{ s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, s, t, u \in \mathbb{R} \right\}.$$

Az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai Az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai nem alkotnak alteret, mivel a zérusvektor minden altérnek eleme, viszont egyetlen inhomogén egyenletrendszernek sem megoldása! Ugyanakkor az inhomogén lineáris egyenletrendszer és a hozzá tartozó homogén egyenletrendszer megoldásai közt szoros kapcsolat van.

3.16. TÉTEL (HOMOGÉN ÉS INHOMOGÉN EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSAI). *Az* $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ *mátrixú lineáris egyenletrendszer általános megoldása megegyezik egy tetszőleges partikuláris megoldásának és a hozzá tartozó homogén* $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ *mátrixú egyenletrendszer általános megoldásának összegével. Speciálisan*

$$\boxed{\begin{array}{c}\textit{inhomogén}\\ \textit{általános}\\ \textit{megoldása}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\textit{inhomogén egy}\\ \textit{partikuláris}\\ \textit{megoldása}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\textit{homogén}\\ \textit{általános}\\ \textit{megoldása}\end{array}}$$

BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, akkor az állítás nyilván igaz, hisz a megoldások alteret alkotnak, ezért tegyük fel, hogy a konstansok vektora $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \neq \mathbf{0}$. Jelölje az egyenletrendszer együtthatómátrixát $\mathbf{A}$, annak sorvektorait $\mathbf{a}_{1*}$, $\mathbf{a}_{2*}, \ldots, \mathbf{a}_{m*}$. Legyen $\mathbf{x}$ az inhomogén egyenletrendszer egy partikuláris megoldása, és jelölje $\mathcal{H}$ a homogén, $\mathcal{I}$ az inhomogén egyenletrendszer megoldáshalmazát. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{x} + \mathcal{H} = \mathcal{I}$, ahol a bal oldali összeadást elemenként értjük.

$\mathbf{x} + \mathcal{H} \subseteq \mathcal{I}$: Meg kell mutatnunk, hogy ha $\mathbf{x}$-hez adjuk a $\mathcal{H}$ egy tetszőleges $\mathbf{y}$ elemét, az inhomogén egyenletrendszer egy megoldását kapjuk. Valóban, $\mathbf{x}$, illetve $\mathbf{y}$ eleget tesz az

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} &= b_i, \\ \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{y} &= 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \end{aligned}$$

egyenleteknek. Ebből

$$\mathbf{a}_{i*} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{y} = b_i + 0 = b_i.$$

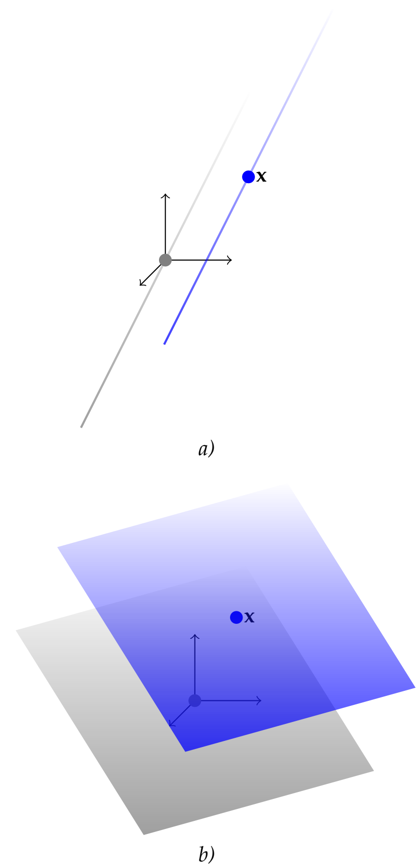
tehát $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ megoldása az inhomogén egyenletrendszernek, azaz $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{I}$.

$\mathbf{x} + \mathcal{H} \supseteq \mathcal{I}$: Meg kell mutatnunk, hogy ha $\mathbf{z}$ az inhomogén egy tetszőleges megoldása, azaz $\mathbf{z} \in \mathcal{I}$, akkor található olyan $\mathbf{y} \in \mathcal{H}$, hogy $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$. Valóban, az $\mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$ megteszi, mert

$$\mathbf{a}_{i*} \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{x}) = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = b_i - b_i = 0.$$

fennáll minden $i = 1, 2, \ldots, m$ indexre, azaz $\mathbf{z} - \mathbf{x} \in \mathcal{H}$. □

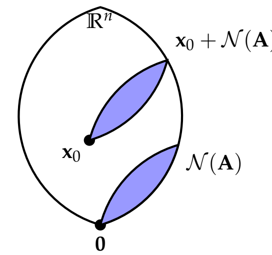
E tétel azt jelenti, hogy ugyan az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmaza *nem altér*, de egy *altér eltoltja*. E halmazokat geometriai nyelven *affin altereknek* nevezzük. Ilyeneket mutat a 3.7. ábra. E tételt szemléltetik a 2.33. és a 2.35. példák is.



3.7. ábra: *a)* Egy háromismeretlenes inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza, ha az általános megoldás egyparaméteres; *b)* Egy háromismeretlenes inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza, ha az általános megoldás kétparaméteres.

Az inhomogén egyenletrendszer megoldásának szemléltetését a levéldiagramon a 3.8. ábra mutatja.

Az előző tétel szerint az inhomogén egyenletrendszer összes megoldása a homogén összes megoldásának – azaz $\mathcal{N}(\mathbf{A})$-nak – az inhomogén valamelyik megoldásával való eltoltja. Fontos látnunk, hogy mindegy melyik megoldást választjuk az inhomogén megoldásai közül, bár az eltolás mértéke változik, az eredmény ugyanaz lesz. Ezt jól szemlélteti a 3.7. ábra: ha az origón átmenő egyenes origónál lévő pontját nem $\mathbf{x}$-be, hanem az eltolt egyenes egy másik pontjába toljuk, akkor a két eltolt egyenes fedi egymást, vagyis a két affin altér azonos.



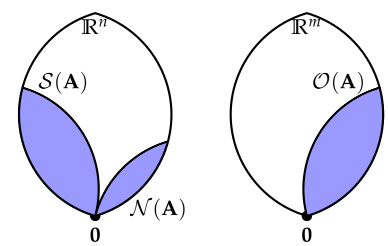
3.8. ábra: Az $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú homogén egyenletrendszer megoldása a nulltér, azaz $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, az inhomogéné e tér egy $\mathbf{x}_0 + \mathcal{N}(\mathbf{A})$ eltoltja, ahol $\mathbf{x}_0$ az inhomogén egyenletrendszer egy megoldása.

Azok a $\mathbf{b}$ vektorok, melyre az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ egyenletrendszer konzisztens, alteret alkotnak. Ezek ugyanis az oszlopmodell szerint épp azok a vektorok, melyek az együtthatómátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként előállnak.

3.17. DEFINÍCIÓ (SORTÉR, OSZLOPTÉR). *Egy mátrix oszlopvektorai által kifeszített alteret* oszloptérnek, *a sorvektorai által kifeszített alteret* sortérnek *nevezzük.* $\mathbf{A}$ *sorterét* $\mathcal{S}(\mathbf{A})$, *oszlopterét* $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ *jelöli.*

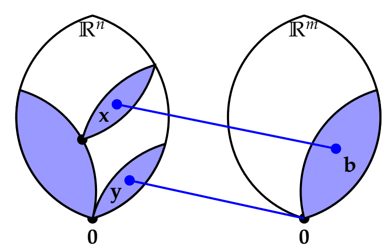
Az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ sortere $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ oszloptere $\mathbb{R}^m$ altere, azaz $\mathcal{S}(\mathbf{A}) \leqslant \mathbb{R}^n$, $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \leqslant \mathbb{R}^m$ (ld. 3.9. ábra). Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ és a $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ egyenletrendszerek megoldásainak kapcsolatát a 3.10. ábra szemlélteti.

Az oszlopmodellből adódik a következő állítás:



3.9. ábra: Az $\mathbf{A}$ mátrix sortere $(\mathcal{S}(\mathbf{A}))$, oszloptere $(\mathcal{O}(\mathbf{A}))$ és nulltere $(\mathcal{N}(\mathbf{A}))$.

3.18. KÖVETKEZMÉNY (INHOMOGÉN EGYENLETRENDSZER MEGOLDHATÓSÁGA). *Az* $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ *mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha* $\mathbf{b}$ *előáll az* $\mathbf{A}$ *oszlopainak lineáris kombinációjaként, azaz* $\mathbf{b}$ *benne van az* $\mathbf{A}$ *oszlopterében. A lineáris kombináció együtthatói megegyeznek a megoldásvektor koordinátáival.*



3.10. ábra: A nulltér, a sortér, és az oszloptér, valamint a homogén $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{0}$ és az inhomogén $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egy-egy megoldása a levéldiagramban.

3.19. PÉLDA (KIFESZÍTETT ALTÉR VEKTORAI). *Az* $\mathbf{u} = (-1, 2, -3, 6)$ *és* $\mathbf{w} = (-1, 2, -3, 4)$ *vektorok elemei-e a* $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, -2, 1)$ *és* $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 1)$ *vektorok által kifeszített altérnek? Ha igen, adjunk meg egy ezt bizonyító lineáris kombinációt!*

MEGOLDÁS. Az $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}$ és az $y_1\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2 + y_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{w}$ egyenletrendszereket kell megoldani. Ez egy négy egyenletből álló szimultán egyenletrendszer, amelynek bővített mátrixa a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{u}$ és $\mathbf{w}$ oszlopvektorokból áll. Ennek lépcsős alakja:

$$\left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 & 4 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

amiből $(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, -2)$, és $\mathbf{w}$ nem áll elő lineáris kombinációként, mert a jobb oldalán a $\mathbf{w}$ vektort tartalmazó egyenletrendszer ellentmondásos. □

Vektorok lineáris függetlensége A lineáris egyenletrendszerek megoldása és vektorok lineáris függetlenségével vagy összefüggőségével kapcsolatos kérdések szoros kapcsolatban vannak egymással.

Az előző 3.19. példa tanulsága úgy is összefoglalható, hogy egy $\mathbf{w}$ vektor pontosan akkor független az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektoraitól, vagyis az $\{ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \}$ vektorrendszertől, ha az $[\mathbf{A}|\mathbf{w}]$ egyenletrendszer nem oldható meg.

Egy $\{ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \}$ vektorrendszer lineáris függetlenségének eldöntéséhez meg kell oldani az

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

homogén lineáris egyenletrendszert. Ha van nemtriviális megoldása, akkor a vektorrendszer lineárisan összefüggő, egyébként lineárisan független. Ez igazolja az alábbi ekvivalenciákat:

3.20. KÖVETKEZMÉNY (LINEÁRIS FÜGGETLENSÉG ELDÖNTÉSE). *Tekintsük az* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_k \end{bmatrix}$ *mátrixot! Az alábbi állítások ekvivalensek:*

a) *az* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,..., $\mathbf{a}_k$ *vektorok lineárisan függetlenek;*

b) *az* $\mathbf{A}$ *együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszernek a triviálison kívül nincs más megoldása;*

c) *az* $\mathbf{A}$ *lépcsős alakjának minden oszlopában van főelem, azaz* $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = k$.

3.21. PÉLDA (VEKTOROK LINEÁRIS FÜGGETLENSÉGÉNEK ELDÖNTÉSE). *Mutassuk meg, hogy a 4-dimenziós* $(1, 2, 3, 4)$, $(0, 1, 0, 1)$ *és* $(1, 1, 1, 0)$ *vektorok lineárisan függetlenek.*

MEGOLDÁS. A vektorokból képzett mátrix és lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ami azt mutatja, hogy a homogén lineáris egyenletrendszernek csak egyetlen megoldása van, azaz az oszlopvektorok lineárisan függetlenek. □

Feladatok

3.1• IGAZ – HAMIS Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

a) Ha egy 10-ismeretlenes egyenletrendszer 6 egyenletből áll, akkor végtelen sok megoldása van.

b) Ha egy 10-ismeretlenes egyenletrendszer 6 egyenletből áll, azaz alulhatározott, akkor lehet, hogy végtelen sok megoldása van, de az is lehet, hogy csak egy.

c) Ha egy 10-ismeretlenes egyenletrendszer 20 egyenletből áll, azaz túlhatározott, akkor biztosan nem oldható meg!

d) Ha egy 10-ismeretlenes egyenletrendszer 20 egyenletből áll, akkor nem lehet végtelen sok megoldása.

3.2• ALTEREK TULAJDONSÁGAI: IGAZ – HAMIS

a) $\mathbb{R}^n$ bármely három alterének metszete altér.

b) Ha az $\mathcal{U}$ altér altere a $\mathcal{V}$ és a $\mathcal{W}$ altérnek is, akkor altere metszetüknek is.

c) Alterek egyesítése altér.

d) Minden altérnek eleme a zérusvektor.

e) Minden altérnek van legalább egy nemzérus vektora.

3.3• VEKTORTEREK ÉS EGYENLETRENDSZEREK: IGAZ – HAMIS

a) Egy lineáris egyenletrendszer megoldásai vektorteret alkotnak.

b) Egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai vektorteret alkotnak.

c) Rögzített $\mathbf{A}$ mátrix mellett vektorteret alkotnak azok a $\mathbf{b}$ vektorok, melyekre az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ egyenletrendszer konzisztens.

d) Egy egyenletrendszer megoldásvektorainak különbségeként kapott vektorok halmaza vektorteret alkot.

3.4• MEGOLDHATÓSÁG: IGAZ – HAMIS

a) Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathbf{b}$ előáll $\mathbf{A}$ oszlopainak lineáris kombinációjaként.

b) Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer bármely két megoldásának különbsége megoldása a homogén $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ egyenletrendszernek.

c) Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer bármely megoldása előáll a homogén $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ mátrixú egyenletrendszer két megoldásának különbségeként.

d) Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \le \mathrm{r}(\mathbf{A})$.

e) Az n-ismeretlenes $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$.

3.5. Alteret alkotnak-e az alábbi vektorhalmazok $\mathbb{R}^3$-ben?

a) $\{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| = 1 \,\}$

b) $\{\, (x,y,z) : x + 2y - 3z = 0 \,\}$

c) $\{\, (x,y,z) : x + 2y - 3z = 1 \,\}$

d) $\{\, (x,y,z) : x = 2t, y = t, z = 0, t \in \mathbb{R} \,\}$

e) $\{\, (x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 0 \,\}$

f) $\{\, (x,y,z) : x^3 + y^3 + z^3 = 0 \,\}$

3.6. Igazoljuk, hogy a $\mathcal{V}$ vektortér vektorainak egy $\mathcal{W}$ halmaza pontosan akkor altér $\mathcal{V}$-ben, ha $\mathcal{W}$-beli vektorok bármely lineáris kombinációja $\mathcal{W}$-beli.

3.7• Mennyi lehet az $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ rang, ha az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ bővített mátrixú egyenletrendszerről tudjuk, hogy

a) 2-ismeretlenes és megoldásainak száma végtelen;

b) inkonzisztens, és $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 4$;

c) egyetlen megoldása van és $\mathbf{A}$ 5×3-as;

d) inkonzisztens, n-ismeretlenes és 2 egyenletből áll.

3.8. Egy lineáris egyenletrendszerről tudjuk, hogy $(1,2,3)$ és $(0,1,3)$ is megoldásvektora. Adjuk meg további két megoldásvektorát! Mekkora lehet az együtthatómátrix rangja? És mekkora lehet e rang, ha az egyenletrendszer homogén?

3.9• INHOMOGÉN LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSAI Egy négyismeretlenes lineáris egyenletrendszer megoldását számítógéppel próbálom ellenőrizni, de más jön ki. A saját eredményem ez:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix},$$

a számítógépé ez:

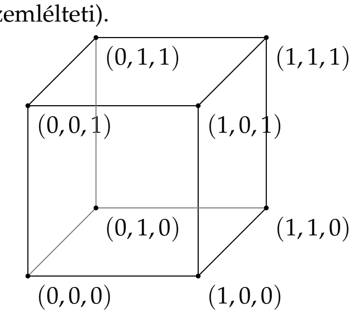
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Lehet-e mindkét eredmény jó?

3.10. MEGOLDÁSOK LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJA Adjunk új bizonyítást a 3.8. tételre a sormodellt használva.

3.11. HOMOGÉN ÉS INHOMOGÉN EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSAI Adjunk az oszlopmodellben megfogalmazott új bizonyítást a 3.16. tételre.

3.12. $\mathbb{F}_2^3$ ALTEREI Soroljuk fel $\mathbb{F}_2^3$ összes alterét (ehhez segítségül hívhatjuk az alábbi ábrát, mely az $\mathbb{F}_2^3$ vektortér vektorait szemlélteti).



Alterek tulajdonságai és az egyenletrendszerek

E szakaszban az alterek tulajdonságait, és az egyenletrendszerek kapcsán felmerülő alterek viszonyát vizsgáljuk. Különösen fontos az együtthatómátrixhoz tartozó négy kitüntetett altér kapcsolata.

Sor- és oszloptér Végigkövetjük, hogy mi történik egy mátrix sortérbeli és oszloptérbeli vektoraival az elemi sorműveletek közben.

3.22. tétel (Elemi sorműveletek hatása a sor- és oszlopvektorokra). *Elemi sorműveletek közben a sortér nem változik, az oszlopvektorok pedig megőrzik lineáris kapcsolataikat.*

Bizonyítás. Legyenek $\mathbf{A}$ sorvektorai $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ és legyen $\mathbf{u}$ a sortér egy tetszőleges vektora, azaz valamely $c_1, c_2, \ldots, c_m$ skalárokkal

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_m\mathbf{v}_m.$$

Megmutatjuk, hogy $\mathbf{u}$ a sortérben marad az elemi sorműveletek után is. A sorcserére ez nyilvánvaló. Ha egy sort (mondjuk az elsőt) beszorozzuk egy $d \neq 0$ skalárral, akkor

$$\mathbf{u} = \frac{c_1}{d}(d\mathbf{v}_1) + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_m\mathbf{v}_m,$$

a hozzáadás műveleténél (mondjuk az első sor d-szeresét adjuk a második sorhoz)

$$\mathbf{u} = (c_1 - c_2 d)\mathbf{v}_1 + c_2(\mathbf{v}_2 + d\mathbf{v}_1) + \ldots + c_m\mathbf{v}_m.$$

Tehát $\mathbf{u}$ minden esetben az új sortérnek is eleme. Az, hogy az új sortér nem bővebb, az igazolja, hogy minden sorművelet inverze is sorművelet, így az új sortér minden vektora az eredetinek is vektora.

Nyilvánvaló, hogy ha az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ oszlopvektorok közt az $\mathbf{a}_1 = c\mathbf{a}_2 + d\mathbf{a}_3$ lineáris kapcsolat van, akkor ez az elemi sorműveletek közben is megmarad, és ez ugyanígy igaz tetszőleges más lineáris kapcsolatra is. A sorművelet inverzének léte igazolja, hogy az oszlopok közti lineárisan függetlenség is megőrződik elemi sorműveletek közben. □

3.23. következmény (Mátrix lépcsős alakjának vektorai). *Legyen* $\mathbf{B}$ *az* $\mathbf{A}$ *mátrix egy lépcsős alakja. Ekkor*

1. $\mathbf{A}$ *és* $\mathbf{B}$ *sortere megegyezik,*
2. *az* $\mathbf{A}$ *oszlopvektorai közti lineáris kapcsolatok azonosak a* $\mathbf{B}$ *nekik megfelelő oszlopai köztiekkel,*
3. $\mathbf{B}$ *nemzérus sorvektorai lineárisan függetlenek,*
4. *a főelemek oszlopvektorai* $\mathbf{A}$*-ban és* $\mathbf{B}$*-ben is lineárisan függetlenek.*

A bizonyítást az Olvasóra hagyjuk (ld. a 3.13. feladatot).

Bázis Az elemi sorműveleteket alkalmazva, egy mátrix sorterében és oszlopterében is találtunk olyan lineárisan független vektorokat, melyek kifeszítik az adott teret. Azt már az 1.9. tételben megmutattuk, hogy a háromdimenziós tér tetszőleges három lineárisan független vektorának lineáris kombinációjaként a tér minden vektora előáll. Más szavakkal ez azt jelenti, hogy a tér három lineárisan független vektora kifeszíti a teret. Az ilyen vektorhármasokat, melyeket egy koordinátarendszer alapvektorainak vettünk, bázisnak neveztük. Ezek vezetnek a következő definícióhoz.

3.24. DEFINÍCIÓ (BÁZIS). *A $\mathcal{V}$ vektortér* bázisán *olyan vektorrendszert értünk, mely*
1. *lineárisan független és*
2. *kifeszíti a $\mathcal{V}$ teret (azaz* generátorrendszer*).*

► A *standard bázis* $\mathbb{R}^n$ egy n-elemű bázisa.

► Meg fogjuk mutatni, hogy $\mathbb{R}^n$ minden bázisa n-elemű, és hogy bármely nem triviális alterének bázisa n-nél kevesebb elemű.

► A bázis elemeit gyakran nem egy rendezetlen halmazban, hanem rendezve adjuk meg és használjuk. Szokás ilyenkor *rendezett bázisról* beszélni, de a gyakorlatban leggyakrabban elhagyjuk ezt a jelzőt.

► Ha véletlenszerűen és egymástól függetlenül (pl. egy egységgömbből, vagy az egységvektorok közül) egyenletes eloszlás szerint választunk $\mathbb{R}^n$-ben n vektort, akkor e vektorok 1 valószínűséggel függetlenek lesznek, azaz bázist alkotnak.

► A zérustér bázisa az üreshalmaz, mivel e térből kiválasztható egyetlen vektort, a zérusvektort nem tartalmazhatja lineárisan független rendszer. Ahogy nulla darab szám összegét hasznos 0-nak, nulla darab szám szorzatát 1-nek definiálni, hasonlóképp hasznos nulla darab vektor összegét (vagy bármely más lineáris kombinációját) nullvektornak definiálni, így az üres vektorhalmaz által generált vektorrendszer a zérusvektorból áll.

3.25. ÁLLÍTÁS (BÁZIS EKVIVALENS DEFINÍCIÓI). *Legyen $\mathcal{V}$ egy tetszőleges vektortér, és legyen $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\} \subseteq \mathcal{V}$ vektorok egy halmaza. A következő állítások ekvivalensek:*
1. *$\mathcal{B}$ bázis (lineárisan független generátorrendszer);*
2. *$\mathcal{B}$ minimális méretű generátorrendszer (kifeszíti $\mathcal{V}$-t);*
3. *$\mathcal{B}$ maximális méretű lineárisan független vektorokból álló halmaz $\mathcal{V}$-ben.*

BIZONYÍTÁS. Elég belátnunk, hogy egy minimális méretű generátorrendszer független vektorokból áll, és hogy egy maximális méretű független rendszer generátor.

Legyen $\mathcal{B}$ minimális méretű generátor. Ha nem volna független, akkor belőle kiválasztva független vektorokat, mely ugyanazt a teret generálja egy még kisebb méretű generátort kapnánk.

Legyen most $\mathcal{B}$ egy maximális független rendszer. Ha nem volna generátor, akkor hozzávehetnénk tőle független vektort, vagyis volna nála nagyobb méretű független halmaz. □

Bázis és vektor rá vonatkozó koordinátás alakjának maghatározása A következőkben megvizsgáljuk, hogy hogyan írható fel egy (al)tér bázisa, és egy vektor erre vonatkozó koordinátás alakja.

3.26. PÉLDA (ALTÉR BÁZISÁNAK MEGHATÁROZÁSA). *Határozzuk meg az $(1,1,0,-2)$, $(2,3,3,-2)$, $(1,2,3,0)$ és $(1,3,6,2)$ vektorok által kifeszített altér egy bázisát!*

MEGOLDÁS. *Első megoldás:* A megadott vektorokból, mint sorvektorokból képzett mátrix valamely sorlépcsős alakjának nemnulla sorai az altér egy bázisát adják:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A bázis vektorai $(1,1,0,-2)$, $(0,1,3,2)$.

Második megoldás: Ha a bázist az adott vektorokból akarjuk kiválasztani, akkor képezzünk egy mátrixot e vektorokból, mint oszlopvektorokból. Lépcsős alakjában a főelemek oszlopai lineárisan független vektorok. A nekik megfelelő oszlopvektorok az eredeti mátrixban az oszloptér bázisát alkotják (ld. a 3.22. tételt és a 3.23. következmény 4. pontjának állítását).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tehát az adott négy vektor közül az első kettő, azaz az $(1,1,0,-2)$ és $(2,3,3,-2)$ vektorok bázist alkotnak. Ha a megadott vektorokat más sorrendben írjuk a mátrixba, másik bázist kaphatunk. □

3.27. PÉLDA (VEKTOR FELÍRÁSA A BÁZISVEKTOROK LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJAKÉNT). *Az előző feladatban megadott négy vektor mindegyikét fejezzük ki az általuk kifeszített altér bázisvektorainak lineáris kombinációjaként!*

MEGOLDÁS. Az előző feladat második megoldásában találtunk egy bázist a megadott vektorok közül. Mivel az oszlopvektorokkal dolgoztunk, a vektorok közti lineáris kapcsolat leolvasható bármelyik lépcsős alakból: legkényelmesebben a *redukált* lépcsős alakból. Folytatjuk tehát az előző példabeli eliminációs lépéseket:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

A redukált lépcsős alakból látjuk, hogy például a harmadik oszlop a második és az első különbsége. Ezek alapján az eredeti vektoroknak a bázisvektorok lineáris kombinációiként való felírása:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = -3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Másik bázis választására lásd a 3.15. feladatot. □

A koordináta-rendszer bevezetésénél ugyanazt tettük, mint itt az előző példában: minden vektor előállítható egy bázis elemeinek lineáris kombinációjaként, és e vektor koordinátás alakja erre a bázisra vonatkozóan a lineáris kombináció konstansaiból áll.

Egy vektortérben több bázist is vizsgálhatunk, és a vektorok koordinátás alakjai különbözhetnek a különböző bázisokban. Félreértések elkerülésére a bázis jelét a koordinátás alak indexében jelöljük. Például ha egy $\mathbf{v}$ vektor standard bázisbeli és $\mathcal{B}$ bázisbeli koordinátás alakjai $(4, 3)$, illetve $(0, 5)$, akkor azt írjuk, hogy

$$\mathbf{v} = (4, 3) = (0, 5)_{\mathcal{B}}, \text{ vagy mátrixjelöléssel } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Ha általában akarunk utalni – a konkrét koordináták nélkül – egy $\mathbf{v}$ vektor $\mathcal{B}$ bázisbeli koordinátás alakjára, akkor a $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ vagy a $(\mathbf{v})_{\mathcal{B}}$ alakot használjuk. Így írhatjuk azt is, hogy

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \text{ vagy egyszerűbben, hogy } [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

3.28. PÉLDA (VEKTOR KOORDINÁTÁS ALAKJA A $\mathcal{B}$ BÁZISBAN). *Írjuk fel a 3.26. és a 3.27. példákban is szereplő* $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0, -2)$, $\mathbf{v}_2 = (2, 3, 3, -2)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 2, 3, 0)$ *és* $\mathbf{v}_4 = (1, 3, 6, 2)$ *vektorok által kifeszített altérben e négy vektor* $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ *bázisra vonatkozó koordinátás alakját!*

MEGOLDÁS. Az előző példában a (3.1) képletbeli redukált lépcsős alak nemzérus soraiból álló

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix azt mutatja, hogy az $\mathcal{B}$ bázisban e négy vektor koordinátái rendre

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

Ez a 3.23. állítás 2. pontjából következik, mely szerint a redukált lépcsős alak oszlopai közti lineáris kapcsolatok megegyeznek az eredeti mátrix oszlopai közti lineáris kapcsolatokkal. □

Dimenzió és rang Az előzőekben bázist kerestünk egy vektortérhez. Azt tapasztaltuk, hogy a bázis mindig ugyanannyi vektorból állt.

3.29. TÉTEL (BÁZIS-TÉTEL). *Ha a $\mathcal{V}$ vektortérnek van véges sok vektorból álló bázisa, akkor bármely két bázisa azonos számú vektorból áll.*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{V}$ vektortérnek

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}, \text{ és } \mathcal{C} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_r\},$$

két bázisa, melyek nem ugyanannyi vektorból állnak, azaz például $k < r$. Mivel $\mathcal{B}$ bázis $\mathcal{V}$-ben, ezért a $\mathcal{C}$ bázis vektorai is kifejezhetők lineáris kombinációikként, azaz léteznek olyan a_{ij} skalárok, hogy

$$\mathbf{w}_i = a_{i1}\mathbf{v}_1 + a_{i2}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{ik}\mathbf{v}_k, \quad (i = 1, \dots, r). \tag{3.2}$$

Mivel a $\mathcal{C}$ bázis vektorai lineárisan függetlenek, ezért a

$$c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \dots + c_r\mathbf{w}_r = \mathbf{0} \tag{3.3}$$

egyenlőség csak a $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ konstansokra áll fenn. A (3.2) egyenlőségeit a (3.3) egyenletbe helyettesítve

$$\begin{aligned} c_1(a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{12}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{1k}\mathbf{v}_k) + c_2(a_{21}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{2k}\mathbf{v}_k) + \\ \dots + c_r(a_{r1}\mathbf{v}_1 + a_{r2}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{rk}\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

aminek $\mathcal{B}$ vektorai szerinti rendezése után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \dots + a_{r1}c_r)\mathbf{v}_1 + (a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{r2}c_r)\mathbf{v}_2 + \\ \dots + (a_{1k}c_1 + a_{2k}c_2 + \dots + a_{rk}c_r)\mathbf{v}_k = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy a homogén lineáris

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \dots + a_{r1}c_r &= 0 \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{r2}c_r &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{1k}c_1 + a_{2k}c_2 + \dots + a_{rk}c_r &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek a $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ az egyetlen megoldása. Ez viszont a 3.6. tétel szerint nem teljesülhet, mivel a fenti homogén egyenletrendszer egyenleteinek száma kisebb ismeretlenjei számánál ($k < r$). Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy indirekt feltevésünk helytelen volt, tehát a két bázis azonos számú vektorból áll. □

E tétel értelmet ad a következő definíciónak:

3.30. DEFINÍCIÓ (DIMENZIÓ). *Ha a $\mathcal{V}$ vektortérnek van véges bázisa, akkor* dimenzióján *egy bázisának elemszámát értjük, melyet* $\dim \mathcal{V}$ *jelöl.*

► Az $\mathbb{R}^n$ standard bázisa épp n vektorból áll, így $\dim \mathbb{R}^n = n$.
► A zérustér bázisa az üreshalmaz, ami 0 darab elemből áll, így e teret nulldimenziósnak tekintjük.
► Ha a háromdimenziós térben tekintünk egy origón átmenő síkot, látjuk, hogy bármely két független vektora kifeszíti, azaz minden bázisa kételemű. E sík e definíció szerint is 2-dimenziós.
► Hasonlóan egy origón átmenő egyenest minden nemnulla vektora, mint egyelemű bázisa, kifeszíti. Ez a térnek 1-dimenziós altere.

Az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix *transzponáltján* azt az $\mathbf{A}^\mathsf{T}$-vel jelölt $n \times m$-es mátrixot értjük, amelyet az $\mathbf{A}$ sorainak és oszlopainak felcserélésével kapunk. Azaz

$$\mathbf{A}^\mathsf{T} = [a_{ij}]^\mathsf{T} := [a_{ji}].$$

Például

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Adott véges sok $\mathbb{R}^n$-beli vektor által kifeszített altér dimenzióját úgy határozhatjuk meg, hogy meghatározzuk a vektorokból képzett mátrix rangját. Igaz ugyanis a következő állítás:

3.31. ÁLLÍTÁS (DIMENZIÓ = RANG). *Egy mátrix rangja, sorterének dimenziója és oszlopterének dimenziója megegyezik, azaz* $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \dim(\mathcal{S}(\mathbf{A})) = \dim(\mathcal{O}(\mathbf{A}))$. *Ebből következőleg* $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$.

BIZONYÍTÁS. A mátrix rangja megegyezik a lépcsős alakjában lévő nemzérus sorainak számával. A 3.23. tétel szerint viszont e sorok lineárisan függetlenek és kifeszítik a sorteret, tehát bázist alkotnak, így számuk a sortér dimenzióját adja. Az oszloptérről láttuk, hogy a főelemeknek megfelelő oszlopok az eredeti mátrixban lineárisan függetlenek és kifeszítik az oszlopteret, tehát e tér dimenziója is a mátrix rangjával egyezik meg. Az utolsó állítás abból következik, hogy $\mathbf{A}$ sortere megegyezik $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ oszlopterével. □

Egy $\mathbb{R}^n$-beli vektorokból álló vektorrendszer *rangján* a vektorokból képzett mátrix rangját, vagy ami ezzel egyenlő, az általuk kifeszített altér dimenzióját értjük. Egy $\mathbf{A}$ mátrix $\mathrm{null}(\mathbf{A})$-val jelölt *nullitásán* nullterének dimenzióját értjük, tehát $\mathrm{null}(\mathbf{A}) = \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A}))$.

3.32. PÉLDA (DIMENZIÓ KISZÁMÍTÁSA). *Határozzuk meg az* **A** *mátrix sorterének és nullterének dimenzióját!*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

MEGOLDÁS. Az **A** redukált lépcsős alakja

$$\operatorname{rref}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Innen leolvasható, hogy a mátrix rangja 2, így sorterének dimenziója is 2. A nulltér dimenziója megegyezik az egyenletrendszer megoldásterének dimenziójával, ami megegyezik a szabad változók számával, esetünkben ez 3. Vegyük észre, hogy a sortér és a nulltér dimenziójának összege megegyezik a változók számával, azaz a mátrix oszlopainak számával, jelen példában 5-tel. □

3.33. TÉTEL (DIMENZIÓTÉTEL (RANG-NULLITÁSI TÉTEL)). *Bármely valós $m \times n$-es* **A** *mátrix esetén a sortér dimenziójának és a nulltér dimenziójának összege n. Képlettel:*

$$\dim(\mathcal{S}(\mathbf{A})) + \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = n \qquad (\mathrm{r}(\mathbf{A}) + \mathrm{null}(\mathbf{A}) = n)\,.$$

BIZONYÍTÁS. A mátrix sorterének dimenziója megegyezik a mátrix rangjával, azaz az $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ mátrixú egyenletrendszerben a kötött változók számával. Megmutatjuk, hogy a nulltér dimenziója megegyezik a szabad változók számával, így e két szám összege valóban n, ami bizonyítja az állítást (ld. még a 3.4. állítást).

Elég tehát megmutatnunk, hogy egy homogén lineáris egyenletrendszer redukált lépcsős alakkal előállított megoldásában a szabad változók száma megegyezik a nulltérből kiválasztható bázis elemszámával. Először lássunk egy ilyen megoldást konkrétan. Például a 2.35. példabeli homogén lineáris egyenletrendszer megoldása

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ahol $x_2 = s$, $x_4 = t$ és $x_5 = u$ a három szabad változó. A nullteret kifeszítő három vektor közül az elsőben $x_2 = 1$, de az összes többiben

$x_2 = 0$, így az első vektor független a többitől. Hasonlóképp általában is igaz, hogy a redukált lépcsős alakból való származtatás következtében a nullteret kifeszítő minden megoldásvektorban az összes szabad változóhoz tartozó koordináta 0, azt az egyet kivéve, amelyikhez a vektor tartozik. Így viszont mindegyik vektor független a többitől, vagyis e vektorok függetlenek, és mivel kifeszítik a nullteret, számuk megadja a nulltér dimenzióját. □

Mátrix kitüntetett alterei és a lineáris algebra alaptétele Definiálni fogjuk mátrix négy kitüntetett alterét és igazoljuk azok merőlegességét.

3.34. PÉLDA (VEKTOROKRA MERŐLEGES ALTÉR). *Határozzuk meg az összes olyan vektort $\mathbb{R}^4$-ben, mely merőleges a $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 2)$ és $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, -2, 1)$ vektorok mindegyikére!*

MEGOLDÁS. Olyan $\mathbf{x}$ vektort keresünk, melyre $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x} = 0$ és $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x} = 0$. Ezt koordinátákkal felírva egy két egyenletből álló egyenletrendszert kapunk, melynek együtthatómátrixa és annak egy lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

amiből $\mathbf{x} = (-s - 2t, (s - 3t)/2, s, t)$, azaz

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A megoldás tehát a sorvektorokból képzett mátrix nulltere. □

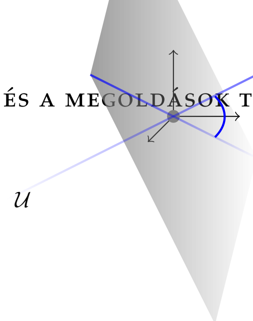
3.35. ÁLLÍTÁS (A SORTÉR ÉS A NULLTÉR MERŐLEGESSÉGE). *A valós $\mathbf{A}$ mátrix sorterének bármely $\mathbf{s}$ vektora és nullterének tetszőleges $\mathbf{x}$ vektora merőleges egymásra, azaz $\mathbf{s} \cdot \mathbf{x} = 0$.*

BIZONYÍTÁS. Az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer i-edik egyenletének alakja

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = 0, \text{ azaz } \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = 0.$$

Eszerint a homogén lineáris egyenletrendszer minden megoldása merőleges az $\mathbf{A}$ mátrix minden sorvektorára. A sortér minden vektora az $\mathbf{A}$ sorvektorainak valamely $c_1, \ldots, c_m$ skalárokkal vett lineáris kombinációja. Ezt felhasználva

$$\begin{aligned} \mathbf{s} \cdot \mathbf{x} &= (c_1\mathbf{a}_{1*} + c_2\mathbf{a}_{2*} + \cdots + c_m\mathbf{a}_{m*}) \cdot \mathbf{x} \\ &= c_1\mathbf{a}_{1*} \cdot \mathbf{x} + c_2\mathbf{a}_{2*} \cdot \mathbf{x} + \cdots + c_m\mathbf{a}_{m*} \cdot \mathbf{x} \\ &= c_1 0 + c_2 0 + \cdots + c_m 0 = 0. \end{aligned}$$ □



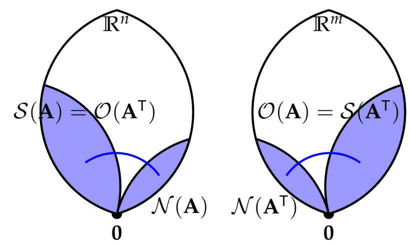
b)

3.11. ábra: *a)* $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ két egymásra merőleges 1-dimenziós altér a 3-dimenziós térben; *b)* Egy altér és merőleges kiegészítő altere: $\mathcal{U}$ (egy 1-dimenziós altér) és $\mathcal{U}^\perp$, a merőlegese 2-dimenziós.

Ez a következő definíciókra vezet: egy vektortér két altere *merőleges*, ha bárhogy választva mindegyikükből egy-egy vektort, azok merőlegesek egymásra. Így az előző állítás szerint bármely valós mátrix sortere és nulltere merőleges egymásra. Ennél több is igaz, a nulltér az összes olyan vektort tartalmazza, mely merőleges a sortérre. Az $\mathbb{R}^n$ egy $\mathcal{W}$ alterére merőleges vektorok alterét a $\mathcal{W}$ *merőleges kiegészítő alterének* (vagy $\mathcal{W}$ *merőlegesének*) nevezzük és $\mathcal{W}^\perp$-pel jelöljük. A két fogalom közti különbséget a 3.11. ábra a 3-dimenziós térben szemlélteti.

Később látni fogjuk, hogy általánosan is igaz az, hogy bármely $\mathcal{V}$ altérre $(\mathcal{V}^\perp)^\perp = \mathcal{V}$ (ld. 7.43. tétel), vagy másként fogalmazva, ha $\mathcal{V}^\perp = \mathcal{W}$, akkor $\mathcal{W}^\perp = \mathcal{V}$. Így mondhatjuk azt, hogy két altér merőleges kiegészítő alterei, vagy merőlegesei egymásnak.

Tekintsük az $\mathbf{A}$ mátrix transzponáltját! Az $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai merőlegesek $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ sorvektoraira, azaz az $\mathbf{A}$ oszlopvektoraira. E két-két altér merőlegességét szemlélteti a 3.12. ábra. E négy altér igen fontos lesz a továbbiakban is, ezért nevet is adunk nekik:

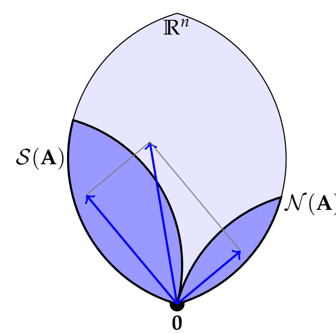


3.12. ábra: Az $\mathbf{A}$ mátrix sortere merőleges nullterére, oszloptere az $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ nullterére. A berajzolt két ív az alterek merőlegességét jelöli.

3.36. DEFINÍCIÓ (KITÜNTETETT ALTEREK). *Egy mátrix* négy kitüntetett alterének *nevezzük a mátrix sorterét, oszlopterét, nullterét és transzponáltjának nullterét. Az* $\mathbf{A}$ *mátrix kitüntetett alterei tehát* $\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, $\mathcal{O}(\mathbf{A}) = \mathcal{S}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$.

3.37. TÉTEL (A LINEÁRIS ALGEBRA ALAPTÉTELE). *Minden valós mátrix sortere és nulltere merőleges kiegészítő alterei egymásnak.*

BIZONYÍTÁS. Láttuk, hogy a sortér merőleges kiegészítő altere a nulltér. A később bizonyítandó 7.43. tételre hivatkozva ez azt jelenti, hogy a nulltér kiegészítő altere a sortér, ami bizonyítja a tételt. E hivatkozást nem használó bizonyítás is adható, amit az Olvasóra hagyunk (ld. 3.27. feladat)! □



3.13. ábra: A lineáris algebra alaptétele: az $\mathbf{A}$ mátrix sortere és nulltere merőleges kiegészítő alterek. Eszerint a sortér bármely vektora merőleges a nulltér bármely vektorára, és $\mathbb{R}^n$ bármely vektora egyértelműen felbomlik egy sortérbe és egy nulltérbe eső vektor összegére.

► A tétel állítása képletben kifejezve azt mondja, hogy $\mathcal{S}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A})$, ami egyúttal azt is jelenti, hogy $\mathcal{N}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{S}(\mathbf{A})$.

► A tételt az $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ mátrixra alkalmazva, és az $\mathcal{O}(\mathbf{A}) = \mathcal{S}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ összefüggést használva kapjuk, hogy $\mathcal{O}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$.

► A 3.27. feladatban bizonyítjuk, hogy a sortér egy $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_k\}$ bázisa és a nulltér egy $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n-k}\}$ bázisa együtt a tér bázisát adják. Mivel minden $\mathbf{x}$ vektor egyértelműen áll elő e bázisvektorok lineáris kombinációjaként, egyúttal egyértelmű az $\mathbf{x}$ vektornak egy sortérbe és egy nulltérbe eső vektor összegére való bontása is:

$$\mathbf{x} = \underbrace{c_1\mathbf{s}_1 + \cdots + c_r\mathbf{s}_r}_{\mathbf{c}} + \underbrace{d_1\mathbf{e}_1 + \cdots + d_{n-r}\mathbf{e}_{n-r}}_{\mathbf{d}}.$$

Az előző megjegyzések és a lineáris algebra alaptételének következménye az alábbi tétel:

3.38. TÉTEL (A NÉGY KITÜNTETETT ALTÉR). *Tekintsük az $m \times n$-es valós $\mathbf{A}$ mátrixot. Ekkor a következő állítások teljesülnek:*
a) $\mathcal{S}(\mathbf{A})^{\perp} = \mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{O}(\mathbf{A})^{\perp} = \mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$.
b) $\mathbb{R}^n$ *minden vektora egyértelműen felbomlik egy* $\mathcal{S}(\mathbf{A})$*- és egy* $\mathcal{N}(\mathbf{A})$*-beli vektor összegére,*
c) $\mathbb{R}^m$ *minden vektora egyértelműen felbomlik egy* $\mathcal{O}(\mathbf{A})$*- és egy* $\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{T}})$*-beli vektor összegére.*

A lineáris egyenletrendszer megoldásainak jellemzése Az eddigiekre építve szép leírását kapjuk a lineáris egyenletrendszerek megoldásainak.

3.39. TÉTEL (LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSAI). *Minden valós együtthatós konzisztens lineáris egyenletrendszerre igazak a következők:*
a) egyetlen megoldása esik az együtthatómátrix sorterébe;
b) e sortérbe eső megoldás a megoldások közül a legkisebb abszolút értékű;
c) az összes megoldás előáll úgy, hogy a sortérbe eső megoldáshoz hozzáadjuk a homogén rész összes megoldását.

BIZONYÍTÁS. A tétel a homogén lineáris egyenletrendszerekre semmitmondó, hisz ekkor a megoldások a nullteret adják, és mivel annak metszete a sortérrel csak a nullvektorból áll, csak a nullvektor esik a sortérbe, mely a legkisebb abszolút értékű megoldás.

a) Tegyük fel, hogy $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ két megoldása az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszernek, és mindkettő a sortérbe esik. Az i-edik egyenlet alakja $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = b_i$, így $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x}_1 = b_i$ és $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x}_2 = b_i$ is fönnáll minden $i = 1, 2, \ldots m$ értékre. A két megoldás különbsége is a sortérbe esik, hisz sortérbeli vektorok lineáris kombinációja a sortérbe esik. Ekkor viszont minden i esetén

$$\mathbf{a}_{i*} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = b_i - b_i = 0,$$

vagyis $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ megoldása a homogén egyenletrendszernek, tehát a nulltérbe esik. Annak metszete a sortérrel csak a nullvektort tartalmazza, így $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, vagyis $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Megmutatjuk, hogy mindig van sortérbe eső megoldás. Legyen $\mathbf{x}$ egy tetszőleges megoldás, és tekintsük az egyértelműen létező felbontását egy sortérbeli és egy nulltérbeli vektor összegére, azaz legyen

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\mathcal{S}} + \mathbf{x}_{\mathcal{N}}.$$

E megoldásvektort beírva az i-edik egyenletbe kapjuk, hogy

$$b_i = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a}_{i*} \cdot (\mathbf{x}_{\mathcal{S}} + \mathbf{x}_{\mathcal{N}}) = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x}_{\mathcal{S}} + \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x}_{\mathcal{S}}.$$

Tehát bármely megoldás sortérbeli összetevője is megoldása az egyenletrendszernek! Egyúttal azt is beláttuk, hogy az összes megoldás e sortérbeli megoldás és a homogén egy megoldásának összege, másrészt hogy az $\mathbf{x}_\mathcal{S}$ megoldáshoz bármely nulltérbeli vektort adva az egyenletrendszer egy megoldását kapjuk, így igazoltuk a *c)* állítást is.

A sortér és a nulltér merőlegessége miatt az $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\mathcal{S} + \mathbf{x}_\mathcal{N}$ felbontás vektorai merőlegesek, azaz $\mathbf{x}_\mathcal{S} \perp \mathbf{x}_\mathcal{N}$. Használhatjuk tehát Pithagorász-tételét:

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}_\mathcal{S}^2 + \mathbf{x}_\mathcal{N}^2 \geq \mathbf{x}_\mathcal{S}^2, \text{ azaz } |\mathbf{x}| \geq |\mathbf{x}_\mathcal{S}|.$$

Így tehát minden megoldás abszolút értéke nagyobb vagy egyenlő a sortérbeli megoldás abszolút értékénél, ami bizonyítja a *b)* állítást. □

A sortérbe eső egyetlen megoldás létezése azt sugallja, hogy minden megoldható egyenletrendszer további egyenletek hozzávételével kiegészíthető olyan egyenletrendszerré, melynek már csak egyetlen megoldása van, a sortérbe eső. Ez valóban igaz.

3.40. PÉLDA (LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER SORTÉRBE ESŐ MEGOLDÁSA). *Határozzuk meg az*

$$\begin{aligned} x + y + z + 3u + 2w &= 4 \\ x + 2y + z + 5u + 2w &= 5 \\ 2x + 3y + z + 8u + 3w &= 7 \\ 2x + 3y + 2z + 8u + 4w &= 9 \end{aligned}$$

egyenletrendszer minimális abszolút értékű megoldását! Adjunk az egyenletrendszerhez olyan további egyenlet(ek)et, hogy az így kapott egyenletrendszernek csak ez legyen az egyetlen megoldása!

MEGOLDÁS. Először oldjuk meg az egyenletrendszert! A bővített mátrixból annak redukált lépcsős alakja könnyen adódik:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 8 & 4 & 9 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Így a megoldás:

$$(x, y, z, u, w) = (1, 1, 2, 0, 0) + (-1, -2, 0, 1, 0)u + (-1, 0, -1, 0, 1)w.$$

Mivel a sortér merőleges a nulltérre, és mi egy sortérbe eső megoldást keresünk, ezért e megoldásnak merőlegesnek kell lennie a nullteret kifeszítő vektorokra, vagyis a $(-1, -2, 0, 1, 0)$ és a $(-1, 0, -1, 0, 1)$ vektorra. Így a következő két egyenletet kell az eredeti egyenletrendszerhez, vagy az egyszerűség kedvéért inkább a redukált lépcsős alak szerinti egyenletrendszerhez adni:

$$\begin{aligned} -x - 2y \quad\quad + u \quad\quad &= 0 \\ -x \quad\quad - z \quad\quad + w &= 0 \end{aligned}$$

Így a kiegészített egyenletrendszer bővített mátrixa és annak redukált lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4/17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5/17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 19/17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6/17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 15/17 \end{bmatrix},$$

tehát a keresett megoldás $(-4/17, 5/17, 19/17, 6/17, 15/17)$. □

*Elemi bázistranszformáció** Az előző paragrafusokban azt láttuk, hogy az elemi sorműveletek eredményeként az eredeti mátrix oszlopainak egy másik bázisban felírt koordinátás alakját kapjuk meg. Ez adja az ötletet ahhoz, hogy más nézőpontból lássuk, mi történik, ha egy oszlopban főelemet választunk, és az oszlop többi elemét elimináljuk.

A lényeg egy kétoszlopos mátrixon is szemléltethető: a két oszlop legyen **a** és **b**, a bázis, melyben e vektorok meg vannak adva, a standard bázis. Tegyük fel, hogy $a_i \neq 0$. Ekkor az a_i pozícióját választva, a kiküszöbölés eredménye:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_i & b_i \\ \vdots & \vdots \\ a_m & b_m \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & b_1 - \frac{b_i}{a_i} a_1 \\ 0 & b_2 - \frac{b_i}{a_i} a_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{b_i}{a_i} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & b_m - \frac{b_i}{a_i} a_m \end{bmatrix}$$

Megmutatjuk, hogy e transzformáció után mindkét vektor az

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{a}, \mathbf{e}_{i+1}, \ldots, \mathbf{e}_m$$

bázisban lett felírva. Az **a** vektorra ez nyilvánvaló. Nézzük a **b** vektort! Fejezzük ki az $\mathbf{e}_i$ vektort az $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_i\mathbf{e}_i + \ldots + a_m\mathbf{e}_m$ felírásból:

$$\mathbf{e}_i = -\frac{1}{a_i} a_1 \mathbf{e}_1 - \frac{1}{a_i} a_2 \mathbf{e}_2 - \ldots + \frac{1}{a_i}\mathbf{a} - \ldots - \frac{1}{a_i} a_m \mathbf{e}_m.$$

Ezt behelyettesítjük a $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + \ldots + b_i\mathbf{e}_i + \ldots + b_m\mathbf{e}_m$ kifejezésbe:

$$\mathbf{b} = (b_1 - \frac{b_i}{a_i} a_1)\mathbf{e}_1 + (b_2 - \frac{b_i}{a_i} a_2)\mathbf{e}_2 + \ldots + \frac{b_i}{a_i}\mathbf{a} + \ldots + (b_m - \frac{b_i}{a_i} a_m)\mathbf{e}_m.$$

Tehát valóban, a $\mathbf{b}$ koordinátás alakja e módosított bázisban épp az, amit az eredeti mátrix eliminálása után kaptunk a második oszlopban. Az imént tárgyalt lépést *elemi bázistranszformációnak* nevezzük, mert egy másik bázisra való áttérés egy elemi lépésének tekintjük, amikor egyetlen bázisvektort cserélünk ki. A lépések jelzésére a mátrixot fejléccel együtt egy táblázatba írjuk, a sorok elé az $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ bázisvektorok, az oszlopok fölé az oszlopvektorok neve kerül.

$$\begin{array}{c|cc} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \mathbf{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{e}_i & a_i & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{e}_m & a_m & b_m \end{array} \quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{c|cc} & \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{e}_1 & 0 & b_1 - \frac{b_i}{a_i}a_1 \\ \mathbf{e}_2 & 0 & b_2 - \frac{b_i}{a_i}a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a} & 1 & \frac{b_i}{a_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{e}_m & 0 & b_m - \frac{b_i}{a_i}a_m \end{array}$$

Összefoglalva és egyúttal általánosabban megfogalmazva a fentieket:

3.41. TÉTEL (ELEMI BÁZISTRANSZFORMÁCIÓ). *Tegyük fel, hogy az* $\mathbf{a}$ *vektor* $E = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ *bázisra vonatkozó i-edik koordinátája* $a_i \neq 0$. *Ekkor az E által generált* $\mathcal{E}$ *altérnek az*

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{a}, \mathbf{e}_{i+1}, \ldots, \mathbf{e}_m$$

vektorok is bázisát alkotják. Az $\mathcal{E}$ *egy tetszőleges b vektorának koordinátás alakja megkapható e bázisban elemi sorműveletekkel, ha* a_i*-t választjuk főelemnek.*

Az elemi bázistranszformáció alkalmas arra, hogy a bázisok változásán keresztül egy más nézőpontból világítsa meg a redukált lépcsős alakra hozással megoldható feladatokat. Példaként vizsgáljuk meg, mi történik egy egyenletrendszer megoldásakor. Megjegyezzük, hogy itt nincs szükség sorcserére, mert egy oszlopból szabadon választhatunk olyan sort, amelynek fejlécében még az eredeti bázisvektor szerepel.

3.42. PÉLDA (EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA ELEMI BÁZISTRANSZFORMÁCIÓVAL). *Oldjuk meg a 2.32. és a 2.39. példában megoldott egyenletrendszert elemi bázistranszformációval.*

MEGOLDÁS. A táblázatokat egybefűzzük, a sorok fejlécein mindig jelezzük az aktuális bázist, az oszlopok fejléceit a jobb érthetőség végett mindig kiírjuk, a kiválasztott főelemeket külön jelöljük:

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{b}$
$\mathbf{e}_1$	1	1	2	0
$\mathbf{e}_2$	2	2	3	2
$\mathbf{e}_3$	1	3	3	4
$\mathbf{e}_4$	1	2	1	5

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{b}$
$\mathbf{a}_1$	1	1	2	0
$\mathbf{e}_2$	0	0	-1	2
$\mathbf{e}_3$	0	2	1	4
$\mathbf{e}_4$	0	1	-1	5

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{b}$
$\mathbf{a}_1$	1	0	3	-5
$\mathbf{e}_2$	0	0	-1	2
$\mathbf{e}_3$	0	0	3	-6
$\mathbf{a}_2$	0	1	-1	5

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{b}$
$\mathbf{a}_1$	1	0	0	1
$\mathbf{e}_2$	0	0	0	0
$\mathbf{a}_3$	0	0	1	-2
$\mathbf{a}_2$	0	1	0	3

A táblázaton kicsit lehet egyszerűsíteni, azt az oszlopot, amelyben már csak egy standard egységvektor van, felesleges kiírni, az oszlopok és a sorok fejléceibe pedig elég csak azt a változót írni, amelyik a bázisba vett oszlopvektorhoz tartozik. Így a következőt kapjuk:

x	y	z	$\mathbf{b}$
1	1	2	0
2	2	3	2
1	3	3	4
1	2	1	5

	y	z	$\mathbf{b}$
x	1	2	0
	0	-1	2
	2	1	4
	1	-1	5

	z	$\mathbf{b}$
x	3	-5
	-1	2
	3	-6
y	-1	5

	$\mathbf{b}$
x	1
	0
z	-2
y	3

Az egyenletrendszer megoldása tehát $x = 1$, $y = 3$, $z = -2$. □

Feladatok

3.13. A LÉPCSŐS ALAK VEKTORAI Igazoljuk a 3.23. következményt: ha $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ mátrix egy lépcsős alakja, akkor
1. $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ sortere megegyezik,
2. $\mathbf{B}$ nemzérus sorvektorai lineárisan függetlenek,
3. a főelemek oszlopvektorai $\mathbf{A}$-ban és $\mathbf{B}$-ben is lineárisan függetlenek.

3.14.• BÁZIS: IGAZ – HAMIS
a) A $\mathcal{V}$ vektortérben a $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ vektorrendszer bázis, ha tetszőleges $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektor egyértelműen felírható e vektorok lineáris kombinációjaként.
b) Van olyan vektortér, melynek bármely nemnulla vektora bázist alkot.
c) Van olyan vektortér, melynek van kételemű bázisa, és van három lineárisan független vektora.
d) Van olyan vektortér, melyet bármely két különböző vektora kifeszít!
e) Van olyan VT vektortér, melyet kifeszít valamely 5 vektora, és abban olyan $\mathcal{W}$ altér, melyet kifeszít annak valamely 10 vektora.

3.15. Határozzuk meg a 3.27. példabeli vektorok által kifeszített altér egy másik bázisát úgy, hogy a vektorokat más sorrendben írjuk a mátrixba. Legyen például a sorrend $\mathbf{w}_1 = (1,1,2,1)$, $\mathbf{w}_2 = (3,1,3,2)$, $\mathbf{w}_3 = (6,0,3,3)$, $\mathbf{w}_4 = (2,-2,-2,0)$. Fejezzük ki mind a négy vektort ezek lineáris kombinációjaként! Végül írjuk fel mind a négy vektor koordinátás alakját e bázisban!

3.16.• Keressünk bázist az alábbi vektortérhez a megadott vektorok közül, majd írjuk fel a vektorok e bázisra vonatkozó koordinátás alakjait!
a) $\operatorname{span}((1,2,3),(-2,-4,-6),(1,1,1),(0,1,2),(2,1,0))$,
b) $\operatorname{span}((1,2,3,4),(0,1,2,3),(3,1,-1,1),(2,0,4,0))$,
c) $\operatorname{span}((1,2,3,4),(0,1,2,3),(1,1,1,1),(-1,0,1,2))$.

3.17.• Adjuk meg az alábbi altér $\mathbb{R}^4$-beli merőleges kiegészítő alterének egy bázisát!
a) $\operatorname{span}((1,2,0,1),(3,1,-1,1),(1,-3,-1,-1))$,
b) $\operatorname{span}((1,2,0,1),(3,1,-1,1),(2,-1,-1,0))$.

3.18. Tekintsük a $\mathcal{V} = \operatorname{span}((0,1,2,3,4),(1,2,3,4,5)) \leqslant \mathbb{R}^5$ alteret!
a) Merőleges-e a $\mathcal{W} = \operatorname{span}((0,1,1,-1,0),(0,0,1,1,-1))$ altérre?
b) Merőleges kiegészítő alterek-e $\mathcal{V}$-nek $\mathcal{W}$?
c) Határozzuk meg a $\mathcal{V}^\perp$ és $\mathcal{W}^\perp$ altereket!

3.19. Adjuk meg a $\operatorname{span}((0,1,2,3,4),(1,2,3,4,5))$ altér merőleges kiegészítő alterét!

3.20. Egy lineáris egyenletrendszerről tudjuk, hogy együtthatómátrixának rangja 2, és hogy $(1,2,3)$ és $(0,1,3)$ is megoldásvektora. Adjuk meg az összes megoldását!

3.21. Egy lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixának rangja 2, és $(1,2,3,4)$, $(0,1,3,4)$ és $(0,1,2,3)$ megoldásvektorai. Adjuk meg az összes megoldását!

Határozzuk meg az alábbi mátrixok kitüntetett altereinek bázisát!

3.22.• $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

3.23. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

3.24. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

3.25. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

3.26. GRAM-MÁTRIX Igazoljuk, hogy a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_k \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k \end{bmatrix}$$

mátrix – az ún. *Gram-mátrix* rangja pontosan akkor k, ha az $\mathbb{R}^n$-beli $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineárisan függetlenek.

3.27. LINEÁRIS ALGEBRA ALAPTÉTELE Igazoljuk a lineáris algebra alaptételét!

A SORTÉRBE ESŐ MEGOLDÁS MEGHATÁROZÁSA *Keressük meg az alábbi egyenletrendszerek sortérbe eső egyetlen megoldását, és annak segítségével írjuk fel összes megoldását!*

3.28.•
$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x + y - z &= 2 \\ 3x + 2y \phantom{{}-z} &= 5 \end{aligned}$$

3.29. $x + 4y + 8z + 12w = 225$

3.30.•
$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 3 \\ x + y - z - w &= 1 \end{aligned}$$

3.31. Határozzuk meg a $\mathbb{Z}_p^n$ tér k-dimenziós altereinek számát, ahol p prím, és $k = 0, 1, \dots, n$?

Megoldások

3.1. Mindegyik állítás hamis.

3.2. *a)* Igaz. *b)* Igaz. *c)* Hamis, csak akkor igaz, ha egyik a másik altere. *d)* Igaz. *e)* Hamis, a zérustér egyetlen vektora a zérusvektor.

3.3. *a)* Hamis, csak a homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alkotnak vektorteret. *b)* Igaz. *c)* Igaz. Ez épp az oszloptér, ugyanis csak az oszloptérből való $\mathbf{b}$ vektorokra oldható meg az egyenletrendszer. *d)* Igaz. Ez épp az együtthatómátrix nulltere, azaz az egyenletrendszerhez tartozó homogén egyenletrendszer megoldáshalmaza.

3.4. *a)* Igaz. *b)* Igaz. *c)* Hamis. *d)* Igaz, ugyanis az állításbeli $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \le \mathrm{r}(\mathbf{A})$ feltétel pontosan akkor teljesül, ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \mathrm{r}(\mathbf{A})$, és ez pontosan akkor teljesül, ha az egyenletrendszer megoldható. *e)* Hamis, ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$, és az egyenletrendszer több, mint n egyenletből áll, akkor előfordulhat, hogy $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n+1$, és ekkor az egyenletrendszer nem oldható meg!

3.5. *a)* Nem, egységvektor konstansszorosai nem egységvektorok. *b)* Igen (origón átmenő sík). *c)* Nem (eltolt sík). *d)* Igen, ez egy origón átmenő egyenes vektoraiból áll. *e)* Igen, ez a zérustér. *f)* Nem, az $(1,-1,0)$ és az $(1,0,-1)$ vektor benne van, de az összegük nincs e halmazban.

3.7. *a)* $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \le 1$. A 0 rang csak úgy fordulhat elő, ha az összes egyenlet $0 = 0$ alakú – nem egy érdekes eset. Ha a rang 1, akkor a kötött és a szabad változók száma is 1. *b)* $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 5$. *c)* $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$. *d)* $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2$.

3.8. Két megoldásvektor különbsége, azaz az $(1,2,3) - (0,1,3) = (1,1,0)$ vektor biztosan megoldása az egyenletrendszer homogén részének. Akkor viszont ennek minden skalárszorosa is megoldás, így azokat bármelyik fenti megoldáshoz adjuk, újabb megoldásokat kapunk. Például megoldás az $(1,2,3) + (1,1,0) = (2,3,3)$ és az $(1,2,3) + 2(1,1,0) = (3,4,3)$ vektor is.

Mivel az ismeretlenek száma 3, és azok legalább egyike szabad változó, ezért a rang legföljebb 2. Ha viszont e megoldások egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai, akkor a megoldások közt van legalább két lineárisan független megoldás, így a szabad változók száma legalább kettő, vagyis a kötötteké legföljebb 1, tehát az együtthatómátrix rangja is legföljebb 1.

3.9. Első ránézésre csak annyi látszik, hogy mindkét megoldás egy kétdimenziós altér eltoltja. Először megvizsgáljuk, hogy a két altér – vagyis az egyenletrendszer homogén részére adott két megoldás – egybeesik-e. Elég megmutatni, hogy az egyik altérben benne van a másikat generáló két vektor. Ha igen, a két altér megegyezik. Ezesetben el kell dönteni, hogy az inhomogén két partikuláris megoldása az altérnek ugyanabban az eltoltjában van-e. Vagy egyszerűbben, hogy a két partikuláris megoldás különbsége benne van-e az altérben. E kérdéseket egyetlen mátrix lépcsős alakra hozásával is megoldhatjuk. Az első két oszlop az első, a második két oszlop a második altér generátorait tartalmazza, az ötödik oszlop a két partikuláris megoldás különbsége.

$$\left[\begin{array}{rr|rr|r} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{rr|rr|r} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Az eredményből látszik, hogy a két megoldás azonos.

3.10. Ha $\mathbf{a}_{i*}$ jelöli az együtthatómátrix i-edik sorát és $\mathbf{x}$, illetve $\mathbf{y}$ a homogén egyenletrendszer egy-egy megoldását, azaz $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = 0$, $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{y} = 0$ $(i = 1, 2, \dots, m)$, akkor

$$\mathbf{a}_{i*} \cdot (c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = c\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} + d\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{y} = 0 + 0 = 0,$$

tehát a két megoldásvektor bármely lineáris kombinációja is megoldás. Másként fogalmazva a homogén lineáris egyenletrendszerek megoldásainak bármely lineáris kombinációja is megoldás, tehát a megoldások alteret alkotnak.

3.11. Legyen $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ az inhomogén egy partikuláris megoldása, és jelölje $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ az $\mathbf{A}$ oszlopvektorait, $\mathcal{H}$ a homogén, $\mathcal{I}$ az inhomogén egyenletrendszer általános megoldását. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{x} + \mathcal{H} = \mathcal{I}$, ahol a bal oldali összeadást elemenként értjük.

$\mathbf{x} + \mathcal{H} \subseteq \mathcal{I}$: Meg kell mutatnunk, hogy ha $\mathbf{x}$-hez adjuk a $\mathcal{H}$ egy tetszőleges $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in H$ elemét, az inhomogén egyenletrendszer egy megoldását kapjuk. Valóban, $\mathbf{x}$, illetve $\mathbf{y}$ eleget tesz az

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \dots + \mathbf{a}_n x_n &= \mathbf{b}, \text{ illetve} \\ \mathbf{a}_1 y_1 + \mathbf{a}_2 y_2 + \dots + \mathbf{a}_n y_n &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

egyenletnek. Ebből

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}_1(x_1 + y_1) + \mathbf{a}_2(x_2 + y_1) + \dots + \mathbf{a}_n(x_n + y_1) = \\ &(\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \dots + \mathbf{a}_n x_n) + (\mathbf{a}_1 y_1 + \mathbf{a}_2 y_2 + \dots + \mathbf{a}_n y_n) = \\ &\mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}, \end{aligned}$$

tehát $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ megoldása az inhomogén egyenletrendszernek, azaz $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{I}$.

$\mathbf{x} + \mathcal{H} \supseteq \mathcal{I}$: Meg kell mutatnunk, hogy ha $\mathbf{z}$ az inhomogén egy tetszőleges megoldása, azaz $\mathbf{z} \in \mathcal{I}$, akkor található olyan $\mathbf{y} \in \mathcal{H}$, hogy $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$. Valóban, az $\mathbf{y} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$ megteszi, mert

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a}_1(z_1 - x_1) + \mathbf{a}_2(z_2 - x_1) + \ldots + \mathbf{a}_n(z_n - x_1) = \\
&(\mathbf{a}_1 z_1 + \mathbf{a}_2 z_2 + \ldots + \mathbf{a}_n z_n) - (\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_n x_n) = \\
&\mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0},
\end{aligned}$$

azaz $\mathbf{z} - \mathbf{x} \in \mathcal{H}$.

3.12. Összesen 16 altere van $\mathbb{F}_2^3$-nek. Van egy 0-dimenziós, a $\mathcal{Z} = \{\mathbf{0}\}$ tér. Az egydimenziós alterek a nullvektorból és egyetlen tőle különböző további vektorból állnak (7 ilyen altér van). A kétdimenziós alterek mindegyike a nullvektorból, két további egymástól is különböző vektorból és azok összegéből áll. Ezeket felsoroljuk:

$$\begin{aligned}
&\{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0)\},\\
&\{(0,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(0,1,1)\},\\
&\{(0,0,0),(0,0,1),(1,0,0),(1,0,1)\},\\
&\{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,1),(1,1,1)\},\\
&\{(0,0,0),(0,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\},\\
&\{(0,0,0),(0,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\},\\
&\{(0,0,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}.
\end{aligned}$$

Végül altér maga $\mathbb{F}_2^3$ is.

3.13. Az első két állítás a 3.22. tétel egyszerű következménye.

A harmadik állítás bizonyításához megmutatjuk, hogy egy lépcsős alak egy nemzérus sorvektora nem fejezhető ki a többi sorvektor lineáris kombinációjaként. Tekintsük a lépcsős alak k-adik sorvektorát. Főeleme legyen a j-edik oszlopban. E főelem nem állítható elő a k-nál nagyobb indexű sorok lineáris kombinációjával, mert azokban a j-edik koordináta 0. A k-nál kisebb indexű sorvektorok pedig nem szerepelhetnek a lineáris kombinációban, mivel a legkisebb indexű vektor főelemét a többi vektor nem eliminálhatja, pedig a k-adik sorban azon a helyen 0 áll.

Annak bizonyítása, hogy a főelemek oszlopai $\mathbf{B}$-ben lineárisan függetlenek, ugyanúgy megy, mint a sorvektorok esetén. Innen pedig az előző tétellel adódik, hogy az ilyen indexű oszlopok $\mathbf{A}$-ban is lineárisan függetlenek.

3.14. 1. Igaz. 2. Igaz, bármely 1-dimenziós vektortér ilyen. 3. Hamis, ha van kételemű bázis, akkor a lineárisan független vektorrendszerek elemszáma legföljebb 2. 4. Igaz, bármely 1-dimenziós vektortér ilyen. 5. Igen, egy generátorrendszer több vektorból is állhat, mint a dimenzió.

3.15. A mátrix és annak redukált lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eszerint bázisvektoroknak választhatjuk a $\mathbf{w}_1 = (1,3,6,2)$ és a $\mathbf{w}_2 = (1,1,0,-2)$ vektorokat. A többi vektor kifejezhető ezek lineáris kombinációjaként:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

A redukált lépcsős alak nemzérus soraiból álló

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

mátrixból kiolvasható, hogy a fenti altérnek $\mathcal{B} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ bázisa, és ebben a bázisban a négy vektor koordinátás alakja rendre

$$\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

3.18. *a)* Merőlegesek, *b)* nem merőleges kiegészítő alterek.

3.20. Mivel az egyenletrendszer 3-ismeretlenes, és a rang 2, ezért a kötött változók száma 2, a szabad változóké 1, és így a nulltér dimenziója is 1. A két vektor független egymástól, tehát az egyenletrendszer nem lehet homogén, akkor ugyanis legalább kettő lenne a nulltér dimenziója. Az egyenletrendszer tehát inhomogén, és a megadott két megoldás különbsége a homogén rész egy megoldását adja, annak összes skalárszorosa pedig az összes megoldását. Így az inhomogén összes megoldása: $(1,2,3) + t(1,1,0)$.

3.21. Például $(1,2,3,4) + s(1,1,0,0) + t(1,1,1,1)$.

3.26. E mátrix rangja pontosan akkor k, ha oszlopvektorai lineárisan függetlenek, azaz ha az oszlopvektorok bármely lineáris kombinációja csak úgy lehet a nullvektor, ha minden együttható 0. Tekintsünk az oszlopvektorok egy $c_1, \ldots, c_k$ skalárokkal vett, nullvektort adó lineáris kombinációját. Ennek i-edik koordinátája

$$\begin{aligned}
0 &= c_1 \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + c_k \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_k \\
&= \mathbf{v}_i \cdot (c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_k \mathbf{v}_k).
\end{aligned}$$

Tehát azt kaptuk, hogy az $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$ vektor olyan, hogy a $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektorok mindegyikével vett skaláris szorzata 0, így ezek bármelyik lineáris kombinációjával vett skaláris szorzata is 0, tehát például az $\mathbf{x}$ vektorral vett szorzat is 0, azaz $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$. Ez viszont csak $\mathbf{x} = 0$ esetén állhat fönn, és mivel a $\mathbf{v}_i$ vektorok lineárisan függetlenek, csak a $c_i = 0$ konstansokkal vett lineáris kombinációjuk lehet 0, ahol $i = 1, 2, \ldots, k$.

3.27. Megmutatjuk, hogy a nulltér merőleges kiegészítő altere a sortér. Legyen a valós $\mathbf{A}$ mátrix sortere $\mathcal{S}$, nulltere $\mathcal{N}$, és ezek egy-egy bázisa $\{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_k\}$, illetve $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n-k}\}$. $\mathcal{S}$ és $\mathcal{N}$ merőlegessége miatt $\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ minden $i = 1, 2, \ldots, r$ és $j = 1, 2, \ldots, n-r$ esetén. E két bázis együtt $\mathbb{R}^n$ egy bázisát adja, hisz n elemű és független vektorokból áll. A függetlenség abból következik, hogy nullvektort előállító tetszőleges

$$\underbrace{c_1\mathbf{s}_1 + \cdots + c_r\mathbf{s}_r}_{\mathbf{c}} + \underbrace{d_1\mathbf{e}_1 + \cdots + d_{n-r}\mathbf{e}_{n-r}}_{\mathbf{d}} = \mathbf{0} \tag{3.4}$$

lineáris kombináció csak úgy állhat fenn, ha $\mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$ a két altér metszetében van, így azok mindketten a nullvektorok, és így $c_1 = \cdots = c_r = d_1 = \cdots = d_{n-r} = 0$.

Ha $\mathbf{x}$ egy olyan vektor, mely merőleges $\mathcal{N}$ minden vektorára, akkor $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-r)$. Ha

$$\mathbf{x} = y_1\mathbf{s}_1 + \cdots + y_r\mathbf{s}_r + x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_{n-r}\mathbf{e}_{n-r},$$

akkor az $\mathbf{e}_i$ vektorokkal való beszorzás a következő homogén lineáris egyenletrendszerre vezet:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1)x_1 + {} & (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)x_2 + \ldots + {} & (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_r)x_n &= 0 \\
(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1)x_1 + {} & (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2)x_2 + \ldots + {} & (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_r)x_n &= 0 \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots & \vdots\ \vdots \quad & \\
(\mathbf{e}_{n-r} \cdot \mathbf{e}_1)x_1 + {} & (\mathbf{e}_{n-r} \cdot \mathbf{e}_2)x_2 + \ldots + {} & (\mathbf{e}_{n-r} \cdot \mathbf{e}_{n-r})x_n &= 0
\end{aligned}$$

Ez pedig egyértelműen megoldható, mert együtthatómátrixának rangja r. Ennek bizonyítását az Olvasóra hagyjuk. Egy bizonyítás látható a 3.26. feladatban, egy másik, egyszerűbb a **??** feladatban.

3.28. Az egyenletrendszer bővített mátrixának redukált lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

így a megoldása $(x, y, z) = (-1, 4, 0) + (2, -3, 1)t$. A nullteret a $(2, -3, 1)$ vektor feszíti ki, a sortérbe eső vektornak erre merőlegesnek kell lennie, tehát fönn kell állnia a

$$2x - 3y + z = 0$$

egyenletnek is. Ezt az egyenletet a redukált lépcsős alakból származó egyenletrendszerhez (vagy akár az eredetihez) adva egy egyetlen megoldást adó egyenletrendszert kapunk. Ennek bővített mátrixa és annak redukált lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Innen a sortérbe eső megoldás $(1, 1, 1)$.

3.29. A sortérbe eső megoldás meghatározása egyetlen egyenlet esetén egyszerű. Mivel a sorteret az $(1, 4, 8, 12)$ vektor feszíti ki, ennek egy skalárszorosát keressük, mellyel vett skalárszorzata 225. Mivel $1^2 + 4^2 + 8^2 + 12^2 = 15^2 = 225$, ezért a sortérbe eső egyetlen megoldás $(x, y, z, w) = (1, 4, 8, 12)$. A homogén egyenletrendszer összes megoldását meghatározva majd hozzáadva kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

az összes megoldás.

3.30. A bővített mátrix és redukált lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-s \\ s \\ 1-t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Tehát a nullteret a $(-1, 1, 0, 0)$ és a $(0, 0, -1, 1)$ vektorok feszítik ki. A sortérbe eső megoldásvektor ezekre merőleges, tehát az eredeti egyenleteken kívül kielégíti a következő két egyenletet is:

$$\begin{aligned} -x + y \qquad &= 0 \\ -z + w &= 0 \end{aligned}$$

Ezek mátrixával kibővítve a redukált lépcsős alakot, majd azt redukált lépcsős alakra hozva kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

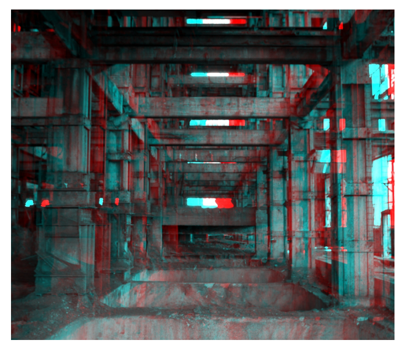
tehát a sortérbe eső megoldás $(1, 1, 1/2, 1/2)$, az összes megoldás

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

II. rész

Mátrixok algebrája és geometriája

Eddig a mátrixokat csak egyszerű jelölésnek tekintettük, mely az egyenletrendszer együtthatóinak tárolására, és az egyenletrendszer megoldása közbeni számítások egyszerűsítésére való. E részt a számok közti műveletek számtáblázatokra való kiterjesztésével kezdjük, majd ezeket átültetjük mátrixokra, és megvizsgáljuk algebrai tulajdonságaikat. E műveletek segítségével újravizsgáljuk az egyenletrendszerek megoldhatóságának és a megoldások kiszámításának kérdését. A mátrixok „számtani" fejezetei után a „mértaniak" következnek: a determináns, mint a négyzetes mátrixhoz rendelt előjeles mérték, majd a mátrixleképezések geometriája lesz e rész tárgya.



Enter The Matrix – 3D picture (CC) on flickr by Grégory Tonon

4
Mátrixműveletek definíciói

Az egyenletrendszerek megoldásához és vizsgálatához hatékony eszközökhöz jutunk a mátrixműveletek bevezetésével. E műveletek számtalan egyéb alkalmazásban játszanak fontos szerepet, melyekkel a könyv további részében mindenütt találkozni fogunk.

Műveletek táblázatokkal – műveletek mátrixokkal

A valós számok közti műveletek természetes módon kiterjeszthetők mátrixokkal való műveletekké. Ezek definícióihoz az összeadás és a szorzás hétköznapi alkalmazásainak táblázatokra való kiterjesztésén keresztül fogunk eljutni.

A TÁBLÁZAT számszerű adatok téglalap alakban sorokban és oszlopokban való elrendezése. A sorok előtt és az oszlopok fölött *fejléc* állhat, melyben az adott sor, illetve oszlop adatait jellemző valamely információ áll (például az oszlop számadatainak közös mértékegysége).

A mátrixra úgy is tekinthetünk, mint amelyet egy olyan absztrakció során kapunk a táblázatból, melyben azt megfosztjuk fejléceitől, az adatokból pedig csak a számokat őrizzük meg, azok jelentésétől, mértékegységétől eltekintünk.

Táblázatok összeadása és skalárral szorzása Az összeadás művelete természetes módon kiterjeszthető számadatokat tartalmazó táblázatokra. Ha két gyümölcskosárban piros és zöld alma és szőlő van az alábbi táblázatok szerint, akkor összeöntésük után számuk így számolható:

	alma (db)	*szőlő* (fürt)
piros	3	2
zöld	2	1

$+$

	alma (db)	*szőlő* (fürt)
piros	2	2
zöld	0	1

$=$

	alma (db)	*szőlő* (fürt)
piros	5	4
zöld	2	2

Azonos méretű, azonos fejlécű táblázatok összeadásának egy lehetséges módja az, ha az azonos pozícióiban lévő elemek összeadásával képezzük az összeget.

Az asztalon 2 alma van. Ha számukat megháromszorozzuk, összeszorzunk egy mértékegység nélküli számot (3) egy mértékegységgel rendelkezővel (2 darab), és az eredmény mértékegysége is ez. Ezt megtehetjük egy kosár egész tartalmával is:

$3 \cdot$

	alma (db)	*szőlő* (fürt)
piros	3	2
zöld	2	1

$=$

	alma (db)	*szőlő* (fürt)
piros	9	6
zöld	6	3

Táblázatok szorzása Egy adag (a továbbiakban mindig 10 dkg) alma energiatartalma 30 kcal. 5 adag energiatartalmát ismét szorzással kapjuk meg – most mindkét mennyiség rendelkezik mértékegységgel:

$$5\,\text{adag} \cdot 30\,\frac{\text{kcal}}{\text{adag}} = 150\,\text{kcal}.$$

Több gyümölcsből (alma, banán, narancs) többféle (A, B, C) gyümölcssalátát készítünk, és a szénhidrát- és energiatartalmukat vizsgáljuk. Két táblázat egyikébe a gyümölcssaláták összetételét, a másikába az összetevők szénhidrát- és energiatartalmát írjuk. Mindkét táblázatban a sorokba kerülnek azok a tételek, melyek összetételét/összetevőit részletezzük, az oszlopokba pedig az összetevők.

	Alma (adag)	*Banán* (adag)	*Narancs* (adag)
A	5	1	4
B	4	4	2
C	4	2	4

	Szénhidrát (g/adag)	*Energia* (kcal/adag)
Alma	7	30
Banán	24	105
Narancs	8	40

A következőképp tudjuk az A saláta energiatartalmát kiszámítani:

$$5\,\text{adag} \cdot 30\,\frac{\text{kcal}}{\text{adag}} + 1\,\text{adag} \cdot 105\,\frac{\text{kcal}}{\text{adag}} + 4\,\text{adag} \cdot 40\,\frac{\text{kcal}}{\text{adag}} = 415\,\text{kcal},$$

vagyis az első táblázat egy sorának és a második táblázat egy oszlopának kellett a skaláris szorzatát venni. Végezzük el e számításokat mindhárom gyümölcssaláta szénhidrát és energiatartalmára is, és az eredményt ismét egy olyan táblázatba tegyük, melynek soraiba a részletezendő tételek (A, B, C saláta), oszlopaiba a tartalmi összetevők (szénhidrát-, energiatartalom) kerüljenek.

	Szénhidrát (g)	*Energia* (kcal)
A	91	415
B	140	620
C	108	490

Az áttekinthetőség kedvéért a két összeszorzandó mátrixot és az eredményt a fejléceihez igazítva helyeztük el:

	Szénhidrát (g/adag)	**Energia (kcal/adag)**
Alma	7	**30**
Banán	24	**105**
Narancs	8	**40**

	Alma (adag)	*Banán* (adag)	*Narancs* (adag)
A	**5**	**1**	**4**
B	4	4	2
C	4	2	4

	Szénhidrát (g)	*Energia* (kcal)
A	91	**415**
B	140	620
C	108	490

Az A saláta energiatartalmának kiszámítását kiemeltük. Érdemes azt is megfigyelni, hogy ha csak az A és C gyümölcssalátákra vagyunk kiváncsiak, elég az első táblázat és a végeredmény második sorát elhagyni, hasonlóképp ha csak az energiatartalmat figyeljük, elég a második táblázat és a végeredmény második oszlopát megtartani. Az is látszik, hogy az első táblázat oszlopainak és a második táblázat sorainak száma megegyezik. Általában az igaz, hogy (a fejléceket nem számolva) egy $m \times n$-es táblázat csak olyan $p \times k$-as táblázattal szorozható össze, ahol $p = n$, és az eredmény $m \times k$-as lesz.

Lineáris helyettesítések kompozíciója A lineáris algebra több alapvető fogalma megfogalmazható a lineáris helyettesítés nyelvén.

4.1. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS HELYETTESÍTÉS). *Lineáris helyettesítésről akkor beszélünk, ha változók egy halmazát más változók lineáris kifejezéseivel teszünk egyenlővé (e lineáris kifejezésekkel helyettesítjük).*

4.2. PÉLDA (LINEÁRIS HELYETTESÍTÉSEK KOMPOZÍCIÓJA). *Tekintsük a következő két lineáris helyettesítést:*

$$\begin{aligned} a &= 5x + y + 4z \\ b &= 4x + 4y + 2z \\ c &= 4x + 2y + 4z \end{aligned} \quad \text{és} \quad \begin{aligned} x &= 7s + 30k \\ y &= 24s + 105k \\ z &= 8s + 40k \end{aligned} \tag{4.1}$$

Írjuk fel a két helyettesítés egymás után való elvégzésével, azaz kompozíciójával *kapott lineáris helyettesítés egyenleteit!*

MEGOLDÁS. Elemi számítás mutatja, hogy a két lineáris helyettesítés egymásutáni elvégzése (kompozíciója) az

$$\begin{aligned} a &= 91s + 415k \\ b &= 140s + 620k \\ c &= 108s + 490k \end{aligned}$$

lineáris helyettesítést adja. Figyeljük meg, hogy ha e két lineáris helyettesítést is táblázatokkal írjuk le, ahol a sorok fejléceibe annak a változónak a nevét írjuk, amit helyettesítünk, oszlopaiba azt, amivel helyettesítjük, a kompozíció művelete e két táblázat szorzatával számolható. (A számadatok előző példában szereplőkkel való azonossága nem a véletlen műve.) □

	s	k
x	7	30
y	24	105
z	8	40

	x	y	z
a	5	1	4
b	4	4	2
c	4	2	4

	s	k
a	91	415
b	140	620
c	108	490

Elemenkénti mátrixműveletek Mátrixok összeadását és skalárral szorzását a táblázatoknál látottak alapján definiáljuk.

A mátrixműveletekhez szükségünk van arra, hogy a mátrix elemei olyan struktúrából valók legyenek, melyek közt a megkívánt műveletek elvégezhetők. Legyen S egy tetszőleges halmaz (pl. $S = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}\dots$). Az S elemeiből képzett összes $m \times n$-es mátrixok halmazát

$$S^{m\times n} \text{ vagy } \mathrm{M}_{m\times n}[S]$$

jelöli. Azt mondjuk, hogy $S^{m\times n}$ ($\mathrm{M}_{m\times n}[S]$) az S fölötti $m \times n$ típusú *mátrixok tere*. Például az $\left[\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}\right]$ mátrix eleme az $\mathbb{N}^{2\times 2}$, $\mathbb{Z}^{2\times 2}$, $\mathbb{Q}^{2\times 2}$, $\mathbb{R}^{2\times 2}$ terek mindegyikének.

Két mátrixot akkor tekintünk *egyenlőnek*, ha azonos típusúak, és az azonos indexű elemek egyenlőek. Például az $\left[\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}1&2\\3&x\end{smallmatrix}\right]$ egyenlőség pontosan akkor áll fönn, ha $x = 4$. Egy vektor sor- vagy oszlopvektor alakba írva mátrixként nem egyenlők egymással. Például

$$\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},$$

mert nem azonos típusúak.

Egy mátrix *négyzetes*, ha sorainak és oszlopainak száma megegyezik. Az $\mathbf{A}$ mátrix főátlójának elemei a_{11}, a_{22}, a_{33},.... Ez nem csak négyzetes mátrixra értelmezhető. Az olyan négyzetes mátrixot, melynek főátlón kívüli elemei mind nullák, *diagonális mátrixnak* nevezzük. Az ilyen mátrixok egyszerű megadására a diag függvényt használjuk, melynek argumentumába a főátló elemei vannak felsorolva. Például

$$\operatorname{diag}(1,2,3) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}.$$

A mátrixműveletek megismerését azokkal kezdjük melyeket elemenként végezhetünk.

4.3. DEFINÍCIÓ (MÁTRIXOK ÖSSZEGE, KÜLÖNBSÉGE). *Az $m \times n$-es típusú $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ és $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ mátrixok összegén azt az ugyancsak $m \times n$-es típusú, és $\mathbf{A} + \mathbf{B}$-vel jelölt mátrixot értjük, melynek i-edik sorában a j-edik elem $a_{ij} + b_{ij}$, ahol $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Képletben:*

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij}] + [b_{ij}] := [a_{ij} + b_{ij}].$$

Hasonlóan definiálható $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ különbsége is, azaz $\mathbf{A} - \mathbf{B} := [a_{ij} - b_{ij}]$.

Például

$$\begin{bmatrix}0 & 2 & 4\\1 & 3 & 5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\1 & 4 & 5\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}.$$

```
OCTAVE a = [1 2 3
>           4 5 7]
a =
   1   2   3
   4   5   7

OCTAVE b = [1 2;3 4]
b =
   1   2
   3   4

OCTAVE diag([1,2,3])
ans =
   1   0   0
   0   2   0
   0   0   3

OCTAVE a(2,3)
ans =  7
OCTAVE a(2,:)
ans =
   4   5   7

OCTAVE a(:,3)
ans =
   3
   7

OCTAVE v = [1 2 3]
v =
   1   2   3

OCTAVE w = [1;2;3]
w =
   1
   2
   3

OCTAVE size(v)
ans =
   1   3

OCTAVE size(w)
ans =
   3   1
```

4.1. ábra: Mátrix megadása, elemeinek, sorainak és oszlopainak és azok számának lekérdezése mátrix alapú nyelvekben.

A mátrixalapú nyelvekben mátrixok közötti elemenkénti művelet definiálható a műveleti jel elé tett ponttal. Így az `A` és `B` mátrixok elemenkénti szorzata az

```
A .* B
```

paranccsal kapható meg. Eszerint az `A .+ B` és `A + B` kódok az eredményt tekintve ekvivalensek.

$$
\begin{bmatrix}
9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9\\
9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9\\
9&9&9&9&9&6&3&4&5&3&2&2&5&6&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9\\
9&9&9&9&4&1&0&0&2&2&0&0&0&4&9&9&9&9&9&9&9&9&9&9\\
9&9&9&4&1&0&0&1&1&1&1&0&1&1&3&9&9&9&9&9&9&9&9&9\\
9&9&4&1&0&1&2&1&0&0&0&1&2&1&0&4&9&9&9&9&9&9&9&9\\
9&9&2&2&2&2&1&1&0&1&1&3&3&2&1&0&5&9&9&9&9&9&9&9\\
9&5&1&2&3&3&2&1&2&2&4&4&3&2&1&0&3&9&9&9&9&9&9&9\\
9&3&1&3&7&8&7&6&6&5&6&4&3&2&2&0&2&9&9&9&9&9&9&9\\
9&4&1&5&8&8&8&7&6&5&5&4&3&2&2&1&0&6&9&9&9&9&9&9\\
9&5&2&5&8&8&7&6&5&5&5&4&4&3&2&2&1&3&7&9&9&9&9&9\\
9&9&2&3&6&7&7&6&5&5&4&4&4&0&0&0&3&3&5&9&9&9&9&9\\
9&9&5&1&4&6&7&7&7&5&4&3&1&1&1&1&2&3&4&9&9&9&9&9\\
9&9&9&2&2&6&7&5&1&0&2&3&1&2&3&2&2&3&3&9&9&9&9&9\\
9&9&9&7&1&6&6&1&0&1&1&6&3&2&2&3&3&2&3&9&9&9&9&9\\
9&9&9&7&3&6&4&2&3&3&5&8&4&3&3&3&2&2&4&9&9&9&9&9\\
9&9&9&9&5&6&6&7&5&3&7&8&6&3&3&4&3&2&3&7&7&7&7&9\\
9&9&9&9&7&4&7&8&7&5&7&8&8&4&3&4&3&2&3&7&3&3&4&5\\
9&9&9&9&9&7&7&6&6&7&7&6&6&2&2&3&3&3&3&4&3&3&3&5\\
9&9&9&9&9&9&8&6&6&7&5&7&7&2&3&3&2&3&3&3&3&3&3&4\\
9&9&9&9&9&5&3&5&6&7&5&7&7&4&2&1&3&3&2&3&3&3&3&3\\
9&9&9&8&6&1&3&7&6&6&5&4&3&2&3&3&3&3&3&3&3&4&4&3\\
9&9&9&7&5&3&2&7&8&6&5&4&6&4&2&3&3&2&3&3&3&4&4&3\\
9&9&7&6&5&4&2&7&8&7&6&4&4&4&6&4&3&1&4&4&6&6&6&6\\
9&8&7&6&4&4&3&7&8&8&6&6&3&5&3&1&0&1&6&8&7&6&6&5\\
8&8&7&5&4&3&4&7&8&8&6&2&2&0&1&2&3&8&7&7&7&7&7&6\\
8&8&7&5&4&3&4&6&8&8&6&5&2&0&1&1&6&8&8&7&7&6&5&3\\
8&8&8&5&4&4&4&4&7&8&5&5&3&3&1&3&8&8&8&6&6&5&6&4\\
8&8&8&7&5&4&4&4&6&8&7&5&2&2&5&8&8&8&8&7&6&3&3&2\\
6&8&7&5&6&5&4&3&4&7&7&7&4&4&7&8&8&8&8&7&6&7&6&4\\
4&7&6&4&4&6&5&4&4&5&6&7&7&7&7&8&8&8&8&8&6&4&2&3\\
6&4&7&5&3&4&6&4&4&4&5&7&8&6&8&8&8&8&7&4&2&1&2&3
\end{bmatrix}
$$

4.2. ábra: Egy elemenkénti mátrixművelet a képfeldolgozásban

4.4. DEFINÍCIÓ (ZÉRUSMÁTRIX). *A csupa nullából álló mátrixokat zérusmátrixoknak nevezzük. Az $m \times n$-es zérusmátrixot $\mathbf{O}_{m\times n}$, míg az $n \times n$-es négyzetes zérusmátrixot $\mathbf{O}_n$ jelöli.*

Tetszőleges $\mathbf{A}$ mátrixhoz egy azonos típusú zérusmátrixot adva $\mathbf{A}$-t kapunk, azaz $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{O} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$.

4.5. DEFINÍCIÓ (MÁTRIX SZORZÁSA SKALÁRRAL). *Az $m \times n$-es típusú $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ mátrix c számmal képzett szorzatán azt az ugyancsak $m \times n$-es típusú, és $c\mathbf{A}$-val jelölt mátrixot értjük, melyre*

$$c\mathbf{A} = c[a_{ij}] := [ca_{ij}].$$

Az $\mathbf{A}$ mátrix *ellentettjének* azt a $-\mathbf{A}$-val jelölt mátrixot nevezzük, melyre $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O}$. Könnyen megmutatható, hogy ilyen mátrix csak egy van, nevezetesen $-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A}$.

Azonos méretű mátrixokon más elemenkénti művelet is definiálható. Érdekességként mutatunk egy példát egy ilyen műveletre a digitális képfeldolgozás köréből, ahol a képpontokra (pixelekre) bontott kép adatai mátrixokban vannak tárolva. A 4.2. ábra mátrixa az alatta lévő férfiarc 9 szürkeárnyalatos képe, melyen a háttér egy egyszerű elemenkénti művelettel megváltoztatható (részletek a 4.6. feladatban).

A vektorokhoz hasonlóan, a skalárral való szorzás és az összeadás művelete lehetővé teszi, hogy mátrixokra is definiáljuk a *lineáris kombináció*, a *lineáris függetlenség* és a *lineáris összefüggőség* fogalmát.

4.6. PÉLDA (MÁTRIXOK LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJA). *Számítsuk ki a*

$$2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

lineáris kombinációt!

MEGOLDÁS. A skalárral való szorzásokat, majd az összeadást elvégezve

$$2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 7 & 8 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

A műveletek természetesen elemenként is elvégezhetők, pl. a második sor első eleme így is megkapható: $2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 7$. □

A mátrixok az összeadásra és a skalárral való szorzásra nézve a vektorokhoz hasonlóan viselkednek. Az $\mathbb{R}^{m\times n}$-beli $m \times n$-es mátrixok e két műveletre nézve úgy viselkednek, mint $\mathbb{R}^{mn}$ vektorai. Mondhatjuk tehát, hogy $\mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixai egy mn-dimenziós *vektorteret* alkotnak. Lásd erről pl. a 4.7. és a 4.8. feladatokat.

Mátrixszorzás A táblázatok szorzásánál és a lineáris helyettesítések kompozíciójánál látott szabályt követjük a mátrixok szorzásának definíciójához.

4.7. DEFINÍCIÓ (MÁTRIXOK SZORZÁSA). *Egy $m \times t$-s $\mathbf{A}$ és egy $t \times n$-es $\mathbf{B}$ mátrix szorzatán azt az $\mathbf{AB}$-vel jelölt $m \times n$-es $\mathbf{C}$ mátrixot értjük, amelynek i-edik sorában és j-edik oszlopában álló eleme*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} + \ldots + a_{it}b_{tj}.$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{tj} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{it} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & c_{ij} & \end{bmatrix} \end{array}$$

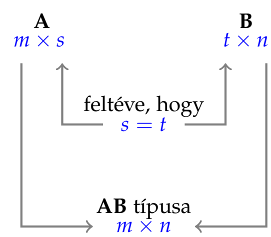
A definícióbeli összefüggés több módon is kifejezhető. Szummával fölírva:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{t} a_{ik}b_{kj},$$

de mondhatjuk azt is, hogy c_{ij} az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorának és a $\mathbf{B}$ mátrix j-edik oszlopának skaláris szorzata, azaz

$$c_{ij} = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{b}_{*j}.$$

Egy $m \times s$-es $\mathbf{A}$ és egy $t \times n$-es $\mathbf{B}$ mátrix csak akkor szorozható össze, ha $s = t$, és ekkor a szorzat $m \times n$ típusú.



A szorzandók sorrendje fontos. Lehet, hogy az $\mathbf{AB}$ szorzás elvégezhető, de a $\mathbf{BA}$ nem, és lehet, hogy elvégezhető, de különböző eredményt kapunk (ld. a 4.10. feladatot). Mivel a mátrixszorzás nem felcserélhető, ha szükséges, az „$\mathbf{A}$-t balról szorozzuk $\mathbf{B}$-vel”, vagy az „$\mathbf{A}$-t jobbról szorozzuk $\mathbf{B}$-vel” kifejezésekkel teszünk különbséget a $\mathbf{BA}$ és az $\mathbf{AB}$ szorzatok közt.

4.8. PÉLDA (MÁTRIXOK SZORZÁSA). *Legyen*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Számítsuk ki az $(\mathbf{AB})_{21}$ elemet, majd az $\mathbf{AB}$ mátrixot.

MEGOLDÁS. A szorzat második sorának első eleme az $\mathbf{A}$ második sorának és $\mathbf{B}$ első oszlopának skaláris szorzata:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & \mathbf{2} \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ \mathbf{4} & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

Hasonlóan a többi elemet is kiszámolva

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Műveletek blokkmátrixokkal Hatalmas méretű mátrixokkal végzett műveletek párhuzamosíthatók, és a memóriakezelésük is hatékonyabbá válik, ha a mátrixokat blokkokra osztjuk, és a műveleteket is e kisebb részmátrixokkal végezzük.

Ha egy mátrixot vízszintes és függőleges vonalakkal részmátrixokra bontunk, azt mondjuk, hogy e mátrix a részmátrixokból – más néven blokkokból – alkotott *blokkmátrix*. Egy blokkmátrix sorait és oszlopait a mátrix *blokksorainak* és *blokkoszlopainak* nevezzük.

Egy egyenletrendszer $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ bővített mátrixa egy két blokkból álló blokkmátrix. Az alábbi példa egy 5-ismeretlenes, 5 egyenletből álló egyenletrendszer bővített mátrixának redukált lépcsős alakját mutatja, ahol az első blokkoszlop a kötött változóknak, a második a szabad változóknak, a harmadik az egyenletrendszer jobb oldalának felel meg, a második blokksor a zérussorokat tartalmazza.[1]

$$\left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{B}_{13} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \mathbf{B}_{23} \end{bmatrix}.$$

[1] A blokkmátrixokra a szakirodalomban a *hipermátrix* elnevezés is használatos. Mi kerüljük e szóhasználatot a hipermátrix másik – többdimenziós tömb értelmű – jelentése miatt.

4.9. állítás (Műveletek blokkmátrixokkal). *Blokkmátrixok skalárral való szorzása és két azonos módon particionált blokkmátrix összeadása blokkonként is elvégezhető, azaz*

$$c[\mathbf{A}_{ij}] := [c\mathbf{A}_{ij}], \qquad [\mathbf{A}_{ij}] + [\mathbf{B}_{ij}] := [\mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij}].$$

Ha $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{ik}]_{m\times t}$, $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_{kj}]_{t\times n}$ *két blokkmátrix, és minden* k*-ra az* $\mathbf{A}_{ik}$ *blokk oszlopainak száma megegyezik* $\mathbf{B}_{kj}$ *sorainak számával, akkor a* $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ *szorzat kiszámítható a szorzási szabály blokkokra való alkalmazásával is, azaz* $\mathbf{C}$ *olyan blokkmátrix, melynek* i*-edik blokksorában és* j*-edik blokkoszlopában álló blokk*

$$\mathbf{C}_{ij} = \sum_{k=1}^{t} \mathbf{A}_{ik}\mathbf{B}_{kj}.$$

Például az alábbi mátrixszorzás blokkmátrixként a következőképp végezhető el:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 \\ 3 & 7 \end{array}\right].$$

*Kroneceker-szorzat és a vec-függvény** Vannak olyan blokkmátrixműveletek, amelyek nem származtathatóak egyszerű mátrixműveletekből.

A vec függvény egy tetszőleges mátrixot vektorrá alakít a mátrix oszlopvektorainak egymás alá tételével. Ha $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\dots|\mathbf{a}_n]$, akkor

$$\operatorname{vec}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix}.$$

Például, ha $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, akkor $\operatorname{vec}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Legyen $\mathbf{A}$ egy $m \times n$-es, $\mathbf{B}$ egy $p \times q$-as mátrix. *Kronecker-szorzatukon* (vagy más néven *tenzorszorzatukon*) azt az $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$-vel jelölt $mp \times nq$ méretű mátrixot értjük, melynek blokkmátrix alakja

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \dots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

Például

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -3 & -3 & -3 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

4.10. TÉTEL (A KRONECKER-SZORZAT TULAJDONSÁGAI). *Adva van az $\mathbf{A}_{m\times n}$, $\mathbf{B}_{m\times n}$, $\mathbf{C}_{p\times q}$ és $\mathbf{D}_{r\times s}$ mátrix. Ekkor*

a) $(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C}$, $\mathbf{C} \otimes (\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{C} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{C} \otimes \mathbf{B}$,

b) $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}) \otimes \mathbf{D} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})$,

c) $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{C})^\mathsf{T} = \mathbf{C}^\mathsf{T} \otimes \mathbf{A}^\mathsf{T}$,

A lineáris mátrixegyenleteknél fogjuk használni a következőket:

4.11. TÉTEL (A KRONECKER-SZORZAT ÉS A VEC-FÜGGVÉNY TULAJDONSÁGAI). *Adva van az $\mathbf{A}_{m\times n}$, $\mathbf{B}_{p\times q}$ és $\mathbf{X}_{n\times p}$ mátrix. Ekkor*

a) $\operatorname{vec}(\mathbf{AX}) = (\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{A})\operatorname{vec}(\mathbf{X})$, $\operatorname{vec}(\mathbf{XB}) = (\mathbf{B}^\mathsf{T} \otimes \mathbf{I}_n)\operatorname{vec}(\mathbf{X})$,

b) $\operatorname{vec}(\mathbf{AXB}) = (\mathbf{B}^\mathsf{T} \otimes \mathbf{A})\operatorname{vec}(\mathbf{X})$,

c) $\operatorname{vec}(\mathbf{AX}+\mathbf{XB}) = (\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{A} + \mathbf{B}^\mathsf{T} \otimes \mathbf{I}_n)\operatorname{vec}(\mathbf{X})$.

BIZONYÍTÁS. A fenti állítások mindegyike közvetlenül bizonyítható a definíció alapján. Szemléltetésül megmutatjuk a *b)* bizonyítását.

$$\begin{aligned} [\mathbf{AXB}]_{*j} &= \mathbf{AXB}_{*j} = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}(\mathbf{AX})_{*i} = \sum_{i=1}^{n}(b_{ij}\mathbf{A})\mathbf{X}_{*i} \\ &= [b_{1j}\mathbf{A}|\dots|b_{nj}\mathbf{A}]\operatorname{vec}(\mathbf{X}) = [\mathbf{B}^\mathsf{T} \otimes \mathbf{A}]_{*j}\operatorname{vec}(\mathbf{X}) \end{aligned}$$ □

*Hipermátrixok** Bizonyos adatok, természetüknél fogva, 2-nél magasabb dimenziós tömbben rendezhetők el jól.

4.12. definíció (Hipermátrix). *Legyen* $n_1, n_2, \ldots, n_d \in \mathbb{N}^+$ *és legyen* S *egy tetszőleges halmaz (pl.* $S = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{Z} \ldots$*).* d*-edrendű (vagy* d*-dimenziós)* $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_d$*-típusú* hipermátrixnak *nevezzük az*

$$\mathbf{A} : \{1, \ldots, n_1\} \times \{1, \ldots, n_2\} \times \ldots \times \{1, \ldots, n_d\} \to S$$

alakú leképezést. Az $\mathbf{A}(i_1, i_2, \ldots, i_d)$ *elemet* $a_{i_1 i_2 \ldots i_d}$*-vel jelöljük, melyre úgy gondolhatunk, mint egy* d*-dimenziós táblázat egy elemére és a mátrixoknál megszokotthoz hasonlóan írhatjuk, hogy*

$$\mathbf{A} = [a_{i_1 i_2 \ldots i_d}]_{i_1, i_2, \ldots, i_d = 1}^{n_1, n_2, \ldots, n_d} \quad \text{vagy egyszerűbben} \quad \mathbf{A} = [a_{i_1 i_2 \ldots i_d}].$$

Ha $n_1 = n_2 = \cdots = n_d = n$*, akkor a* hiper-kockamátrixról *beszélünk.*

Az S elemeiből képzett összes $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_d$-típusú hipermátrixok halmazát $S^{n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_d}$ jelöli.

A másodrendű hipermátrixok egybeesnek a mátrixokkal.

A 3-adrendű hipermátrixok elemeinek leírását papírra (tehát 2-dimenzióban) úgy oldhatjuk meg, hogy például a harmadik index szerint „szeletekre” vágjuk. E „szeletek” mindegyike egy mátrix, melyeket függőleges vonallal elválasztva egymás mellé írunk. Így például a $4 \times 2 \times 3$-típusú hipermátrixok általános alakja

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc} a_{111} & a_{121} & a_{112} & a_{122} & a_{113} & a_{123} \\ a_{211} & a_{221} & a_{212} & a_{222} & a_{213} & a_{223} \\ a_{311} & a_{321} & a_{312} & a_{322} & a_{313} & a_{323} \\ a_{411} & a_{421} & a_{412} & a_{422} & a_{413} & a_{423} \end{array}\right]$$

Két azonos típusú hipermátrix összeadása és egy hipermátrix skalárral való szorzása a mátrixokhoz hasonlóan elemenként történik:

$$[a_{i_1 i_2 \ldots i_d}] + [b_{i_1 i_2 \ldots i_d}] := [a_{i_1 i_2 \ldots i_d} + b_{i_1 i_2 \ldots i_d}],$$
$$c[a_{i_1 i_2 \ldots i_d}] := [c a_{i_1 i_2 \ldots i_d}].$$

4.13. definíció (Hipermátrix transzponáltja). *Legyen* π *az* $\{1, 2, \ldots, d\}$ *halmaz egy permutációja. A* d*-edrendű* $\mathbf{A} = [a_{i_1 i_2 \ldots i_d}] \in S^{n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_d}$ *hipermátrix* π-transzponáltján *az*

$$\mathbf{A}^\pi = [a_{i_{\pi(1)} i_{\pi(2)} \ldots i_{\pi(d)}}] \in S^{n_{\pi(1)} \times n_{\pi(2)} \times \ldots \times n_{\pi(d)}}$$

hipermátrixot értjük. Egy $\mathbf{A} \in S^{n \times n \times \ldots \times n}$ *hiper-kockamátrix* szimmetrikus*, ha minden* π *permutációra* $\mathbf{A}^\pi = \mathbf{A}$*, és* ferdén szimmetrikus*, ha* $\mathbf{A}^\pi = \operatorname{sgn}(\pi)\mathbf{A}$*, ahol* $\operatorname{sgn}(\pi) = -1$*, ha a* π *páratlan permutáció, és* 1*, ha páros.*

Eszerint a $2 \times 2 \times 2$-es hipermátrixok és szimmetrikus hipermátrixok általános alakja

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a_{111} & a_{121} & a_{112} & a_{122} \\ a_{211} & a_{221} & a_{212} & a_{222} \end{array}\right], \qquad \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & b & c \\ b & c & c & d \end{array}\right].$$

A $3 \times 3 \times 3$-as hipermátrixok, szimmetrikus és ferdén szimmetrikus hipermátrixok általános alakja

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_{111} & a_{121} & a_{131} & a_{112} & a_{122} & a_{132} & a_{113} & a_{123} & a_{133} \\ a_{211} & a_{221} & a_{231} & a_{212} & a_{222} & a_{232} & a_{213} & a_{223} & a_{233} \\ a_{311} & a_{321} & a_{331} & a_{312} & a_{322} & a_{332} & a_{313} & a_{323} & a_{333} \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a & b & c & b & d & e & c & e & f \\ b & d & e & d & g & h & e & h & i \\ c & e & f & e & h & i & f & i & j \end{array}\right], \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

ahol $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in S$ nem feltétlenül különböző elemek.

Feladatok

Táblázatok

4.1. Anti, Bori, Cili almát, banánt és citromot vesz a piacon, a hipermarketben vagy a csarnokban. Ha csak az ár számít, melyikük hol vásároljon?

	alma (kg)	banán (kg)	citrom (kg)
Anti	2	2	1
Bori	3	2	0.5
Cili	2	1	1

	csarnok (Ft/kg)	hipermarket (Ft/kg)	piac (Ft/kg)
alma	180	100	130
banán	390	420	360
citrom	210	210	230

4.2. Egy $f(x, y)$ kifejezésben elvégezzük az

$$\begin{aligned} x &= 2a + b \\ y &= 3a + b \end{aligned}$$

helyettesítést, majd az így kapott $f(2a + b, 3a + b)$ kifejezésben az

$$\begin{aligned} a &= -3s + t \\ b &= 4s - t \end{aligned}$$

helyettesítést. Számítsuk ki a két helyettesítés kompozícióját a helyettesítések végrehajtásával, és a nekik megfelelő táblázatok szorzásával is, azaz írjuk fel azt a helyettesítést, mely e két helyettesítés kompozíciójával ekvivalens!

4.3. Tegyük fel, hogy egy kifejezésben elvégezzük a következő két helyettesítést:

$$\begin{aligned} x &= 2a + b + 6c \qquad & a &= -s \phantom{{}-6t} + u \\ y &= 4a + b + 7c & b &= -3s - 6t + 10u \\ z &= 3a + b + 6c & c &= s + t - 2u \end{aligned}$$

Hogyan számíthatjuk ki a két helyettesítés kompozícióját? Írjuk fel azt a helyettesítést, mely e két helyettesítés kompozíciójával ekvivalens!

4.4.▲ Két versengő kereskedelmi TV-csatorna valóságshow-műsora kezdetben fele-fele arányban vonzza a nézőket. Az első hét végére a tv1 nézőinek fele, míg a tv2 nézőnek negyede átpártol a másik csatornára.

1. Készítsük el az átpártolás 2×2-es táblázatát, és a
2. nézők megoszlásának 2×1-es vagy 1×2-es táblázatát!
3. Táblázatok szorzásának segítségével határozzuk meg, hogy mi a nézők megoszlása az első és a második hét végén, ha az átpártolók aránya az idővel nem változik.
4. Írjuk fel az átpártolók kéthetenkénti táblázatát, azaz azt, amelyből kiolvasható, hogy két hét elteltével az egyes csatornák nézőinek hányadrésze pártol át, és mennyi marad!

Elemenkénti mátrixműveletek

4.5.● Adva vannak az alábbi mátrixok!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Számítsuk ki a következő kifejezések közül azok értékét, amelyek értelmezve vannak! *a)* $4\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$, *b)* $2\mathbf{B} - \mathbf{C}$, *c)* $2\mathbf{B} - \mathbf{C}^\mathsf{T}$,

4.6.▲ ELEMENKÉNTI MÁTRIXMŰVELET A DIGITÁLIS KÉPFELDOLGOZÁSBAN Egy leegyszerűsített képformátummal dolgozunk: az egészelemű $\mathbf{A}_{m\times n}$ mátrix reprezentáljon egy $m \times n$ képpontból álló szürkeárnyalatos képet. Minden mátrixelem egy képpont árnyalatát adja meg a $\{0, 1, \dots k\}$ tartományból, ahol 0 a fekete, $k - 1$ a fehér színnek felel meg és k az átlátszó pixeleket jelöli. Legyen egy képen a háttér átlátszó, és legyen $\mathbf{B}_{m\times n}$ egy tetszőleges másik kép azonos módon reprezentált mátrixa. Konstruáljuk meg azt a $\circledcirc$ jellel jelölt műveletet, amellyel az elemenkénti

$$\mathbf{A} \circledcirc \mathbf{B} := [a_{ij} \circledcirc b_{ij}]$$

mátrixművelet az $\mathbf{A}$ kép hátterébe másolja a $\mathbf{B}$ képet. Képletben:

$$a_{ij} \circledcirc b_{ij} = \begin{cases} b_{ij}, & \text{ha } a_{ij} = k, \\ a_{ij}, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A megoldásban használhatjuk a $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ függvényt, mely egy x számhoz annak alsó egész részét rendeli.

4.7. $\mathbb{R}^{m\times n}$ BÁZISA Adjuk meg az $\mathbb{R}^{m\times n}$ tér egy bázisát.

4.8. MÁTRIXOK ÁLTAL KIFESZÍTETT ALTÉR Jellemezzük az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ térnek azt az alterét, melyet az alább megadott $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrixok feszítenek ki! Másként fogalmazva: milyen összefüggések állnak fönn azon 2×2-es valós mátrixok elemei között, melyek az alábbi mátrixok lineáris kombinációiként állnak elő?

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mátrixszorzás

4.14. PÉLDA (MÁTRIXOK SZORZÁSA). *Legyen*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Számítsuk ki az $(\mathbf{AB})_{21}$ *elemet, majd az* $\mathbf{AB}$ *mátrixot.*

MEGOLDÁS. A szorzat második sorának elemei az **A** második sorának **B** oszlopaival való szorzatából kaphatók meg:

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ \mathbf{2} & \mathbf{1}\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}* & * & *\\ \mathbf{4} & \mathbf{3} & \mathbf{4}\\ * & * & *\end{bmatrix}$$

□

4.9• Adva vannak az alábbi mátrixok!

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\quad \mathbf{D}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

Számítsuk ki a következő kifejezések közül azok értékét, amelyek értelmezve vannak! *a)* $\mathbf{AB}$, *b)* $\mathbf{AB}^\mathsf{T}-\mathbf{D}$, *c)* $\mathbf{BC}$, *d)* $\mathbf{CB}$, *e)* $(\mathbf{DA})\mathbf{C}$.

4.10• A SZORZÁS NEM FELCSERÉLHETŐ Legyen

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}6 & 6\\ -2 & -1\end{bmatrix},\ \mathbf{E}=\begin{bmatrix}-2 & -6\\ 2 & 5\end{bmatrix}.$$

Döntsük el, hogy fönnállnak-e az $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$, $\mathbf{BC}=\mathbf{CB}$, $\mathbf{CD}=\mathbf{DC}$ és $\mathbf{DE}=\mathbf{ED}$ egyenlőségek.

Blokkmátrixok

4.11. 2×2-ES BLOKKMÁTRIXOK SZORZÁSA Legyen **A** és **B** két 2×2-es blokkmátrix, azaz legyen

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12}\\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22}\end{bmatrix}.$$

Írjuk fel szorzatukat a blokkok szorzatai segítségével.

4.12• Végezzük el az $\mathbf{A}+3\mathbf{C}$ és az $\mathbf{AB}$ műveleteket közönséges mátrixműveletekkel és blokkmátrixként számolva is, ha

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cc|c|c}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ \hline 0 & 0 & 3 & 0\end{array}\right],\quad \mathbf{B}=\left[\begin{array}{cc}2 & 4\\ 1 & 5\\ \hline 2 & 2\\ \hline 0 & 1\end{array}\right],\quad \mathbf{C}=\left[\begin{array}{cc|c|c}0 & 2 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 0 & 0\\ \hline 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right].$$

*Mátrixműveletek $\mathbb{Z}_m$-ben**

A mátrixműveletek minden további nélkül értelmezhetők $\mathbb{Z}_m$ fölötti mátrixokra is (általában bármely gyűrű fölötti mátrixokra, ld. az A. fejezetet a függelékben).

4.13▲ Egy lineáris kód **G** generátormátrixa és **H** ellenőrző mátrixa eleget tesz a $\mathbf{GH}^\mathsf{T}=\mathbf{O}$ összefüggésnek. Ellenőrizzük ezt a $[4,2,3]_3$ Hamming kód esetén a következő mátrixokkal az $\mathbb{F}_3$ testben számolva:

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{H}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

*Hipermátrixok**

4.14. HIPERMÁTRIXOK KÜLSŐ SZORZATA A vektorok diadikus szorzatát általánosítja a következő definíció: Legyen $\mathbf{A}\in S^{n_1\times\cdots\times n_d}$ egy d-edrendű és $\mathbf{B}\in S^{m_1\times\cdots\times m_e}$ egy e-edrendű hipermátrix. *Külső szorzatukon* azt a $(d+e)$-edrendű

$$\mathbf{C}=[c_{i_1\dots i_d j_1\dots j_e}]_{i_1,\dots,i_d,j_1,\dots,j_e=1}^{n_1,\dots,n_d,m_1,\dots,m_e}=\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}\in S^{n_1\times\cdots\times n_d\times m_1\times\cdots\times m_e}$$

hipermátrixot értjük, melyre $c_{i_1\dots i_d j_1\dots j_e}=a_{i_1\dots i_d}b_{j_1\dots j_e}$.Számítsuk ki az

$$\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\\ 4 & 0\end{bmatrix}$$

hipermátrixot!

4.15. MULTILINEÁRIS MÁTRIXSZORZÁS Definiáljunk egy hipermátrixműveletet a következőképp. Legyen $\mathbf{X}_1=[x_{ij}^{(1)}]\in S^{m_1\times n_1},\dots,\ \mathbf{X}_d=[x_{ij}^{(d)}]\in S^{m_d\times n_d}$ tetszőleges d mátrix, és legyen $\mathbf{A}\in S^{n_1\times\dots\times n_d}$ egy hipermátrix. Ekkor a $\mathbf{B}=(\mathbf{X}_1,\dots,\mathbf{X}_d)\cdot\mathbf{A}$ *multilineáris mátrixszorzatot* a

$$b_{i_1\dots i_d}=\sum_{j_1,\dots,j_d=1}^{n_1,\dots,n_d}x_{i_1j_1}^{(1)}\dots x_{i_dj_d}^{(d)}a_{j_1\dots j_d},$$

képlet definiálja, ahol $\mathbf{B}=[b_{i_1\dots i_d}]_{i_1,\dots,i_d=1}^{m_1,\dots,m_d}$.

Igazoljuk, hogy *a)* ha $d=1$, $n_1=n$ és $m_1=1$, akkor e szorzás megegyezik a skaláris szorzással; *b)* ha $d=2$, $m_1=m_2=1$ és $\mathbf{X}_1=\mathbf{X}_2$, akkor e szorzás kvadratikus alakot ad.

4.16. VEKTOROK SEGRE-FÉLE KÜLSŐ SZORZATA Legyen $n_1,n_2,\dots,n_d\in\mathbb{N}^+$ és legyen $\mathbf{a}_i=(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{in_i})\in S^{n_i}$ $(i=1,2,\dots,d)$. E vektorok *Segre-féle külső szorzatán* az

$$\mathbf{a}_1\otimes\mathbf{a}_2\otimes\dots\otimes\mathbf{a}_d=[a_{1i_1}a_{2i_2}\dots a_{di_d}]_{i_1,i_2,\dots,i_d=1}^{n_1,n_2,\dots,n_d}$$

hipermátrixot értjük.

Számítsuk ki a következő Segre-féle külső szorzatot:

$$\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 2\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 0\end{bmatrix}.$$

A mátrixszorzás használata

Mátrixszorzással az eddig tanultak áttekinthetőbbé és könnyebben kezelhetővé válnak (pl. vektorok lineáris kombinációja, az egyenletrendszerek és megoldásuk felírása).

Skaláris szorzat és diadikus szorzat mátrixszorzatos alakja Két oszlopvektor nem szorozható össze, ha 1-nél nagyobb dimenziósak. Viszont az egyikük transzponálása után a szorzás elvégezhető.

Legyen $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két $\mathbb{R}^n$-beli vektor. Az $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{b}$ szorzat a két vektor skaláris szorzatát adja, azaz

$$\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

ugyanis

$$\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Ha a második vektort transzponáljuk, a két vektor lehet különböző dimenziós is.

4.15. DEFINÍCIÓ (DIADIKUS SZORZAT). *Legyen* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. *Az* $\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}$ *szorzatot a két vektor* diadikus szorzatának, *röviden* diádnak *nevezzük. E szorzat egy $m \times n$-es mátrix:*

$$\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \dots & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \dots & u_2v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_mv_1 & u_mv_2 & \dots & u_mv_n \end{bmatrix}.$$

Két vektor diadikus szorzatát $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ *jelöli.*

4.16. PÉLDA (SKALÁRIS ÉS DIADIKUS SZORZAT). *Legyen* $\mathbf{u} = (1, 0, 2)$, $\mathbf{v} = (3, 2, 1)$. *Írjuk fel mátrixszorzatos alakba skaláris és diadikus szorzatukat, és számítsuk ki!*

MEGOLDÁS.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 5,$$

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

□

Lineáris egyenletrendszer mátrixszorzatos alakja A mátrixszorzást felhasználva a lineáris egyenletrendszerek egyszerű alakba írhatók.

4.17. ÁLLÍTÁS (LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MÁTRIXSZORZATOS ALAKJA). *Ha* $\mathbf{A}$ *jelöli egy egyenletrendszer együtthatómátrixát, illetve* $\mathbf{b}$ *a konstans tagok és* $\mathbf{x}$ *az ismeretlenek oszlopvektorát, azaz*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \textit{és} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

akkor az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\ \ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

egyenletrendszer $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *alakba írható.*

Könnyen ellenőrizhető a mátrixszorzás elvégzésével, hogy a

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \qquad \begin{aligned} ax \qquad &= u \\ by \quad &= v \\ cz &= w \end{aligned} \qquad \text{és} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ y &= 1 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszerek mátrixszorzatos alakjai rendre:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 5, \quad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4.18. PÉLDA (SZIMULTÁN EGYENLETRENDSZER MÁTRIXSZORZATOS ALAK). *Írjuk az alábbi két egyenletrendszert egyetlen mátrixszorzatos alakba!*

$$\begin{aligned} 2x_{11} + 3x_{21} &= 7 \qquad & 2x_{12} + 3x_{22} &= 9 \\ 3x_{11} - 4x_{21} &= 2 \qquad & 3x_{12} - 4x_{22} &= 5 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. A két egyenletrendszer mátrixszorzatos alakjai külön-külön

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Ezek egyetlen mátrixszorzattá olvaszthatók:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Általánosan a szimultán egyenletrendszerek $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ alakba írhatóak, ahol $\mathbf{X}$ az ismeretlenekből, $\mathbf{B}$ a jobb oldalakból alkotott mátrix. □

Lineáris helyettesítés mátrixszorzatos alakja Az egyenletrendszer mátrixszorzatos alakjához hasonlóan adódik a lineáris helyettesítés mátrixszorzatos alakja. Egyszerűen csak úgy kell tekintenünk az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenlőségre, hogy ott $\mathbf{b}$ koordinátái a helyettesítendő változók, melyek helyébe az $\mathbf{x}$ koordinátáinak egy lineáris kifejezését helyettesítjük. Ilyenkor inkább a $\mathbf{b} = \mathbf{Ax}$ alakot használjuk, és az $\mathbf{A}$ mátrixot a *lineáris helyettesítés mátrixának* nevezzük. Részletesebben lásd még a 4.36. feladatot.

Példaként íme egy lineáris helyettesítés és mátrixszorzatos alakja:

$$\begin{aligned} x &= 3a + 2b + 4c \\ y &= a - 3b + 2c \\ z &= 2a - b + 2c \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Szorzás vektorral Egy $m \times n$-es mátrix vektorral kétféleképp szorozható: jobbról egy $n \times 1$-es oszlopvektorral, balról egy $1 \times m$-es sorvektorral.

Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer oszlopmodelljéből láttuk, hogy az egyenletrendszer bal oldala az $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak az $\mathbf{x}$ koordinátáival vett lineáris kombinációja. Hasonló állítás igaz a sorvektorral balról való szorzásra is.

4.19. állítás (Mátrixszorzás és lineáris kombináció). *Legyen* $\mathbf{A}$ *$m \times n$-es mátrix,* $\mathbf{x}$ *n-dimenziós,* $\mathbf{y}$ *m-dimenziós vektor. Ekkor az* $\mathbf{Ax}$ *szorzat az* $\mathbf{A}$ *oszlopvektorainak*

$$\mathbf{a}_{*1}x_1 + \mathbf{a}_{*2}x_2 + \cdots + \mathbf{a}_{*n}x_n$$

lineáris kombinációját, míg az $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ *szorzat az* $\mathbf{A}$ *sorvektorainak*

$$\mathbf{a}_{1*}y_1 + \mathbf{a}_{2*}y_2 + \cdots + \mathbf{a}_{m*}y_m$$

lineáris kombinációját adja.

4.20. példa (Nulltér felírása mátrixszorzással). *Írjuk fel az*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix nullterének vektorait egy mátrix és egy vektor szorzataként!

Megoldás. A nulltér, azaz a mátrixhoz tartozó homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak tere könnyen leolvasható a redukált lépcsős alakból.

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&5&7&11\\0&1&1&1&-1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\0&1&1&1&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&0&1&2&7\\0&1&1&1&-1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

A szabad változókhoz rendelt paraméterek legyenek $x_3 = t_1$, $x_4 = t_2$, $x_5 = t_3$, amiből $x_1 = -t_1 - 2t_2 - 7t_3$ és $x_2 = -t_1 - t_2 + t_3$. Innen

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix} = t_1\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\0\\0\end{bmatrix} + t_2\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\1\\0\end{bmatrix} + t_3\begin{bmatrix}-7\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1&-2&-7\\-1&-1&1\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_1\\t_2\\t_3\end{bmatrix}.$$

□

► Vegyük észre, hogy a redukált lépcsős alak és a megoldás blokkszerkezete egyszerű kapcsolatot mutat:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{I}_2 & \mathbf{S}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix}-\mathbf{S}\\ \mathbf{I}_3\end{bmatrix}\mathbf{t},$$

ahol $\mathbf{t}$ a paraméterek vektora. Ez általánosítható tetszőleges homogén, és inhomogén lineáris egyenletrendszerekre (ld. a 4.53. feladatot).

Könnyen igazolhatók azok az összefüggések, melyeket a standard egységvektorokkal való szorzással kapunk. Jelölje $\mathbf{e}_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ azt a vektort, melynek i-edik koordinátája 1, a többi 0.

4.21. ÁLLÍTÁS (MÁTRIX ELEMEINEK, SOR- ÉS OSZLOPVEKTORAINAK ELŐÁLLÍTÁSA). *Legyen $\mathbf{A}$ egy $m \times n$-es mátrix, $\mathbf{e}_i$ m-dimenziós, $\mathbf{e}_j$ n-dimenziós standard egységvektor. Ekkor a standard $\mathbf{e}_i$ sorvektorral balról való szorzás a mátrix i-edik sorvektorát, az $\mathbf{e}_j$-vel jobbról való szorzás a mátrix j-edik oszlopvektorát adja, azaz*

$$\mathbf{e}_i^\mathsf{T}\mathbf{A} = \mathbf{a}_{i*} \quad \textit{és} \quad \mathbf{A}\mathbf{e}_j = \mathbf{a}_{*j},$$

továbbá

$$\mathbf{e}_i^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i^\mathsf{T}\mathbf{A})\mathbf{e}_j = a_{ij}.$$

Az $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^\mathsf{T}$ diád egy olyan mátrix, melynek (i, j)-indexű eleme 1, az összes többi 0:

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^\mathsf{T} = \begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \dots & 1 & \dots & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}.$$

A báziscsere mátrixszorzatos alakja Ha egy vektornak két különböző bázisban is meg van adva a koordinátás alakja, akkor az egyikből a másikat egy egyszerű mátrixszorzással is megkaphatjuk.

4.22. PÉLDA (ÁTTÉRÉS STANDARD BÁZISRA). *Az $\mathbb{R}^3$ térnek $\mathcal{B} = \{ (1,2,3), (0,2,3), (3,5,8) \}$ egy bázisa. Az e bázisban megadott $[\mathbf{v}]_\mathcal{B}$ vektornak írjuk fel a koordinátás alakját a standard bázisban egyetlen mátrixszorzással. Mi a* $\mathbf{v}$ *vektor standard koordinátás alakja, ha $[\mathbf{v}]_\mathcal{B} = (3,2,-1)$?*

MEGOLDÁS. $[\mathbf{v}]_\mathcal{B} = (3,2,-1)$ azt jelenti, hogy

$$\mathbf{v} = 3\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\5\\8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\5\\7\end{bmatrix},$$

ami mátrixszorzatos alakban

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1&0&3\\2&2&5\\3&3&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\5\\7\end{bmatrix}.$$

Legyen $[\mathbf{v}]_\mathcal{B} = (x,y,z)$. Ekkor

$$\mathbf{v} = x\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}3\\5\\8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&3\\2&2&5\\3&3&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}.$$

□

E példa a következő definícióhoz és állításhoz vezet:

4.23. DEFINÍCIÓ (ÁTTÉRÉS MÁTRIXA). *Legyen $\mathcal{B} = \{ \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n \}$ a $\mathcal{V}$ vektortér bázisa és $\mathcal{C}$ egy $\mathcal{V}$-t tartalmazó valamely (véges dimenziós) vektortér egy bázisa (például a $\mathcal{V}$ egy másik bázisa). A $\mathcal{B}$ vektorainak a $\mathcal{C}$ bázisban felírt koordinátás alakjaiból képzett mátrixot a $\mathcal{B}$ bázisról a $\mathcal{C}$-re való áttérés mátrixának. Ennek alakja tehát*

$$\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = [\, [\mathbf{b}_1]_\mathcal{C} \mid [\mathbf{b}_2]_\mathcal{C} \mid \cdots \mid [\mathbf{b}_n]_\mathcal{C} \,]$$

4.24. ÁLLÍTÁS (KOORDINÁTÁK VÁLTOZÁSA A BÁZIS CSERÉJÉNÉL). *Ha $\mathcal{B}$ a $\mathcal{V}$ vektortér egy bázisa, $\mathcal{C}$ egy $\mathcal{V}$-t tartalmazó vektortér egy bázisa és $\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ az áttérés mátrixa, akkor bármely* $\mathbf{v}$ *vektor $\mathcal{B}$-, illetve $\mathcal{C}$-beli koordinátás alakja közt fennáll a*

$$[\mathbf{v}]_\mathcal{C} = \mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_\mathcal{B}$$

összefüggés.

BIZONYÍTÁS. Legyen $[\mathbf{v}]_\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. A koordinátás alak jelentése szerint

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{b}_1 + v_2\mathbf{b}_2 + \ldots + v_n\mathbf{b}_n.$$

Ennek koordinátás alakja a $\mathcal{C}$ bázisban

$$\begin{aligned}[\mathbf{v}]_\mathcal{C} &= v_1[\mathbf{b}_1]_\mathcal{C} + v_2[\mathbf{b}_2]_\mathcal{C} + \ldots + v_n[\mathbf{b}_n]_\mathcal{C} \\ &= [\, [\mathbf{b}_1]_\mathcal{C} \mid [\mathbf{b}_2]_\mathcal{C} \mid \cdots \mid [\mathbf{b}_n]_\mathcal{C} \,]\, [\mathbf{v}]_\mathcal{B} \\ &= \mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_\mathcal{B}. \end{aligned}$$

□

▶ A 4.22. példában a $\mathcal{B}$ bázisról a standard $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ bázisra tértünk át, tehát az áttérés mátrixát jelölheti $\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$.

4.25. PÉLDA (ÁTTÉRÉS MÁTRIXA). *Legyen $\mathcal{E}$ az $\mathbb{R}^4$ standard bázisa, és $\mathcal{B}$ a 3.27. és a 3.28. példákban is szereplő $\mathbf{b}_1 = (1, 1, 0, -2)$ és $\mathbf{b}_2 = (2, 3, 3, -2)$ vektorok által kifeszített altér. Írjuk fel a $\mathcal{B}$-ről $\mathcal{E}$-re való áttérés mátrixát, és adjuk meg a $(-1, 1)_\mathcal{B}$ és a $(-3, 2)_\mathcal{B}$ vektorok $\mathcal{E}$-beli koordinátás alakját!*

MEGOLDÁS. Az áttérés mátrixa

$$\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = [\, [\mathbf{b}_1]_\mathcal{E} \mid [\mathbf{b}_2]_\mathcal{E} \,] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Így a két vektor koordinátás alakja a standard bázisban

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

□

*Bázisfelbontás** A 3.23. tétel második pontja szerint az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopai és redukált lépcsős alakjának oszlopai közt azonos lineáris kapcsolatok állnak fenn. A redukált lépcsős alak főoszlopainak megfelelő oszlopok az $\mathbf{A}$-ban az $\mathbf{A}$ oszlopterének bázisát adják. Az ezekből az oszlopokból képzett mátrix e bázisról a standard bázisra való áttérés mátrixa. A redukált lépcsős alak oszlopvektorai pedig az $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak e bázisra vonatkozó koordinátás alakjai. Mindezek adják a következő állítást:

4.26. ÁLLÍTÁS (BÁZISFELBONTÁS). *Jelölje az $\mathbf{A}$ mátrix redukált lépcsős alakjának nemzérus soraiból álló mátrixát $\mathbf{R}$, az $\mathbf{R}$ főoszlopainak megfelelő $\mathbf{A}$-beli oszlopok alkotta részmátrixot $\mathbf{B}$. Ekkor*

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}.$$

BIZONYÍTÁS. $\mathbf{B}$ oszlopai az $\mathbf{A}$ oszlopterének bázisát adják, tehát $\mathbf{B}$ a standard bázisra való áttérés mátrixa az $\mathbf{A}$ oszlopterében. Az $\mathbf{R}$ mátrix

j-edik oszlopa megegyezik az $\mathbf{A}$ mátrix j-edik oszlopának a $\mathbf{B}$ oszlopai alkotta bázisban felírt koordinátás alakjával. Képletben ez azt jelenti, hogy

$$\mathbf{A}_{*j} = \mathbf{B}\mathbf{R}_{*j}, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}. \qquad \square$$

Egy mátrix fenti $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{R}$ alakú felbontását *bázisfelbontásnak* nevezzük.

4.27. PÉLDA (BÁZISFELBONTÁS). *Határozzuk meg az alábbi mátrix bázisfelbontását, és magyarázzuk meg a két mátrix oszlopainak jelentését!*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{A}$ mátrix redukált lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

E mátrix első két sora alkotja az $\mathbf{R}$ mátrixot, az $\mathbf{A}$ mátrix első és második oszlopa a $\mathbf{B}$ mátrixot, így a felbontás

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{R}.$$

Az $\mathbf{R}$ oszlopai az $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak koordinátás alakjai a $\mathbf{B}$ oszlopai alkotta bázisban. Ezt már beláttuk a 3.27. és a 3.28. példákban. Eszerint

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = \mathbf{B}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}},$$

ahol az $\mathcal{E}$ a standard, $\mathcal{B}$ a $\mathbf{B}$ mátrix oszlopai alkotta bázisbeli koordinátás alakot jelöli. Például

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \quad [\mathbf{a}_4]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \ [\mathbf{a}_4]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{a}_4$ az $\mathbf{A}$ negyedik oszlopvektora. $\square$

► Ha az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix rangja r, akkor az $\mathbf{R}$ mátrix $r \times n$-es, a $\mathbf{B}$ mátrix $m \times r$-es. Ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixot két olyan mátrix szorzatára bontottuk, ahol az elsőnek az oszlopai, a másodiknak a sorai lineárisan függetlenek.

Egységmátrix, elemi mátrixok Egy adott $\mathbf{B}$ mátrixhoz találhatunk olyan $\mathbf{A}$-t, hogy az 1-gyel való szorzáshoz hasonlóan $\mathbf{AB} = \mathbf{B}$ legyen. Például

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

esetén

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Az azonban már nem igaz, hogy $\mathbf{A}$-t bármely 2×2-es $\mathbf{B}$ mátrixszal szorozva $\mathbf{B}$ lesz az eredmény. Ilyen mátrix is létezik, némi próbálkozás után bárki rátalálhat.

4.28. DEFINÍCIÓ (EGYSÉGMÁTRIX). *Az $n \times n$-es*

$$\mathbf{I}_n := \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixot egységmátrixnak *nevezzük.*

► Az egységmátrix elnevezés onnan származik, hogy bármely $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra igaz, hogy

$$\mathbf{I}_m \mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n} \mathbf{I}_n = \mathbf{A}_{m\times n},$$

azaz e mátrix hasonló tulajdonsággal rendelkezik, mint a számok közt az egy.

Az *egységmátrix* jelölésére használt $\mathbf{I}$ betű az angol *identity matrix* elnevezés első betűjéből származik. Az *azonosság* vagy *identitás* jelentésű *identity* szó az $\mathbf{IA} = \mathbf{A}$ összefüggésre utal (az $x \mapsto x$ függvényt ugyanezen okból hívjuk identikus függvénynek). Ráadásul az I betű hasonlít legjobban az 1-es számra.

► Az egységmátrixszal már találkoztunk: a Gauss – Jordan-módszernél egy n-ismeretlenes, n egyenletből álló egyértelműen megoldható egyenletrendszer együtthatómátrixa az elemi sorműveletek során egységmátrixszá transzformálódik!

Az egységmátrixon végrehajtott elemi sorműveletek olyan mátrixokat eredményeznek, melyek kapcsolatot létesítenek az elemi sorműveletek és a mátrixokkal való szorzás között.

4.29. DEFINÍCIÓ (ELEMI MÁTRIXOK). *Az $\mathbf{I}_n$ egységmátrixon végrehajtott egyetlen elemi sorművelettel kapott mátrixot* elemi mátrixnak *nevezzük.*

Az alábbi mátrixok elemi mátrixok:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ezt igazolja, hogy mindegyikük $\mathbf{I}_4$-ből származik rendre a következő elemi sorműveletekkel: $S_1 \leftrightarrow S_4$, $5S_2$, $S_1 + 2S_3$, $1S_1$. Az utolsó mátrix az egységmátrix, amely maga is elemi mátrix, mert például egy sorának 1-gyel való szorzásával megkapható.

4.30. PÉLDA (MÁTRIX BALRÓL SZORZÁSA ELEMI MÁTRIXSZAL). *Vizsgáljuk meg mi történik, ha az előbbi mátrixokkal balról megszorzunk egy tetszőleges 4-soros mátrixot?*

MEGOLDÁS. Legyen $\mathbf{A}$ egy 4- sorból, és az egyszerűség kedvéért csak 2 oszlopból álló mátrix.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix},$$

A szorzás eredményeként fölcserélődött $\mathbf{A}$ első és negyedik sora.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 5a_{21} & 5a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix},$$

Itt az $\mathbf{A}$ második sora be lett szorozva 5-tel.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + 2a_{31} & a_{12} + 2a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix},$$

A szorzás eredményeként az $\mathbf{A}$ első sorához hozzá lett adva harmadik sorának kétszerese. □

E példa eredménye kimondható tételként, melynek bizonyítása általánosan is úgy történik, mint az előző példában, ezért elhagyjuk:

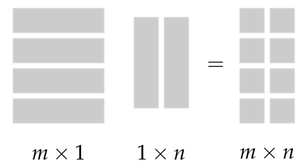
4.31. TÉTEL (ELEMI SORMŰVELETEK MÁTRIXSZORZÁSSAL). *Legyen* $\mathbf{E}$ *az az elemi mátrix, melyet* $\mathbf{I}_m$*-ből egy elemi sorművelettel kapunk. Ha ugyanezt a sorműveletet egy tetszőleges* $m \times n$*-es* $\mathbf{A}$ *mátrixra alkalmazzuk, akkor eredményül az* $\mathbf{EA}$ *mátrixot kapjuk.*

► Az elemi sorműveletek mátrixszorzással való elvégzésének nincs számítási praktikuma, annak célja az elemi sorműveletek algebraizálása, s így mélyebb megértése.

► Elemi mátrixszal való jobbról szorzás a mátrixon elemi oszlopműveletet hajt végre (ld. a **??** feladatot).

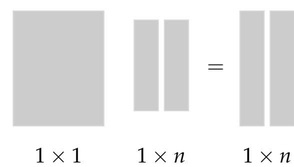
Vektorokra particionált mátrixok Megvizsgáljuk a mátrixszorzást, ha legalább az egyik tényezőt vektorokra particionáljuk, és blokkmátrixnak tekintjük. Legyen a következőkben $\mathbf{A}$ egy $m \times t$, $\mathbf{B}$ egy $t \times n$ méretű mátrix.

1. [sorvektorok] · [oszlopvektorok]: Bontsuk fel az $\mathbf{A}_{m\times t}$ mátrixot sorvektoraira, és a $\mathbf{B}_{t\times n}$ mátrixot oszlopvektoraira. Ekkor egy $m \times 1$-es blokkmátrixot szorzunk egy $1 \times n$-essel, ami épp az $\mathbf{AB}$ mátrixszorzat definícióját adja:



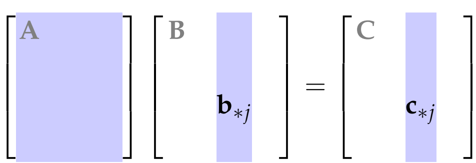
$$\mathbf{AB} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{a}_{1*} \\ \hline \mathbf{a}_{2*} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{a}_{m*} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{b}_{*1} & \dots & \mathbf{b}_{*n} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{1*}\mathbf{b}_{*1} & \mathbf{a}_{1*}\mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{a}_{1*}\mathbf{b}_{*n} \\ \mathbf{a}_{2*}\mathbf{b}_{*1} & \mathbf{a}_{2*}\mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{a}_{2*}\mathbf{b}_{*n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{m*}\mathbf{b}_{*1} & \mathbf{a}_{m*}\mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{a}_{m*}\mathbf{b}_{*n} \end{bmatrix}.$$

2. [mátrix] · [oszlopvektorok]: Ekkor egy 1×1-es blokkmátrixot szorzunk egy $1 \times n$-essel:



$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \mathbf{A}\left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{b}_{*1} & \mathbf{b}_{*2} & \dots & \mathbf{b}_{*n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{Ab}_{*1} & \mathbf{Ab}_{*2} & \dots & \mathbf{Ab}_{*n} \end{array}\right]$$

Itt tehát a $\mathbf{C}$ mátrix j-edik oszlopvektora az $\mathbf{A}$ mátrix és a $\mathbf{B}$ j-edik oszlopának szorzata, vagyis $\mathbf{c}_{*j} = \mathbf{Ab}_{*j}$. Sematikusan ábrázolva:

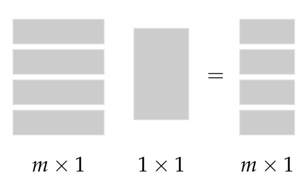


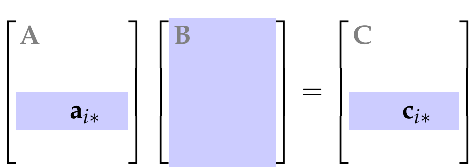
Ezzel az esettel már találkoztunk a szimultán egyenletrendszerek mátrixszorzatos alakjának fölírásánál (4.18. példa). Ha a fenti sematikus ábra egy szimultán egyenletrendszer mátrixszorzatos alakját reprezentálja, akkor a színesen kiemelt rész a szimultán egyenletrendszer egyetlen egyenletrendszerének felel meg.

3. [sorvektorok] · [mátrix]: Ekkor egy $m \times 1$-es blokkmátrixot szorzunk egy 1×1-essel:

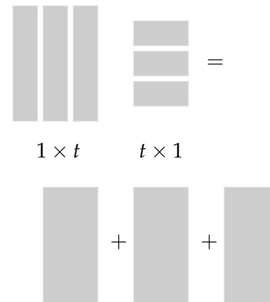
$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{a}_{1*} \\ \hline \mathbf{a}_{2*} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{a}_{m*} \end{array}\right] \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{a}_{1*}\mathbf{B} \\ \hline \mathbf{a}_{2*}\mathbf{B} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{a}_{m*}\mathbf{B} \end{array}\right]$$

Azaz itt a $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ mátrix i-edik sora az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorának $\mathbf{B}$-szerese. Másként írva $\mathbf{c}_{i*} = \mathbf{a}_{i*}\mathbf{B}$, sematikusan ábrázolva:





4. *[oszlopvektorok] · [sorvektorok]:* Ekkor egyetlen blokksorból álló mátrixot szorzunk egy blokkoszlopból állóval, azaz egy $1 \times t$-es blokkmátrixot egy $t \times 1$-essel. A skaláris szorzatra emlékeztető összeget kapunk:



$$\mathbf{AB} = \left[\ \mathbf{a}_{*1} \ \middle|\ \ldots \ \middle|\ \mathbf{a}_{*t}\ \right] \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1*} \\ \hline \ldots \\ \hline \mathbf{b}_{t*} \end{bmatrix} = \mathbf{a}_{*1}\mathbf{b}_{1*} + \mathbf{a}_{*2}\mathbf{b}_{2*} + \cdots + \mathbf{a}_{*t}\mathbf{b}_{t*}.$$

E felbontásban az **AB** mátrixot *diádok összegére* bontottuk! Például az alábbi mátrixszorzatot három diád összegére bontjuk:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Megjegyezzük, az eredmény maga is egy diád, hisz $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 8 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 8 \end{smallmatrix}\right][0\ 1]$, tehát egy mátrix többféleképp is felbontható diádok összegére. A mátrixok diádok – azaz 1-rangú – mátrixok összegére való bontása több alapfogalom megközelítésére alkalmas. Például a mátrix rangja definiálható úgy, mint a diadikus felbontásaiban szereplő diádok minimális száma.

E felbontásnak fontos speciális esete az, amikor **A** egyetlen sorból, vagy **B** egyetlen oszlopból áll. Ekkor az **AB** szorzat **B** sor-, illetve **A** oszlopvektorainak lineáris kombinációja:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

4.32. Állítás (A szorzat oszlopai és sorai). *Az **AB** mátrix minden oszlopa az **A** oszlopainak és minden sora a **B** sorainak lineáris kombinációja.*

Bizonyítás. Az **AB** mátrix j-edik oszlopa

$$(\mathbf{AB})_{*j} = \mathbf{Ab}_{*j} = \mathbf{a}_{*1}b_{1j} + \mathbf{a}_{*2}b_{2j} + \ldots + \mathbf{a}_{*t}b_{1t}$$

az i-edik sora pedig

$$(\mathbf{AB})_{i*} = \mathbf{a}_{i*}\mathbf{B} = a_{i1}\mathbf{b}_{1*} + a_{i2}\mathbf{b}_{2*} + \ldots + a_{it}\mathbf{b}_{t*},$$

ami bizonyítja az állítást. □

4.33. következmény (Szorzat rangja). $\mathrm{r}(\mathbf{AB}) \leqslant \mathrm{r}(\mathbf{A})$ *és* $\mathrm{r}(\mathbf{AB}) \leqslant \mathrm{r}(\mathbf{B})$, *így*

$$\mathrm{r}(\mathbf{AB}) \leqslant \min\left(\mathrm{r}(\mathbf{A}), \mathrm{r}(\mathbf{B})\right). \tag{4.2}$$

Bizonyítás. Az **AB** független oszlopainak száma legföljebb annyi, mint **A** független oszlopainak száma, hisz oszloptere az **A** oszlopterének altere, és **AB** független sorainak száma legföljebb annyi, mint **B** független sorainak száma, hisz sortere **B** sorterének altere. □

Feladatok

Mátrixműveletek

4.17• IGAZ – HAMIS Döntsük el, igazak-e az alábbi állítások? Válaszunkat indokoljuk!

a) Ha az $\mathbf{AB}$ és a $\mathbf{BA}$ szorzat is értelmezve van, akkor mindkét mátrix négyzetes.

b) Ha az $\mathbf{AB}$ és a $\mathbf{BA}$ szorzat is értelmezve van, akkor mindkét szorzat négyzetes.

c) Ha az $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ szorzat értelmezve van, akkor biztosan értelmezve van az $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ szorzat is.

A következőkben legyen

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2\\4&2\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}4&2\\4&5\end{bmatrix},\mathbf{C}=\begin{bmatrix}-3&2\\2&-1\end{bmatrix},\mathbf{D}=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}.$$

Végezzük el az alábbi műveleteket!

4.18. $2\mathbf{A}-3\mathbf{B}^{\mathsf{T}}$

4.19. $\mathbf{AB}-\mathbf{BA}+\mathbf{AC}-\mathbf{CA}$

4.20. $(\mathbf{CD}-\mathbf{DC})(\mathbf{ABC})$

4.21. $\mathbf{A}^2-\mathbf{C}^2$

4.22. $(\mathbf{C})_{2*}(\mathbf{D})_{*2}$

4.23. $(\mathbf{A})_{*1}(\mathbf{B})_{2*}$

4.24. A fenti jelölések mellett igazak-e a következő egyenlőségek?

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2=\mathbf{A}^2+2\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2,\quad (\mathbf{A}+\mathbf{C})^2=\mathbf{A}^2+2\mathbf{AC}+\mathbf{C}^2.$$

4.25. A fenti jelölések mellett igazak-e a következő egyenlőségek?

$$(\mathbf{C}+\mathbf{D})(\mathbf{C}-\mathbf{D})=\mathbf{C}^2-\mathbf{D}^2,\quad (\mathbf{A}+\mathbf{D})(\mathbf{A}-\mathbf{D})=\mathbf{A}^2-\mathbf{D}^2.$$

Számítsuk ki az alábbi vektorok skaláris és diadikus szorzatát! Írjuk fel mindkét műveletet mátrixszorzatos alakban!

4.26. $\mathbf{a}=(1,2)$, $\mathbf{b}=(0,1)$

4.27. $\mathbf{u}=(1,2,0,1)$, $\mathbf{v}=(0,1,2,3)$

4.28. $\mathbf{a}=(1,2,0)$, $\mathbf{b}=(0,1,2,3)$

Mátrixszorzatos alakok

Írjuk fel az alábbi egyenletrendszerek mátrixszorzatos alakját!

4.29.
$$\begin{aligned}x+y&=1\\x-z&=2\\z&=3\end{aligned}$$

4.30. $3x-2y+4z=5$

4.31.
$$\begin{aligned}2x+z&=1\\x-y-w&=2\\y+z+w&=2\\0&=3\end{aligned}$$

Írjuk fel az alábbi lineáris helyettesítések mátrixszorzatos alakját!

4.32.
$$\begin{aligned}u&=2x-4y\\v&=x+2y\end{aligned}$$

4.33.
$$\begin{aligned}x&=3a-2b+c\\y&=2a-c\\z&=b+2c\end{aligned}$$

4.34.
$$\begin{aligned}x&=3a+b\\y&=2a-b\\z&=b\end{aligned}$$

4.35.
$$\begin{aligned}x&=3a-2b+c\\y&=2a-c\end{aligned}$$

4.36• LINEÁRIS HELYETTESÍTÉS MÁTRIXSZORZATOS ALAKJA Írjuk fel az x_1, $x_2,\dots$, x_n változók lineáris kifejezéseinek az $y_1, y_2,\dots, y_m$ változók helyébe való helyettesítését általánosan leíró

$$\begin{aligned}y_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n\\y_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n\\\vdots\ &\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\y_m&=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n\end{aligned}$$

helyettesítés mátrixszorzatos alakját!

Áttérés mátrixa

Írjuk fel az alábbi $\mathcal{B}$ bázisról $\mathcal{C}$-re való áttérés mátrixát, ha $\mathcal{B}$ vektorainak $\mathcal{C}$-beli koordinátás alakját ismerjük. Írjuk fel a megadott vektorok $\mathcal{C}$-beli koordinátás alakját!

4.37• $\mathcal{B}=\{(1,1,1),(0,2,2),(0,0,3)\}$, $\mathcal{C}$ az $\mathbb{R}^3$ standard bázisa, $(\mathbf{u})_{\mathcal{B}}=(-1,1,1)$, $(\mathbf{v})_{\mathcal{B}}=(-3,2,0)$.

4.38• ÁTTÉRÉS ALTÉRRŐL $\mathcal{B}=\{(1,1,0,-2),(0,1,3,2)\}$, $\mathcal{C}$ az $\mathbb{R}^4$ standard bázisa, $(\mathbf{u})_{\mathcal{B}}=(2,1)$, $(\mathbf{v})_{\mathcal{B}}=(1,1)$, $(\mathbf{w})_{\mathcal{B}}=(1,2)$.

Vessük össze e feladatot a 3.26. példa első megoldásával és a **??** példával!

Bázisfelbontás

Határozzuk meg az alábbi mátrix bázisfelbontását, és magyarázzuk meg a két mátrix oszlopainak jelentését!

4.39•

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&8&6&2\\1&2&7&0&-11\end{bmatrix}.$$

4.40. $\begin{bmatrix}2&4&6\end{bmatrix}$

4.41. $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$

4.42. $\mathbf{A} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$, ahol $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ tetszőleges zérustól különböző vektorok.

Elemi mátrixok

Keressük meg azt az $\mathbf{E}$ *mátrixot, mely megoldása az alábbi mátrixegyenletnek!*

4.43. $\mathbf{E}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ e & f \\ c & d \end{bmatrix}$

4.44. $\mathbf{E}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 3c & 3d \\ e & f \end{bmatrix}$

4.45. $\mathbf{E}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c+2e & d+2f \\ e & f \end{bmatrix}$

4.46. $\mathbf{E}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c & b-d \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$

Elemi sorműveletekkel, mátrixszorzás nélkül határozzuk meg az alábbi mátrixszorzatok értékét!

4.47. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

4.48. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$

4.49.• [Elemi oszlopműveletek mátrixszorzással]
a) Minden elemi mátrix megkapható az egységmátrixból egyetlen elemi oszlopművelettel is.
b) Legyen $\mathbf{E}$ az az elemi mátrix, melyet $\mathbf{I}_n$-ből egy elemi oszlopművelettel kapunk. Ha ugyanezt az oszlopműveletet egy tetszőleges $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra alkalmazzuk, akkor eredményül az $\mathbf{AE}$ mátrixot kapjuk.

Blokkmátrixok

Számítsuk ki az alábbi feladatokban megadott mátrixszorzatokat a kijelölt blokkmátrixokat használva!

4.50. $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

4.51. $\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$

4.52. $\left[\begin{array}{ccc|c|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{array}\right]$

* 4.53. LINEÁRIS EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSÁNAK BLOKKMÁTRIX ALAKJA Tegyük fel, hogy az r rangú $\mathbf{A}$ mátrix első r oszlopa lineárisan független – ez oszlopcserékkel mindig elérhető. Jelölje $\mathbf{B}_r$ az $\mathbf{A}$ első r oszlopából álló mátrixot, és legyen $\mathbf{A}$, illetve az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ bővített mátrix redukált lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{S} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{S} & \mathbf{d}_r \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{d}_r$ egy r-dimenziós vektor. Ekkor

1. az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldható, és megoldása
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_r \\ \mathbf{0}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{S} \\ \mathbf{I}_s \end{bmatrix} \mathbf{t}_s,$$
ahol s a szabad változók száma, azaz $s = n - r$, és $\mathbf{t}_s$ a szabad paraméterek vektora, ráadásul $\mathbf{A} = \mathbf{B}_r[\mathbf{I}_r|\mathbf{S}]$ és $\mathbf{b} = \mathbf{B}_r\mathbf{d}_r$, továbbá
2. az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldása
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\mathbf{S} \\ \mathbf{I}_s \end{bmatrix} \mathbf{t}_s,$$
ahol a $\left[\begin{smallmatrix} -\mathbf{S} \\ \mathbf{I}_s \end{smallmatrix}\right]$ mátrix oszlopvektorai a nulltér bázisát alkotják.

Vegyes feladatok

4.54. A *sudoku* egy olyan logikai játék, melyben egy olyan 9×9-es mátrixot kell megadni, melynek ismerjük néhány, de nem minden elemét. A feladat a nem ismert elemek meghatározása. A mátrix 9 darab 3×3-as blokkra van particionálva és eleget tesz annak a feltételnek, hogy minden sorában, minden oszlopában és minden blokkjában az 1-től 9-ig terjedő egészek mindegyike egyszer szerepel. Ez azt jelenti, hogy az egy sorban, egy oszlopban és egy blokkban lévő számok összege mindig 45. Fejezzük ki ezt mátrixműveletekkel, azaz írjunk fel a sudoku tábla $\mathbf{A}$ mátrixát is tartalmazó olyan mátrixegyenleteket, melyeket minden helyesen kitöltött sudoku tábla mátrixa kielégít!

4.55. Hány eleme van a $\mathbb{Z}_2^{2\times 2}$-nek, azaz a kételemű test fölötti 2×2-es mátrixok terének?

Megoldások

4.1. A két táblázat szorzata:

	csarnok	hipermarket	piac
Anti	1350	1250	1210
Bori	1425	1245	1225
Cili	960	830	850

Tehát Antinak és Borinak a piacon, Cilinek a hipermarketben érdemes vásárolnia.

4.2. A két helyettesítést elvégezve:

$$x = 2a + b = 2(-3s + t) + (4s - t) = -2s + t,$$
$$y = 3a + b = 3(-3s + t) + (4s - t) = -5s + 2t.$$

A két helyettesítés kompozíciója a két helyettesítés táblázatának szorzatával megkapható:

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline x & 2 & 1 \\ y & 3 & 1 \end{array} \times \begin{array}{c|cc} & s & t \\ \hline a & -3 & 1 \\ b & 4 & -1 \end{array} = \begin{array}{c|cc} & s & t \\ \hline x & -2 & 1 \\ y & -5 & 2 \end{array}$$

4.3. A két helyettesítés kompozíciója a két helyettesítés táblázatának szorzatával megkapható. E szorzatból az olvasható le, hogy a kompozícióval kapott helyettesítés: $x = s$, $y = t$, $z = u$. Ez azt jelenti, hogy a két helyettesítés valamilyen értelemben egymás inverze.

4.4.

1. Kétféleképp adhatjuk meg a táblázatot, ha az első sor és oszlop a tv1-é:

-re	*tv1*	*tv2*
tv1	1/2	1/4
tv2	1/2	3/4

-ről	*tv1*	*tv2*
tv1	1/2	1/2
tv2	1/4	3/4

2. A nézők kezdeti eloszlásának táblázatára a két lehetőség:

	arány
tv1	1/2
tv2	1/2

	tv1	*tv2*
arány	1/2	1/2

3. Először válaszoljuk meg a kérdést a tv1-re: a saját nézőinek fele marad ($\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$), ehhez jön a tv2 nézőinek negyede ($\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$), ez összesen $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$. A tv2-re a számítás: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$. Ez táblázatok szorzásával az előző 2-2 felírást használva:

$$\begin{array}{c|cc} \textit{-re} & \textit{tv1} & \textit{tv2} \\ \hline \textit{tv1} & 1/2 & 1/4 \\ \textit{tv2} & 1/2 & 3/4 \end{array} \times \begin{array}{c|c} & \textit{arány} \\ \hline \textit{tv1} & 1/2 \\ \textit{tv2} & 1/2 \end{array} = \begin{array}{c|c} & \textit{arány} \\ \hline \textit{tv1} & 3/8 \\ \textit{tv2} & 5/8 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} & \textit{tv1} & \textit{tv2} \\ \hline \textit{arány} & 1/2 & 1/2 \end{array} \times \begin{array}{c|cc} \textit{-ről} & \textit{tv1} & \textit{tv2} \\ \hline \textit{tv1} & 1/2 & 1/2 \\ \textit{tv2} & 1/4 & 3/4 \end{array} = \begin{array}{c|cc} & \textit{tv1} & \textit{tv2} \\ \hline \textit{arány} & 3/8 & 5/8 \end{array}$$

4. Csak az átpártolás táblázatát nézve, a második hét végére a tv1 nézői első héten megmaradt felének csak a fele marad meg, míg a tv2-től átpártolt negyednyi közönségnek is a fele, tehát a tv1 → tv1 „mozgás" a nézők 3/8-adát érinti, mert $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$. Hasonló számításokkal a többi érték is megkapható, melyet az alábbi, két, táblázatok közti szorzással is meg lehet adni:

$$\begin{array}{c|cc} \textit{-re} & \textit{tv1} & \textit{tv2} \\ \hline \textit{tv1} & 1/2 & 1/4 \\ \textit{tv2} & 1/2 & 3/4 \end{array} \times \begin{array}{c|cc} \textit{-re} & \textit{tv1} & \textit{tv2} \\ \hline \textit{tv1} & 1/2 & 1/4 \\ \textit{tv2} & 1/2 & 3/4 \end{array} = \begin{array}{c|cc} \textit{-re} & \textit{tv1} & \textit{tv2} \\ \hline \textit{tv1} & 3/8 & 5/16 \\ \textit{tv2} & 5/8 & 11/16 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} \textit{-ről} & \textit{tv1} & \textit{tv2} \\ \hline \textit{tv1} & 1/2 & 1/2 \\ \textit{tv2} & 1/4 & 3/4 \end{array} \times \begin{array}{c|cc} \textit{-ről} & \textit{tv1} & \textit{tv2} \\ \hline \textit{tv1} & 1/2 & 1/2 \\ \textit{tv2} & 1/4 & 3/4 \end{array} = \begin{array}{c|cc} \textit{-ről} & \textit{tv1} & \textit{tv2} \\ \hline \textit{tv1} & 3/8 & 5/8 \\ \textit{tv2} & 5/16 & 11/16 \end{array}$$

4.5. *a)* $4\mathbf{A} - 3\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 12 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, *b)* $2\mathbf{B} - \mathbf{C}$ nincs értelmezve. *c)* $2\mathbf{B} - \mathbf{C}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

4.6. Ha a a $[0, k]$ intervallumba eső szám, akkor $0 \le a/k \le 1$, így a/k egész része 0 vagy 1. Részletezve $\lfloor a/k \rfloor$ pontosan akkor 1, ha $a = k$, azaz ha a pixel átlátszó, egyébként 0. Másrészt $1 - \lfloor a/k \rfloor$ pontosan akkor 0, ha $a = k$, egyébként 1. Ezt kihasználva könnyen definiálható a kívánt művelet:

$$a \odot b = \left\lfloor \frac{a}{k} \right\rfloor b + \left(1 - \left\lfloor \frac{a}{k} \right\rfloor\right) a.$$

Így e művelettel elemenként definiált $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$ művelet a kívánt eredményt adja. A 4.2. ábrán három képet 32×24-es mátrixszal szemléltetünk, a férfiarc mátrixát is megadtuk, a másik a háttér. A művelet eredménye a harmadik kép.

4.7. A standard bázisba azon mátrixok tartoznak, amelyekben egyetlen elem 1, a többi 0.

4.8. E mátrixok összes lineáris kombinációja

$$a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} = \begin{bmatrix} a + b + c & a + c \\ a & b + c \end{bmatrix}$$

alakú. Ha egy tetszőleges $\left[\begin{smallmatrix} u & v \\ w & z \end{smallmatrix}\right]$ mátrixról el akarjuk dönteni, hogy a fenti alakú-e, azaz fönnáll-e valamely a, b, c

ismeretlenekre az

$$\begin{bmatrix} a+b+c & a+c \\ a & b+c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & v \\ w & z \end{bmatrix}$$

egyenlőség, akkor meg kell oldani a mátrixok négy elemére vonatkozó négy egyenletből álló 3-ismeretlenes egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} a+b+c &= u \\ a \quad +c &= v \\ a \qquad &= w \\ b+c &= z \end{aligned}$$

Ha ennek van megoldása, akkor létezik a megfelelő lineáris kombináció, tehát az adott $\left[\begin{smallmatrix} u & v \\ w & z \end{smallmatrix}\right]$ mátrix a kifeszített térbe esik. Ennek az egyenletrendszernek a bővített mátrixát fölírva, majd elemi sorműveletekkel megoldva a következőt kapjuk:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & u \\ 1 & 0 & 1 & v \\ 1 & 0 & 0 & w \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & w \\ 0 & 1 & 1 & u-w \\ 0 & 0 & 1 & v-w \\ 0 & 0 & 0 & w+z-u \end{array}\right].$$

A lépcsős alakból leolvasható, hogy ez az egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $w+z-u=0$. Például az $\left[\begin{smallmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix ebbe az altérbe esik. A fenti egyenletrendszer megoldásával az is megkapható, hogy mik a lineáris kombináció együtthatói. Azt kapjuk, hogy $a=3$, $b=1$ és $c=1$.

4.9. *a)* **AB** nincs értelmezve. *b)* $\mathbf{AB}^\mathsf{T} - \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, *c)* $\mathbf{BC} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, *d)* $\mathbf{CB} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *e)* $(\mathbf{DA})\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 32 & 23 \\ 16 & 13 \end{bmatrix}$.

4.10. A méretek alapján a **BC** szorzat nincs értelmezve, a többi:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 9 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \ \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}, \ \mathbf{CB} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{CD} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}, \ \mathbf{DC} = \begin{bmatrix} 12 & 12 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \ \mathbf{DE} = \mathbf{ED} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Összefoglalva: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, mert különböző típusúak, $\mathbf{BC} \neq \mathbf{CB}$, mert az egyik oldal nincs értelmezve, $\mathbf{CD} \neq \mathbf{DC}$, bár mindkét oldal értelmezve van és azonos típusú. Az előzőekkel ellentétben viszont fennáll a $\mathbf{DE} = \mathbf{ED}$ egyenlőség. Azaz vannak felcserélhető mátrixok, de a mátrixszorzás nem felcserélhető művelet, tehát nem kommutatív!

4.11. Az **AB** szorzat felírható

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}$$

alakban. A **BA** hasonlóképp írható fel! Ellenőrizzük, hogy a 4.9. állítás feltétele (minden k-ra az $\mathbf{A}_{ik}$ blokk oszlopainak száma megegyezik $\mathbf{B}_{kj}$ sorainak számával) valóban szükséges, de elégséges is.

4.12. Számoljunk blokkmátrixként kezelve a mátrixokat:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} + 3\mathbf{C} &= \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] + 3 \left[\begin{array}{cc|c|c} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \\
&= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} & 3 + 3 \cdot 1 & 0 + 3 \cdot 1 \end{bmatrix} \\
&= \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 6 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 6 & 3 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

Ellenőrizzük a számítást közönséges mátrixműveletekkel! Ezután tekintsük a blokkmátrixok szorzását!

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ 1 & 5 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \\
&= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} 4 & 6 \\ 3 & 9 \\ \hline 6 & 6 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha ellenőrzésül egyszerű mátrixszorzással is elvégezzük a műveletet!

4.13. Valóban

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.14. Az $\mathbb{R}^2$- és $\mathbb{R}^{3\times 2}$-beli hipermátrixok külső szorzata

$\mathbb{R}^{2\times 3\times 2}$-ba esik:

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0&1\\2&3\\4&0\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&2&4&1&3&0\\0&4&8&2&6&0\end{array}\right]$$

4.16. A Segre-féle külső szorzat:

$$\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}0&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&2&2&0&4&0&0&0\\2&0&4&4&0&8&0&0&0\end{array}\right].$$

4.17. *a)* Hamis, *b)* igaz, *c)* igaz.

4.26. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=2$, $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}=\mathbf{a}\mathbf{b}^\mathsf{T}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&2\end{bmatrix}$.

4.27. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v}=\begin{bmatrix}1&2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix}=5,$

$$\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}=\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}=\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&2&3\\0&2&4&6\\0&0&0&0\\0&1&2&3\end{bmatrix}.$$

4.28. A skaláris szorzat nem végezhető el, a diadikus szorzat

$$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}=\mathbf{a}\mathbf{b}^\mathsf{T}=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&2&3\\0&2&4&6\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

4.29. $\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

4.35. $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-2&1\\2&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$

4.36. A lineáris helyettesítés mátrixszorzatos alakja

$$\mathbf{y}=\mathbf{A}\mathbf{x},$$

ahol

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{bmatrix},\quad\mathbf{y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{bmatrix},\quad\text{és}\quad\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}.$$

4.37. Az áttérés mátrixa

$$\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&2&3\end{bmatrix},$$

Ezt fölhasználva kapjuk, hogy

$$[\mathbf{u}]_\mathcal{C}=\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{u}]_\mathcal{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\4\end{bmatrix},$$

továbbá

$$[\mathbf{v}]_\mathcal{C}=\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_\mathcal{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}0=\begin{bmatrix}-3\\1\\1\\.\end{bmatrix}$$

4.38. Az áttérés mátrixa

$$\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\0&3\\-2&2\end{bmatrix}.$$

Ezt fölhasználva kapjuk, hogy

$$[\mathbf{u}]_\mathcal{C}=\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{u}]_\mathcal{B}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\0&3\\-2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\3\\-2\end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{v}]_\mathcal{C}=\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_\mathcal{B}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\0&3\\-2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\0\end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{v}]_\mathcal{C}=\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_\mathcal{B}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\0&3\\-2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\6\\2\end{bmatrix}.$$

4.39. Az $\mathbf{A}$ mátrix redukált lépcsős alakja:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&8&6&2\\1&2&7&0&-11\end{bmatrix}\implies\begin{bmatrix}1&2&0&7&17\\0&0&1&-1&-4\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

E mátrix első két sora alkotja az $\mathbf{R}$ mátrixot, az $\mathbf{A}$ mátrix első és harmadik oszlopa a $\mathbf{B}$ mátrixot, így a felbontás

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&8&6&2\\1&2&7&0&-11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3\\2&8\\1&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&0&7&17\\0&0&1&-1&-4\end{bmatrix}=\mathbf{B}\mathbf{R}.$$

Az $\mathbf{R}$ oszlopai az $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak koordinátás alakjai a $\mathbf{B}$ oszlopai alkotta bázisban, azaz

$$[\mathbf{v}]_\mathcal{E}=\mathbf{B}[\mathbf{v}]_\mathcal{B},$$

ahol az $\mathcal{E}$ indexszel a standard, $\mathcal{B}$-vel a $\mathbf{B}$ mátrix oszlopai alkotta bázisbeli koordinátás alakját jelöltük ugyanannak a vektornak. Például

$$\begin{bmatrix}4\\6\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&3\\2&8\\1&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\-1\end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \quad [\mathbf{a}_4]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix}4\\6\\0\end{bmatrix}, [\mathbf{a}_4]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}7\\-1\end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{a}_4$ az $\mathbf{A}$ negyedik oszlopvektora.

4.40. $\begin{bmatrix}2&4&6\end{bmatrix} = [2]\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}$.

4.41. $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}[1]$

4.42. Egy bázisfelbontás az $\mathbf{u}\otimes\mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}$ összefüggést felhasználva $(c\mathbf{u})(\frac{1}{c}\mathbf{v}^\mathsf{T})$, ahol c a $\mathbf{v}$ első nemnulla koordinátája.

4.43. $\mathbf{E} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$

4.44. $\mathbf{E} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

4.45. $\mathbf{E} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$

4.46. $\mathbf{E} = \begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

4.47. $\begin{bmatrix}2&2&2\\2&2&2\\8&8&8\end{bmatrix}$

4.48. $\begin{bmatrix}a\\2d-2b\\3a+c\\d\end{bmatrix}$

4.50. $\left[\begin{array}{cc|cc}2&3&2&2\\4&5&2&2\\\hline 0&0&2&2\\0&0&3&3\end{array}\right]$

4.51. $\left[\begin{array}{cc|c}2&3&10\\4&5&14\\\hline 0&0&5\end{array}\right]$

4.52. $\left[\begin{array}{cc}5&6\\6&7\\\hline 12&12\end{array}\right]$

4.53. Mivel $[\mathbf{I}_r|\mathbf{S}]$ az $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja, ezért ennek bármely oszlopa az $\mathbf{A}$ mátrix azonos sorszámú oszlopának koordinátás alakja az $\mathbf{B}_r$ oszlopvektoraiban, mint bázisban felírva. Ez épp azt jelenti, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{B}_r[\mathbf{I}_r|\mathbf{S}]$. Ez az oszloptér bármely oszlopára, így $\mathbf{b}$-re is igaz, hisz $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ redukált lépcsős alakja szerint az egyenletrendszer megoldható, így $\mathbf{b}$ eleme az oszloptérnek. Eszerint tehát $\mathbf{b} = \mathbf{B}_r\mathbf{d}_r$.

Az, hogy minden megoldás fölírható ilyen alakba, a Gauss–Jordan-módszerből következik. Meg kell még mutatni, hogy a tételben felírt $\mathbf{x}$ vektor valóban megoldás.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{B}_r\begin{bmatrix}\mathbf{I}_r & \mathbf{S}\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{d}_r\\\mathbf{0}_s\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-\mathbf{S}\\\mathbf{I}_s\end{bmatrix}\mathbf{t}_s\right)\\ &= \mathbf{B}_r\left(\mathbf{d}_r - \mathbf{S}\mathbf{t}_s + \mathbf{S}\mathbf{t}_s\right) = \mathbf{B}_r\mathbf{d}_r\\ &= \mathbf{b}.\end{aligned}$$

Ez bizonyítja az állítás első felét. A második felének bizonyításához csak azt kell látni, hogy $\left[\begin{smallmatrix}-\mathbf{S}\\\mathbf{I}_s\end{smallmatrix}\right]$ oszlopvektorai a nulltér bázisát alkotják. Ez abból következik, hogy egyrészt kifeszítik a nullteret, másrészt lineárisan függetlenek, hisz az alsó blokkban lévő $\mathbf{I}_s$ mátrix oszlopai lineárisan függetlenek.

4.54. Jelölje $\mathbf{j}$ a csupa 1-esből álló 9-dimenziós vektort, $\mathbf{j}_{456}$ azt, amelynek 4, 5, 6 indexű eleme 1-es, a többi 0. Ekkor a „minden sorösszeg 45” és a „minden oszlopösszeg 45” feltételek ekvivalensek az $\mathbf{A}\mathbf{j} = 45\mathbf{j}$, $\mathbf{j}^\mathsf{T}\mathbf{A} = 45\mathbf{j}^\mathsf{T}$ egyenletekkel, míg pl. az „első blokkoszlop, második blokksor metszetében álló blokk elemeinek összege 45” feltételnek a $\mathbf{j}_{456}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{j}_{123} = 45$ egyenlet felel meg.

4.55. $\mathbb{Z}_2^{2\times 2}$-be $2^4 = 16$ mátrix tartozik:

$$\mathbb{Z}_2^{2\times 2} = \left\{\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1&0\\1&0\end{smallmatrix}\right], \dots, \left[\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right]\right\}.$$

5
Mátrixműveletek algebrája

Áttekintjük a mátrixműveletek legfontosabb algebrai tulajdonságait. Ezek nem csak a mátrixokkal való számolás közben követendő szabályokról szólnak, de hozzásegítenek az lineáris egyenletrendszerek mélyebb megértéséhez, és olyan eszközöket adnak a kezünkbe, például a mátrixfelbontásokkal, melyek a lineáris algebra alkalmazásaiban is fontosak.

Az alapműveletek tulajdonságai

Az összeadás és a skalárral szorzás őrzi a valósok műveleti tulajdonságait, de a mátrixszorzás nem.

Az összeadás és a skalárral való szorzás tulajdonságai Mivel a mátrixok összeadása és skalárral való szorzása elemenként végrehajtható műveletek, ezért műveleti tulajdonságaik természetes módon öröklik meg a számok műveleti tulajdonságait. Például azonos típusú mátrixok összeadása felcserélhető (kommutatív) és csoportosítható (asszociatív) művelet, míg összeg skalárral való szorzása disztributív. Tehát

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}, \quad \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C},$$
$$c(\mathbf{A}+\mathbf{B})=c\mathbf{A}+c\mathbf{B}, \quad (c+d)\mathbf{A}=c\mathbf{A}+d\mathbf{A}.$$

E tulajdonságok igazolását az Olvasóra hagyjuk (ld. 5.4. feladat).

A szorzás tulajdonságai A számok szorzásának algebrai tulajdonságai nem öröklődnek automatikusan a mátrixműveletekre, mint az összeadásnál. Nem is teljesülnek mind, pl. a mátrixszorzás *nem kommutatív*.

A mátrixokkal való számolás közben nem csak arra kell ügyelnünk, hogy bizonyos azonosságok nem teljesülnek, de arra is, hogy bizonyos elemi eljárások nem végezhetők el olyan tág körben, mint azt a valós számoknál megszoktuk.

5.1. ÁLLÍTÁS (MIRE VIGYÁZZUNK A MÁTRIXSZORZÁSNÁL?).

a) *A mátrixszorzás nem kommutatív, azaz* $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ *nem áll fenn bármely két összeszorozható mátrixra.*

b) *Ha* $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, *akkor az* $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ *feltétel kevés ahhoz, hogy a* $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ *következtetésre jussunk.*

c) *Az* $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$ *egyenlőségből nem következik, hogy* $\mathbf{A}$ *vagy* $\mathbf{B}$ *a nullmátrix.*

▶ A mátrixszorzás kommutativitásának cáfolására az egyik legegyszerűbb példa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{de} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A 4.10. feladatban további példákat mutatunk.

▶ A valós számok közt igaz, hogy ha $a \neq 0$ és $ab = ac$, akkor a-val egyszerűsíthetünk, azaz akkor $b = c$. Mátrixokra egy ellenpélda:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{de} \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nullosztóval találkozhatunk a $\mathbb{Z}_m$-ben való számolásnál is, ha m összetett. Például $\mathbb{Z}_6$-ban $2 \cdot 3 = 0$. Összetett m esetén egyszerűsíteni sem lehet mindig $\mathbb{Z}_m$-ben, például $\mathbb{Z}_{12}$-ben $9 \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6$, de $9 \neq 2$.

▶ *Nullosztónak* nevezzük egy algebrai struktúra olyan nemzérus elemét, melyhez található olyan nemzérus elem, mellyel vett szorzata zérus. Valósok közt ilyenek nincsenek, de a mátrixok közt igen, például

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

5.2. TÉTEL (MÁTRIXSZORZÁS ALGEBRAI TULAJDONSÁGAI). *Legyen* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *és* $\mathbf{C}$ *olyan, hogy a kijelölt műveletek elvégezhetők legyenek, legyen továbbá* c *tetszőleges skalár. Ekkor*

a) $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ *csoportosíthatóság, asszociativitás*

b) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ *disztributivitás*

c) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ *disztributivitás*

d) $(c\mathbf{A})\mathbf{B} = c(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(c\mathbf{B})$

e) $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{O}_{n\times t} = \mathbf{O}_{m\times t}$ *szorzás nullmátrixszal*

f) $\mathbf{I}_m\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{I}_n = \mathbf{A}_{m\times n}$ *szorzás egységmátrixszal*

BIZONYÍTÁS. A fenti tulajdonságok közül csak az elsőt bizonyítjuk, a többit hasonlóan, vagy még egyszerűbben bizonyítható.

a) Valójában többet bizonyítunk. Megmutatjuk, hogy ha az egyenlőség egyik oldalán kijelölt szorzások elvégezhetők, akkor a másik oldalon kijelöltek is. Legyen $\mathbf{A}_{m\times s}$, $\mathbf{B}_{u\times v}$ és $\mathbf{C}_{t\times n}$ három tetszőleges mátrix. Az $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ szorzatban $\mathbf{AB}$ csak $s = u$ esetén végezhető el, a szorzat típusa $m \times v$, ami $\mathbf{C}$-vel csak $v = t$ esetén szorozható meg, és a szorzat $m \times n$-es. Tehát e szorzat csak akkor van értelmezve, ha $\mathbf{B}$ típusa $s \times t$. Hasonló érveléssel ugyanezt kapjuk az $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ szorzatról is.

Az indexek kezelésének könnyítésére elég lesz a bizonyítást sorvektor alakú **A** és oszlopvektor alakú **C** mátrixokra elvégezni, ugyanis az $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ szorzat i-edik sorában és j-edik oszlopában álló elem az **AB** i-edik sorának, azaz az $\mathbf{a}_{i*}\mathbf{B}$ sorvektornak és **C** j-edik oszlopának szorzata, azaz $(\mathbf{a}_{i*}\mathbf{B})\mathbf{c}_{*j}$. Hasonlóképp az $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ szorzat i-edik sorában és j-edik oszlopában álló elem $\mathbf{a}_{i*}(\mathbf{Bc}_{*j})$. Legyen tehát

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Ekkor a szorzat 1×1-es. Először számoljuk ki az **AB** mátrixot, ami $1 \times n$-es: $\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m a_k b_{k1} & \sum_{k=1}^m a_k b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^m a_k b_{kn} \end{bmatrix}$. Innen számolva $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$-t:

$$\begin{bmatrix} \sum\limits_{k=1}^m a_k b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^m a_k b_{k2} & \dots & \sum\limits_{k=1}^m a_k b_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m a_k b_{kl} c_l.$$

Hasonlóan, először **BC**-t fölírva, az $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ mátrixra kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^n b_{1l} c_l \\ \sum_{k=1}^m b_{2l} c_l \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n b_{ml} c_l \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^m a_k \left(\sum_{l=1}^n b_{kl} c_l \right) = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_k b_{kl} c_l.$$

Az utolsó lépésben a belső szumma minden tagját beszoroztuk a_k-val, a számok közti összeadás és szorzás közti disztributivitást használva. Vagyis mindkét oldalon olyan összeg áll, amely az összes $a_k b_{kl} c_l$ alakú szorzat összege, csak a tagok csoportosítása más. □

► Az asszociativitás következménye, hogy a többtényezős mátrixszorzatokat nem kell zárójelezni, hisz bármelyik zárójelezés ugyanazt az eredményt adja. Így $\mathbf{ABC} = (\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$. Az állítás igaz többtényezős szorzatokra is, vagyis az $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_k$ szorzat független a végrehajtás sorrendjétől, de a tényezők sorrendje nem változtatható!

► Megjegyezzük, hogy az asszociativitás imént leírt bizonyítása hasonlóan mondható el, ha az $\mathbf{A} = [a_{ik}]$ mátrix nem csak 1 sorból, és a $\mathbf{C} = [c_{lj}]$ mátrix nem csak egy oszlopból áll: ekkor a $\mathbf{D} = \mathbf{ABC}$ szorzat i-edik sorának j-edik elemére azt kapjuk, hogy az az összes $a_{ik} b_{kl} c_{lj}$ alakú szorzatok összege, azaz

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{ik} b_{kl} c_{lj}. \tag{5.1}$$

Az 5.1 egyenlőség, és az ehhez hasonló számtalan hasonló kifejezés vezette Einsteint arra a felismerésre, hogy az indexelt változók szorzatainak összegében a szumma jelek feleslegesek, hisz azokra az indexekre kell összegezni, amelyek legalább kétszer szerepelnek, míg az egyszer szereplőkre nem. Tehát az előző kettős szumma helyett írhatnánk azt is, hogy

$$d_{ij} = a_{ik} b_{kl} c_{lj},$$

hisz a jobb oldalon i és j csak egyszer szerepel, így k-ra és l-re kell összegezni, azt pedig tudjuk, hogy $k = 1, \dots, m$ és $l = 1, \dots, n$. Ezt a jelölésbeli egyszerűsítést *Einstein-konvenciónak* nevezik. Einstein ezt a relativitás általános elméletéről írt híres dolgozatában használta először 1916-ban. A konvenció használata főként a lineáris algebra fizikai alkalmazásaiban terjedt el, mi e könyvben nem fogjuk használni.

Mátrix hatványozása Csak a négyzetes mátrixok szorozhatók meg önmagukkal, hisz ha egy $m \times n$-es mátrix megszorozható egy $m \times n$-essel, akkor $m = n$. Ezt figyelembe véve természetes módon definiálható négyzetes mátrixok pozitív egész kitevős hatványa:

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}\ldots\mathbf{A}}_{k \text{ tényező}}$$

Kicsit elegánsabban – rekurzióval – is definiálhatjuk e fogalmat: $\mathbf{A}^1 := \mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^{k+1} := \mathbf{A}^k\mathbf{A}$.

Mivel a mátrixszorzás asszociatív, mindegy, hogy milyen sorrendben végezzük el a hatványozást. Ezzel igazolható a következő két összefüggés is:

5.3. ÁLLÍTÁS (HATVÁNYOZÁS AZONOSSÁGAI). *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy négyzetes mátrix! Ekkor*
a) $\mathbf{A}^k\mathbf{A}^m = \mathbf{A}^{k+m}$,
b) $(\mathbf{A}^k)^m = \mathbf{A}^{km}$.

Ha ki akarjuk terjeszteni a hatványozást 0 kitevőre is, kövessük a precedencia-elvet[1], azaz olyan értelmet adjunk $\mathbf{A}^0$-nak, hogy a fenti összefüggések érvényben maradjanak. Például tekintsük az *a)* azonosságot $m = 0$ esetén:

$$\mathbf{A}^k\mathbf{A}^0 = \mathbf{A}^{k+0} = \mathbf{A}^k.$$

Ez minden $\mathbf{A}$ mátrix esetén csak az egységmátrixra igaz, tehát

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n,$$

ahol n a négyzetes $\mathbf{A}$ mérete.

[1] A latin eredetű *precedencia* szó *előzményt* jelent (lásd még precedens). A *precedencia elv* a matematikában fogalmak jelentésének olyan kiterjesztését jelenti, melynek során a korábban megismert tulajdonságok, összefüggések érvényben maradnak.

► A valós számoknál tanult, különböző alapú hatványokra érvényes azonosság itt a kommutativitás hiánya miatt nem érvényes, azaz általában $(\mathbf{AB})^k \neq \mathbf{A}^k\mathbf{B}^k$.

5.4. PÉLDA (MÁTRIX HATVÁNYOZÁSA). *Számítsuk ki az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \textit{és a} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixok k-adik hatványait!

MEGOLDÁS. Számoljuk ki $\mathbf{A}$ hatványait!

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

azaz $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_2$, ebből pedig látjuk, hogy $\mathbf{A}^3 = \mathbf{I}_2\mathbf{A} = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^3\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A} = \mathbf{I}_2, \ldots$ Tehát általában $\mathbf{A}^{2k} = \mathbf{I}_2$ és $\mathbf{A}^{2k+1} = \mathbf{A}$.

A másik feladatot a hatványozás rekurzív definícióját használva indukcióval kényelmesen meg tudjuk oldani. Először számoljuk ki $\mathbf{A}$ néhány hatványát:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}, \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

Ebből azt sejtjük, hogy $\mathbf{A}^k = \left[\begin{smallmatrix}1 & k\\0 & 1\end{smallmatrix}\right]$. Ha be tudjuk látni ennek az összefüggésnek az öröklődését k-ról $k+1$-re, akkor kész vagyunk. Más szóval meg kell mutatnunk, hogy ha $\mathbf{A}^k = \left[\begin{smallmatrix}1 & k\\0 & 1\end{smallmatrix}\right]$, akkor $\mathbf{A}^{k+1} = \left[\begin{smallmatrix}1 & k+1\\0 & 1\end{smallmatrix}\right]$. Ezt a következő szorzás elvégzése igazolja:

$$\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & k\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & k+1\\0 & 1\end{bmatrix}$$ □

Miután mátrixok lineáris kombinációja és négyzetes mátrixok egész kitevős hatványa értelmezve van, ezért négyzetes mátrixokra is definiálhatjuk skalár együtthatós polinom helyettesítési értékét. Legyen

$$p(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

egy skalár együtthatós polinom. A p polinom $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ helyen vett helyettesítési értékén a

$$p(\mathbf{X}) = a_k\mathbf{X}^k + \ldots + a_2\mathbf{X}^2 + a_1\mathbf{X} + a_0\mathbf{I}_n$$

mátrixot értjük.

5.5. PÉLDA (POLINOM HELYETTESÍTÉSI ÉRTÉKE). *Legyen*

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\2 & 3 & -4\\3 & 4 & -6\end{bmatrix}.$$

Mutassuk meg, hogy $p(\mathbf{C}) = \mathbf{O}$*, ha* $p(x) = x^3 + 2x^2 - 1$*.*

MEGOLDÁS. A $p(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^3 + 2\mathbf{C}^2 - \mathbf{I}$ műveleteit elvégezve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}p(\mathbf{C}) &= \mathbf{C}^3 + 2\mathbf{C}^2 - \mathbf{I}\\ &= \begin{bmatrix}9 & 8 & -14\\8 & 7 & -12\\14 & 12 & -21\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}-4 & -4 & 7\\-4 & -3 & 6\\-7 & -6 & 11\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$ □

A transzponálás tulajdonságai A következő tétel a transzponálás és a többi művelet kapcsolatáról szól:

5.6. TÉTEL (TRANSZPONÁLÁS TULAJDONSÁGAI). *Legyenek* $\mathbf{A}$ *és* $\mathbf{C}$ *azonos típusú mátrixok,* $\mathbf{B}$ *sorainak száma egyezzen meg* $\mathbf{A}$ *oszlopainak számával,* c *pedig legyen tetszőleges skalár. Ekkor*
a) $(\mathbf{A}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = \mathbf{A}$,
b) $(\mathbf{A}+\mathbf{C})^\mathsf{T} = \mathbf{A}^\mathsf{T} + \mathbf{C}^\mathsf{T}$,
c) $(c\mathbf{A})^\mathsf{T} = c\mathbf{A}^\mathsf{T}$,
d) $(\mathbf{AB})^\mathsf{T} = \mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}$.

BIZONYÍTÁS. Az első három összefüggés magától értetődő, csak az utolsót bizonyítjuk.

Először megmutatjuk, hogy ha $(\mathbf{AB})^\mathsf{T}$ elvégezhető, akkor $\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ is. Az $m \times t$ típusú $\mathbf{A}$ és a $t \times n$ típusú $\mathbf{B}$ szorzata $m \times n$-es, transzponáltja $n \times m$-es, így az $n \times t$ típusú $\mathbf{B}^\mathsf{T}$ és a $t \times m$-es $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ összeszorozhatók, szorzatuk $n \times m$-es, így a tételbeli egyenlőség két oldalának típusa azonos.

A tétel azon alapul, hogy két tetszőleges $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektorra $\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{v} = \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{u}$. Ezt az összefüggést a *-gal jelölt egyenlőségnél fogjuk használni. Az $(\mathbf{AB})^\mathsf{T}$ i-edik sorának j-edik eleme

$$\left((\mathbf{AB})^\mathsf{T}\right)_{ij} = (\mathbf{AB})_{ji} = (\mathbf{A})_{j*}\,(\mathbf{B})_{*i}\,.$$

A $\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ i-edik sorának j-edik eleme

$$\left(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)_{ij} = \left(\mathbf{B}^\mathsf{T}\right)_{i*}\left(\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)_{*j} \overset{*}{=} (\mathbf{A})_{j*}\,(\mathbf{B})_{*i}\,.$$

Tehát $(\mathbf{AB})^\mathsf{T} = \mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}$. □

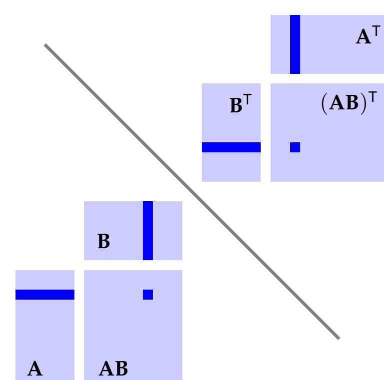
► A tétel *b)* pontjának indukcióval könnyen bizonyítható következménye, hogy többtagú összeg transzponáltja megegyezik a transzponáltak összegével. A *c)* pontot is figyelembe véve kapjuk, hogy mátrixok lineáris kombinációjának transzponáltja megegyezik a mátrixok transzponáltjainak azonos lineáris kombinációjával, azaz

$$(c_1\mathbf{A}_1 + c_2\mathbf{A}_2 + \ldots + c_k\mathbf{A}_k)^\mathsf{T} = c_1\mathbf{A}_1^\mathsf{T} + c_2\mathbf{A}_2^\mathsf{T} + \ldots + c_k\mathbf{A}_k^\mathsf{T}.$$

► A tétel *d)* pontjára „szemléletes igazolás” is adható, ami leolvasható az 5.1. ábráról.

► Indukcióval bizonyítható, hogy a *d)*-beli összefüggés többtényezős szorzatokra is fönnáll, azaz

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\ldots\mathbf{A}_k)^\mathsf{T} = \mathbf{A}_k^\mathsf{T}\ldots\mathbf{A}_2^\mathsf{T}\mathbf{A}_1^\mathsf{T}.$$



5.1. ábra: $(\mathbf{AB})^\mathsf{T} = \mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ szemléletes bizonyítása

*Mátrixszorzás inverze – mátrixok osztása** Lehet-e mátrixszal osztani, és ha igen, meg tudjuk-e vele oldani az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert vagy az

$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ mátrixegyenletet úgy, ahogy az $ax = b$ egyenletet megoldjuk az a-val való osztással?

Korábbi tanulmányainkban megtanultuk, hogy az összeadás és a szorzás invertálható műveletek, inverzeik a kivonás, ill. az osztás.

Azon, hogy az összadás művelete invertálható, azt értjük, hogy bármely a és b valós esetén találunk olyan x valóst, hogy $a + x = b$, a megoldás $x = b - a$. A szorzás is invertálható, de csak a nemzérus valósok halmazán. Ez azt jelenti, hogy bármely a nemzérus valóshoz és b valóshoz található olyan x valós szám, hogy $ax = b$, a megoldás $x = b/a$.

Azonos típusú mátrixok közt az $\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{B}$ egyenlet megoldása ugyanolyan egyszerű, mint a számok közt: $\mathbf{X} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$. A mátrixszorzás esete bonyolultabb.

▶ A mátrixszorzás nem kommutatív ezért az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ és az $\mathbf{YA} = \mathbf{B}$ egyenletek megoldása különböző is lehet. Valójában a mátrixosztás művelete emiatt nem vezethető be, viszont be lehet vezetni egy balról és egy jobbról való osztást, az egyik jele $\backslash$, a másiké $/$. E jelöléssel a fenti két mátrixegyenlet és megoldása:

$$\begin{aligned} \mathbf{AX} = \mathbf{B} \quad &\Longrightarrow \quad \mathbf{X} = \mathbf{A}\backslash\mathbf{B} \qquad && \mathbf{B} \text{ balról osztva } \mathbf{A}\text{-val,} \\ \mathbf{YA} = \mathbf{B} \quad &\Longrightarrow \quad \mathbf{Y} = \mathbf{B}/\mathbf{A} \qquad && \mathbf{B} \text{ jobbról osztva } \mathbf{A}\text{-val.} \end{aligned}$$

Például

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix} \Bigg\backslash \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 2\\-1 & 0\end{bmatrix}, \text{ mert } \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2\\-1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} \quad \text{és}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} \Bigg/ \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 2\end{bmatrix}, \text{ mert } \begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$$

▶ A másik bonyodalmat az okozza, hogy míg az $ax = b$ egyenlet a nullától különböző valósok közt mindig egyértelműen megoldható, addig pl. az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletről tudjuk, hogy végtelen sok megoldása, de 0 megoldása is lehet. E nehézségekre a következő paragrafus egyszerű megoldást ad, melyet később a pszeudoinverz fogalma segítségével általánosítani fogunk (ld. a 7 fejezetet).

Mátrix inverze Tudjuk, hogy az $ax = b$ egyenlet megoldásához elég ismerni *a reciprokát*, más néven a *multiplikatív inverzét*, és azzal szorozni b-t. Ez a gondolat átvihető a mátrixszorzásra is.

Egy nemnulla a szám reciproka az az a^{-1}-gyel jelölt szám, melyre $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$. Az 1 szerepét mátrixszorzásnál az $\mathbf{I}$ egységmátrix játssza. Világos, hogy adott $\mathbf{A}$ mátrixhoz csak úgy létezhet olyan $\mathbf{X}$, melyre $\mathbf{AX} = \mathbf{XA} = \mathbf{I}$, ha $\mathbf{A}$ négyzetes. Ez a következő definíciót adja:

Egy H halmazon értelmezett kétváltozós (más szóval bináris) *műveleten* olyan függvényt értünk, mely H-beli elempárokhoz H-beli elemet rendel. Például a valós számok összeadása esetén e függvény valós számpárhoz valós számot rendel, mondjuk az $(1.2, 0.4)$ számpárhoz a 1.6-ot. E függvényt a $+$ jellel jelöljük, de a függvényeknél szokásos prefix „$+(a, b)$" jelölés helyett műveleteknél az ún. infix jelölést használjuk, azaz $a + b$-t írunk (lásd erről még a következő széljegyzetet).

A számítástechnikában gyakran találkozunk a műveletek *infix* jelölése mellett a *prefix* vagy *lengyel* és a *postfix* vagy *fordított lengyel jelölésével* is. A prefixnél a műveleti jel az argumentumai előtt, a postfixnél után van. Például a $(3 + 4) \cdot 2$ kifejezést a prefix jelölést használó Lisp nyelvcsalád nyelveiben a

```
(* (+ 3 4) 2)
```

kód, míg például a postfix jelölést használó PostScript nyelvben a

```
3 4 add 2 mul
```

kód számítja ki. (A PostScript nyelvvel találkozhatunk a PDF formátumú fájlokban is.) Ugyanez a formula a komputer algebra nyelvek közül a Mapleben prefix módon

```
`*`(`+`(3,4),2)
```

a Mathematicában

```
Times[Plus[3,4],2]
```

alakot ölt. A Sage két lehetőséget kínál:

```
prod([sum([3,4]),2])
mul([add([3,4]),2])
```

Általában egy algebrai struktúra egy elemének egy műveletre vonatkozó inverzéhez a művelet *semleges eleme* szükséges. Az összeadás semleges eleme a 0, mert bármely a elemhez adva a-t kapunk, hasonlóképp a szorzás semleges eleme az 1, mert bármely a elemet vele szorozva a-t kapunk. Összeadás esetén egy elem ellentettjét az $a + x = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk, szorzás esetén a reciprokot az $ax = 1$ megoldásával. Az ellentettet, illetve a reciprokot additív, illetve multiplikatív *inverznek* is nevezzük. Mátrixszorzás semleges eleme az egységmátrix.

5.7. DEFINÍCIÓ (MÁTRIX INVERZE). *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy* $n \times n$*-es mátrix. Azt mondjuk, hogy* $\mathbf{A}$ invertálható*, ha létezik olyan* $\mathbf{B}$ *mátrix, melyre*

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n.$$

A $\mathbf{B}$ *mátrixot* $\mathbf{A}$ inverzének *nevezzük, és* $\mathbf{A}^{-1}$*-nel jelöljük. A nem invertálható mátrixot* szingulárisnak *nevezzük.*

- Világos, hogy ha $\mathbf{A}$ inverze $\mathbf{B}$, akkor $\mathbf{B}$ inverze $\mathbf{A}$.
- Például az alábbi szorzatokban szereplő két mátrix egymás inverze:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- A definícióból nem derül ki, hogy egy mátrixnak lehet-e több inverze, de könnyen megmutatható, hogy nem. Ha ugyanis az $\mathbf{A}$ mátrixnak $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ is inverze, azaz $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ és $\mathbf{AC} = \mathbf{CA} = \mathbf{I}$, akkor

$$\mathbf{C} = \mathbf{CI} = \mathbf{C}(\mathbf{AB}) = (\mathbf{CA})\mathbf{B} = \mathbf{IB} = \mathbf{B}.$$

- Az $\mathbf{A}$ mátrix inverzére használhatjuk az $\mathbf{A}^{-1}$ jelölést, mert megfelel a precedencia-elvnek. Például ha az 5.3. tétel érvényességét megtartva akarunk az $\mathbf{A}^{-1}$ hatványnak értelmet adni, akkor fenn kell álljon rá az $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1+1} = \mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ és a $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{1-1} = \mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ összefüggés.
- Minthogy a mátrixok közti műveleteket a számok közti műveletek táblázatokra való kiterjesztésén keresztül vezettük be, elvárjuk, hogy az 1×1-es mátrixok inverze essen egybe a számok multiplikatív inverzével (reciprokával), azaz ha $\mathbf{A} = [a]$, akkor $\mathbf{A}^{-1} = [a^{-1}] = [1/a]$ legyen igaz. A fenti definíció ennek az elvárásunknak is megfelel.

Egy négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixot *nilpotensnek* nevezünk, ha van olyan k pozitív egész, hogy

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{O}.$$

Például a $\left[\begin{smallmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix nilpotens, mert $\left[\begin{smallmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right]^2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Több alkalmazásban is fontos szerepet kap az alábbi példában szereplő inverz.

5.8. PÉLDA ($\mathbf{I} - \mathbf{A}$ INVERZE NILPOTENS $\mathbf{A}$ ESETÉN). *Mutassuk meg, ha* $\mathbf{A}$ *nilpotens, azaz valamely pozitív* k*-ra* $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$*, akkor* $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ *invertálható, és inverze* $\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^{k-1}$*.*

MEGOLDÁS. Megmutatjuk, hogy $(\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^{k-1}) = \mathbf{I}$.

$$\begin{aligned} &(\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^{k-1}) \\ &\quad = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^{k-1} - \mathbf{A} - \mathbf{A}^2 - \ldots - \mathbf{A}^{k-1} - \mathbf{A}^k \\ &\quad = \mathbf{I} - \mathbf{A}^k \\ &\quad = \mathbf{I} \end{aligned}$$

Az $(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^{k-1})(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{I}$ összefüggés ugyanígy bizonyítható. □

Elemi mátrixok inverze Minden R elemi sorművelethez van egy olyan R' sorművelet, hogy az R sorművelettel átalakított mátrixot az R' visszaalakítja (ld. 5.21. feladat). Nevezzük ezt az R' sorműveletet az R sorművelet inverzének. Könnyen ellenőrizhető, hogy az $S_i \leftrightarrow S_j$ sorművelet inverze önmaga, a cS_i inverze $\frac{1}{c}S_i$, és $S_i + cS_j$ inverze $S_i - cS_j$.

5.9. ÁLLÍTÁS (SORMŰVELET INVERZÉNEK MÁTRIXA). *Minden elemi mátrix invertálható, nevezetesen egy sorművelet elemi mátrixának inverze megegyezik a sorművelet inverzéhez tartozó elemi mátrixszal.*

A bizonyításhoz elég belátni, hogy egy sorművelet és az inverz sorművelet mátrixainak szorzata az egységmátrix. Az általános bizonyítás végiggondolását az Olvasóra hagyjuk, itt csak egy-egy konkrét esetet mutatunk meg, nevezetesen 3×3-as mátrixokon az $S_2 \leftrightarrow S_3$, a $3S_2$ és az $S_1 + 4S_3$ sorműveletek és inverzeik mátrixának szorzatát:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-4\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-4\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&4\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Az inverz kiszámítása A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix inverzének kiszámításához meg kell oldani az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ mátrixegyenletet, ami egyúttal egy szimultán egyenletrendszer is, és az elemi sorműveletekkel megoldható. Előbb azonban egy kérdésre válaszolnunk kell: nem fordulhat-e elő, hogy az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ mátrixegyenlet megoldható, de a megoldás nem tesz eleget az $\mathbf{XA} = \mathbf{I}$ mátrixegyenletnek? Négyzetes mátrixok esetén *nem* a válasz, ami azt jelenti, hogy mátrix invertálásához elég az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ mátrixegyenlet megoldása!

5.10. TÉTEL (AZ INVERZ LÉTEZÉSÉHEZ ELÉG EGY FELTÉTEL). *A négyzetes* $\mathbf{A}$ *mátrix pontosan akkor invertálható, ha létezik olyan* $\mathbf{B}$ *mátrix, hogy az* $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ *és a* $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ *feltételek egyike teljesül. Ha ilyen* $\mathbf{B}$ *mátrix létezik, az egyértelmű.*

BIZONYÍTÁS. Az inverz mátrix egyértelműségét beláttuk az 5.7. definíció utáni megjegyzések közt. Így elég belátnunk, hogy négyzetes mátrixokra az $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ és a $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ feltételek bármelyikének teljesülése maga után vonja a másik teljesülését is! Sőt, elég e két állítás egyikét igazolni: megmutatjuk, hogy ha a négyzetes $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok kielégítik az $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ egyenletet, akkor $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ is fönnáll, azaz $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ inverzei egymásnak.

Tekintsük az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ mátrixegyenletet. Ezt úgy oldjuk meg, hogy az $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ mátrixot redukált lépcsős alakra hozzuk. Ha ez $[\mathbf{I}|\mathbf{B}]$ alakú, akkor $\mathbf{B}$ az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ egyenlet megoldása, ezért $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ fennáll. A redukált lépcsős alakban zérus sor nem keletkezhet, mert a mátrix jobb oldalát az $\mathbf{I}$ mátrixból kaptuk, ami redukált lépcsős alak, s így egyértelmű. Ha elemi sorműveletekkel zérus sort kapnánk a jobb oldali félmátrixban, akkor volna olyan redukált lépcsős alakja is, mely zérus sort tartalmazna, ami ellentmondás. Ha csak a mátrix bal felén kapnánk zérus sort, akkor az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ egyenletnek nem lenne megoldása, vagyis nem állhatna fenn az $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ egyenlőség sem.

Ezután megmutatjuk, hogy $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$. Ehhez tekintsük a $\mathbf{BY} = \mathbf{I}$ mátrixegyenletet. Ennek megoldásához a $[\mathbf{B}|\mathbf{I}]$ mátrixot kell redukált lépcsős alakra hozni. A előzőekből tudjuk, hogy elemi sorműveletekkel az

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}] \Longrightarrow [\mathbf{I}|\mathbf{B}]$$

átalakítás megvalósítható. Az átalakítás lépéseinek inverzeit fordított sorrendben elvégezve az

$$[\mathbf{I}|\mathbf{B}] \Longrightarrow [\mathbf{A}|\mathbf{I}]$$

transzformációt kapjuk. Itt minden lépésben fölcserélve a két részmátrixot a kívánt

$$[\mathbf{B}|\mathbf{I}] \Longrightarrow [\mathbf{I}|\mathbf{A}]$$

átalakítást kapjuk. Ez azt jelenti, hogy a $\mathbf{BY} = \mathbf{I}$ mátrixegyenletetnek, az $\mathbf{Y} = \mathbf{A}$ megoldása, azaz $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$. □

Összefoglalva:

5.11. ÁLLÍTÁS (INVERZ KISZÁMÍTÁSA ELEMI SORMŰVELETEKKEL). *A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix invertálható, ha az $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ mátrix elemi sorműveletekkel $[\mathbf{I}|\mathbf{B}]$ alakra hozható, ekkor $\mathbf{A}$ inverze $\mathbf{B}$. Ha $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja nem az $\mathbf{I}$ mátrix, akkor $\mathbf{A}$ nem invertálható.*

5.12. PÉLDA (AZ INVERZ KISZÁMÍTÁSA). *Számítsuk ki az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \textit{és a} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixok inverzét!

Megoldás. A kiküszöböléssel oszloponként haladva:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Tehát

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

A $\mathbf{B}$ inverzének kiszámítása hasonló lépésekkel:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

Tehát

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

5.13. tétel (2×2-es mátrix inverze). *Az* $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ *mátrix pontosan akkor invertálható, ha* $ad - bc \neq 0$, *és ekkor*

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás. Azt, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixnak valóban a fenti mátrix az inverze, egyszerű mátrixszorzással ellenőrizhetjük. Azt, hogy az $ad - bc \neq 0$ feltétel az invertálhatóságnak elégséges feltétele, a képlet bizonyítja. A feltétel szükségességének belátásához vegyük észre, hogy $ad - bc = 0$, azaz $ad = bc$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{A}$ egyik sora a másik skalárszorosa. Ekkor viszont az egyik sor kinullázható, vagyis az $\mathbf{A}$ mátrix nem alakítható elemi sorműveletekkel egységmátrixszá. □

Az inverz tulajdonságai Megvizsgáljuk a mátrixinvertálás más műveletekkel való kapcsolatát.

5.14. TÉTEL (AZ INVERZ ALAPTULAJDONSÁGAI). *Tegyük fel, hogy* $\mathbf{A}$ *és* $\mathbf{B}$ *egyaránt* $n \times n$*-es invertálható mátrixok,* $c \neq 0$ *skalár és* k *pozitív egész. Ekkor igazak a következők:*

a) $\mathbf{A}^{-1}$ *invertálható, és inverze* $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$,
b) $c\mathbf{A}$ *invertálható, és inverze* $\frac{1}{c}\mathbf{A}^{-1}$,
c) $\mathbf{AB}$ *invertálható, és inverze* $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$,
d) $\mathbf{A}^k$ *invertálható, és inverze* $\left(\mathbf{A}^k\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^k$*, definíció szerint ezt értjük* $\mathbf{A}^{-k}$*-n,*
e) $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ *invertálható, és* $\left(\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^\mathsf{T}$.

BIZONYÍTÁS. Az állítások közül a fontosabbakat bizonyítjuk, a többit feladatként az Olvasóra hagyjuk:

c) Az

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$$

szorzat bizonyítja, hogy $\mathbf{AB}$ invertálható, és inverze $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

d) Az $\left(\mathbf{A}^k\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^k$ egyenlőség igaz volta a

$$\underbrace{\mathbf{AA}\dots\mathbf{A}}_{k \text{ tényező}}\underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\dots\mathbf{A}^{-1}}_{k \text{ tényező}} = \underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\dots\mathbf{A}^{-1}}_{k \text{ tényező}}\underbrace{\mathbf{AA}\dots\mathbf{A}}_{k \text{ tényező}} = \mathbf{I}$$

felírásból leolvasható, mert a szorzatok közepén lévő két mátrix szorzata mindig $\mathbf{I}$, ami elhagyható, és e lépést k-szor ismételve végül a kívánt eredményt kapjuk:

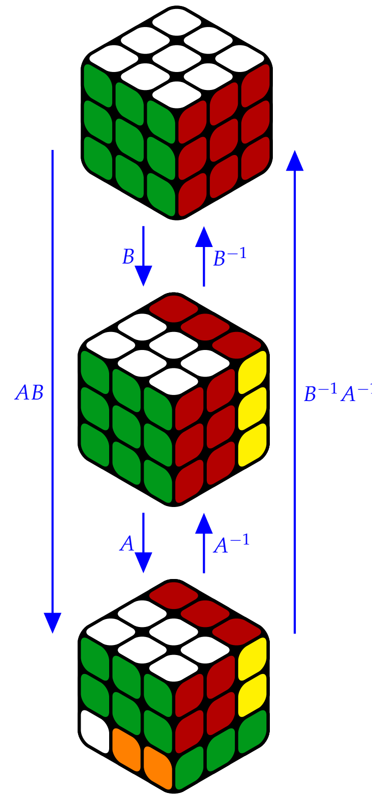
$$\underbrace{\mathbf{AA}\dots(\mathbf{A}}_{k \text{ tényező}}\underbrace{\mathbf{A}^{-1})\mathbf{A}^{-1}\dots\mathbf{A}^{-1}}_{k \text{ tényező}} = \underbrace{\mathbf{AA}\dots\mathbf{A}}_{k-1 \text{ tényező}}\underbrace{\mathbf{A}^{-1}\dots\mathbf{A}^{-1}}_{k-1 \text{ tényező}} = \dots = \mathbf{I}.$$

□

► A *(c)* állítás indukcióval általánosítható véges sok mátrix szorzatára: ha az azonos méretű négyzetes $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$,…$\mathbf{A}_m$ mátrixok mindegyike invertálható, akkor szorzatuk is, és

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\dots\mathbf{A}_m)^{-1} = \mathbf{A}_m^{-1}\dots\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1^{-1}.$$

► A *c)* állításbeli összefüggéshez hasonlóval találkozhatunk a Rubik-kocka forgatása közben is. Egy forgatást jelöljön A, egy másikat B. A függvények kompozíciójához hasonlóan definiáljuk e két transzformáció szorzatát: a B majd az A forgatás egymás után való elvégzésével kapott transzformációt jelölje AB (ld. 5.2 ábra). E transzformáció inverze visszaállítja az eredeti állapotot, ehhez előbb az A transzformáció inverzét kell végrehajtani, majd a B inverzét, tehát $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
► Az $\mathbf{A}^{-k}$ *(d)* pontbeli definíciója is megfelel a precedencia elvnek. Pl. az $\mathbf{A}^m\mathbf{A}^n = \mathbf{A}^{m+n}$ összefüggés kiterjesztése negatív kitevőre az $\mathbf{A}^k\mathbf{A}^{-k} = \mathbf{A}^0$ formulához vezet, amiből azt kapjuk, hogy $\mathbf{A}^{-k} = (\mathbf{A}^k)^{-1}$.



5.2. ábra: Jelölje A a bűvös kocka alsó, B a jobb hátsó oldalának elforgatását, és jelölje AB a B, majd az A egymás után való elvégzésével kapott transzformációt. (Ahogy a függvények összetételénél, előbb a jobb oldali, majd a bal oldali függvényt értékeljük ki, hajtjuk végre.) Ennek inverze $(AB)^{-1}$ úgy kapható meg, ha előbb végrehajtjuk az A^{-1} majd a B^{-1} transzformációt. Ezek szorzata $B^{-1}A^{-1}$, tehát $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Az invertálhatóság és az egyenletrendszerek megoldhatósága A következő tétel a mátrixok invertálhatóságát, az egyenletrendszerek megoldásánál használt elemi sorműveleteket és az egyenletrendszerek megoldhatóságát kapcsolja össze.

5.15. TÉTEL (AZ INVERTÁLHATÓSÁG ÉS AZ EGYENLETRENDSZEREK). *Adva van egy $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix. Az alábbi állítások ekvivalensek:*

a) $\mathbf{A}$ *invertálható;*

b) *az* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ *mátrixegyenlet bármely $n \times t$-es* $\mathbf{B}$ *mátrixra egyértelműen megoldható;*

c) *az* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *egyenletrendszer bármely n dimenziós* $\mathbf{b}$ *vektorra egyértelműen megoldható;*

d) *a homogén lineáris* $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ *egyenletrendszernek a triviális* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *az egyetlen megoldása;*

e) $\mathbf{A}$ *redukált lépcsős alakja* $\mathbf{I}$*;*

f) $\mathbf{A}$ *előáll elemi mátrixok szorzataként.*

BIZONYÍTÁS. Az állítások ekvivalenciáját az *(a)* $\Rightarrow$ *(b)* $\Rightarrow$ *(c)* $\Rightarrow$ *(d)* $\Rightarrow$ *(e)* $\Rightarrow$ *(f)* $\Rightarrow$ *(a)*, implikációk igazolásával bizonyítjuk.

(a) $\Rightarrow$ *(b)*: Legyen tehát $\mathbf{A}$ invertálható és legyen $\mathbf{B}$ egy tetszőleges $n \times t$ méretű mátrix. Ekkor az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ egyenlet mindkét oldalát $\mathbf{A}^{-1}$-gyel balról szorozva kapjuk, hogy $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, azaz $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$. Ez azt mutatja, hogy egyrészt a mátrixegyenletnek van megoldása, másrészt hogy más megoldása nincs, mivel így minden megoldás megkapható, és $\mathbf{A}$ inverze egyértelmű.

(b) $\Rightarrow$ *(c)*: Nyilvánvaló a $\mathbf{B} = \mathbf{b}$ választással.

(c) $\Rightarrow$ *(d)*: Nyilvánvaló a $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ választással.

(d) $\Rightarrow$ *(e)*: Egy n-ismeretlenes, n egyenletből álló homogén lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha együtthatómátrixának redukált lépcsős alakja $\mathbf{I}_n$.

(e) $\Rightarrow$ *(f)*: Ha $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja $\mathbf{I}_n$, akkor létezik elemi sorműveletek olyan sorozata, mely az $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{I}_n$ transzformációt elvégzi. Jelölje az elemi sorműveletekhez tartozó elemi mátrixokat $\mathbf{E}_1, \dots \mathbf{E}_k$. Ekkor tehát $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_k\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. Innen $\mathbf{A}$ kifejezhető az $\mathbf{E}_1^{-1}$-nel,… $\mathbf{E}_k^{-1}$-nel balról való beszorzás után:

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}_k^{-1} \dots \mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_1^{-1}.$$

Elemi mátrixok inverze elemi mátrix, tehát $\mathbf{A}$ előáll elemi mátrixok szorzataként.

(f) $\Rightarrow$ *(a)*: Az $\mathbf{A} = \mathbf{E}_k^{-1} \dots \mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_1^{-1}$ mátrix minden tényezője invertálható, mivel mindegyik elemi mátrix, így szorzatuk is, és az inverz

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 \dots \mathbf{E}_k. \qquad \square$$

► A tétel sok pontjának ekvivalenciája azt jelenti, hogy közülük bármely kettőre igaz, hogy „az egyik pontosan akkor igaz, ha a másik”.

Például „**A** pontosan akkor invertálható, ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer minden **b** vektorra egyértelműen megoldható”.
► Később megmutatjuk azt is, hogy **A** pontosan akkor invertálható, ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer minden **b** vektorra megoldható. Azaz az egyértelműség a feltételből kihagyható. Másként fogalmazva, ha $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ minden **b** vektorra megoldható, akkor a megoldás minden **b**-re egyértelmű.

5.16. PÉLDA (EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA MÁTRIXINVERTÁLÁSSAL). *Oldjuk meg az*

$$\begin{aligned} 2x + y &= 2 \\ 5x + 3y &= 3 \end{aligned}$$

egyenletrendszert mátrixinvertálással.

MEGOLDÁS. Az együtthatómátrix és inverze az 5.13. tétel szerint

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix},$$

így az ismeretlenek (x, y) vektorára

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

□

5.17. PÉLDA (MÁTRIXEGYENLET MEGOLDÁSA MÁTRIXINVERTÁLÁSSAL). *Oldjuk meg az* $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ *mátrixegyenletet, ahol*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \textit{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. MEGOLDÁS. Az **A** mátrix megegyezik az előző feladatbeli mátrixszal, így tudjuk, hogy invertálható, és ismerjük az inverzét. Az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ mátrixegyenlet megoldása:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 3 & -9 & -8 \end{bmatrix}.$$

□

2. MEGOLDÁS. Minden $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ alakú mátrixegyenlet invertálható **A** esetén megoldható szimultán egyenletrendszerként az $[\mathbf{A}|\mathbf{B}]$ mátrix redukált lépcsős alakra hozásával. Tehát így számolható minden $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ szorzat. E példában:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & -1 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -9 & -8 \end{array}\right]$$

□

► Megjegyezzük, hogy lineáris egyenletrendszert mátrixinvertálással ritkán oldunk meg, mert műveleigénye valamivel nagyobb, mint az egyszerű kiküszöbölésnek.

5.18. PÉLDA (MÁTRIX ELEMI MÁTRIXOK SZORZATÁRA BONTÁSA). *Bontsuk fel az* $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix}1&2\\3&5\end{smallmatrix}\right]$ *mátrixot elemi mátrixok szorzatára!*

MEGOLDÁS. Az 5.15. tétel bizonyításának *(e)* $\Rightarrow$ *(f)* lépése szerint ha egy $\mathbf{A}$ mátrixot elemi sorműveletekkel az egységmátrixba lehet transzformálni, akkor az elemi sorműveletek inverzei fordított sorrendben elvégezve az $\mathbf{I}$-t $\mathbf{A}$-ba transzformálják. Ez viszont azt jelenti, hogy a hozzájuk tartozó elemi mátrixok szorzata épp $\mathbf{A}$.

Elemi sorműveletek		Elemi mátrixok	Elemi mátrixok inverzei
$\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}$			
$\Downarrow$	S_2-3S_1	$\mathbf{E}_1=\begin{bmatrix}1&0\\-3&1\end{bmatrix}$	$\mathbf{E}_1^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}$			
$\Downarrow$	$-S_2$	$\mathbf{E}_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$	$\mathbf{E}_2^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$			
$\Downarrow$	S_1-2S_2	$\mathbf{E}_3=\begin{bmatrix}1&-2\\0&1\end{bmatrix}$	$\mathbf{E}_3^{-1}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$			

A fenti átalakítás nyomán tehát $\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \mathbf{I}$, amiből $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_3^{-1}$, azaz

$$\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix},$$

így $\mathbf{A}$-t három elemi mátrix szorzatára bontottuk. □

Invertálhatóság és bázis Az 5.15. tétel szerint a négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix invertálhatósága azzal ekvivalens, hogy a homogén lineáris $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek a triviális az egyetlen megoldása. Mivel $\mathbf{Ax}$ az $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak egy lineáris kombinációja, ezért ez azt jelenti, hogy a nullvektor csak egyféleképp áll elő $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként, a triviális módon. Tehát $\mathbf{A}$ oszlopvektorai lineárisan függetlenek! Ez egyúttal azt is jelenti, hogy $\mathbf{A}$ oszlopvektorai bázist alkotnak, és hogy $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$. Felhasználva a **??** tételt, mely szerint a sortér és az oszloptér dimenziója megegyezik a ranggal, a következő tételt kapjuk:

5.19. KÖVETKEZMÉNY (INVERTÁLHATÓSÁG ÉS BÁZIS). *Adva van egy valós* $n \times n$*-es* $\mathbf{A}$ *mátrix. Az alábbi állítások ekvivalensek:*

a) $\mathbf{A}$ *invertálható;*

b) $\mathbf{A}$ *oszlopvektorai lineárisan függetlenek;*

c) $\mathbf{A}$ *oszlopvektorai bázist alkotnak* $\mathbb{R}^n$*-ben;*

d) $\mathbf{A}$ *sorvektorai lineárisan függetlenek;*

e) $\mathbf{A}$ *sorvektorai bázist alkotnak* $\mathbb{R}^n$*-ben;*

f) $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$.

A fenti állításokat a tagadásukkal helyettesítjük és kiegészítjük azzal, hogy ha egy mátrix sorvektorai közt lineáris kapcsolat van, akkor a redukált lépcsős alakban szükségképpen lesz zérussor:

5.20. KÖVETKEZMÉNY (SZINGULÁRIS MÁTRIXOK). *Adva van egy valós* $n \times n$*-es* $\mathbf{A}$ *mátrix. Az alábbi állítások ekvivalensek:*

a) $\mathbf{A}$ *szinguláris (azaz nem invertálható);*

b) $\mathbf{A}$ *oszlopvektorai lineárisan összefüggők;*

c) az $\mathbf{A}$ *oszlopvektorai által kifeszített altér dimenziója kisebb* n*-nél;*

d) $\mathbf{A}$ *sorvektorai lineárisan összefüggők;*

e) az $\mathbf{A}$ *sorvektorai által kifeszített altér dimenziója kisebb* n*-nél;*

f) $\mathbf{A}$ *bármely lépcsős alakjának (így a redukáltnak is) van zérus sora;*

g) $\mathrm{r}(\mathbf{A}) < n$.

Báziscsere Legyen $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ az $\mathbf{R}^n$ két bázisa, és jelölje $\mathbf{X}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ a $\mathcal{B}$-ről $\mathcal{C}$-re, $\mathbf{Y}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ a $\mathcal{C}$-ről $\mathcal{B}$-re való áttérés mátrixát. Legyen továbbá $\mathbf{v}$ a tér egy tetszőleges vektora, a $\mathcal{B}$ bázisbeli alakja $[\mathbf{v}]_\mathcal{B}$. A 4.24. tétel szerint

$$[\mathbf{v}]_\mathcal{C} = \mathbf{X}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_\mathcal{B}, \quad \text{és} \quad [\mathbf{v}]_\mathcal{B} = \mathbf{Y}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[\mathbf{v}]_\mathcal{C}.$$

A második egyenletbe helyettesítve az elsőt kapjuk, hogy

$$[\mathbf{v}]_\mathcal{B} = \mathbf{Y}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}\mathbf{X}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_\mathcal{B},$$

azaz $\mathbf{Y}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}\mathbf{X}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ minden vektort önmagába visz, tehát egyenlő az egységmátrixszal.

5.21. TÉTEL (AZ ÁTTÉRÉS MÁTRIXÁNAK INVERZE). *Ha* $\mathcal{B}$ *és* $\mathcal{C}$ *az* $\mathbf{R}^n$ *két bázisa, akkor az áttérések* $\mathbf{X}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ *és* $\mathbf{Y}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ *mátrixa egymás inverze, azaz* $\mathbf{X}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{Y}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = \mathbf{I}_n$.

5.22. PÉLDA (AZ ÁTTÉRÉS MÁTRIXÁNAK INVERZE). *Az* $\mathbb{R}^3$ *egy* $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ *bázisában felírtuk a standard egységvektorokat:*

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_\mathcal{B}, \quad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}_\mathcal{B}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_\mathcal{B}.$$

Írjuk fel $\mathcal{B}$ *bázisvektorainak standard bázisbeli koordinátás alakját!*

MEGOLDÁS. Jelölje $\mathcal{E}$ a standard bázist. Ennek vektorait kifejeztük a $\mathcal{B}$ bázis elemeivel, az ezekből képzett mátrixszal tehát az $\mathcal{E}$-beli vektorok $\mathcal{B}$-beli koordinátás alakja fölírható, tehát ez a $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{E}$ áttérés mátrixa, azaz

$$\mathbf{X}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ennek inverze a keresett mátrix:

$$\mathbf{Y}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{X}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ennek oszlopvektorai adják a $\mathcal{B}$ vektorainak $\mathcal{E}$-beli alakját. □

5.23. PÉLDA (ÁTTÉRÉS MÁTRIXA). *Legyen*

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}, \text{ és}$$
$$\mathcal{C} = \{(1,2,3), (0,1,2), (0,0,1)\}$$

két bázis $\mathbb{R}^3$*-ben. Írjuk fel a* $\mathcal{B}$*-ről a* $\mathcal{C}$*-re való áttérés mátrixát!*

1. MEGOLDÁS. A bázisokból a következő áttérésmátrixok olvashatók le:

$$\mathbf{B}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Innen $\mathbf{D}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}} = \mathbf{C}^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}$, így $\mathbf{X}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{D}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}}\mathbf{B}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$, azaz

$$\mathbf{X}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$ □

2. MEGOLDÁS. A bázisokból leolvasható mátrixok közt az $\mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}\mathbf{X}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{B}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ összefüggés áll fenn, ahol $\mathbf{X}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ az ismeretlen mátrix, mely az $[\mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}|\mathbf{B}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}]$ redukált lépcsős alakjából olvasható le:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right],$$ □

tehát

$$\mathbf{X}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

ami megegyezik az előző megoldással. □

*Gyorsszorzás** Két 2×2-es mátrix szokásos módon való összeszorzásához 8 szorzásra és 4 összeadásra van szükség. Strassen 1969-ben egy olyan módszert talált, mellyel e mátrixszorzást 7 szorzással is el lehet végezni, igaz azon az áron, hogy az összeadások száma 16-ra nő.

5.1 (Strassen-formulák). *Legyen* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *és* $\mathbf{C}$ *is* 2×2*-es. A* $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ *szorzás elvégezhető a következő formulákkal:*

$$
\begin{aligned}
d_1 &= (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22}) & c_{11} &= d_1 + d_4 - d_5 + d_7 \\
d_2 &= (a_{21} + a_{22})b_{11} & c_{21} &= d_2 + d_4 \\
d_3 &= a_{11}(b_{12} - b_{22}) & c_{12} &= d_3 + d_5 \\
d_4 &= a_{22}(-b_{11} + b_{21}) & c_{22} &= d_1 + d_3 - d_2 + d_6 \\
d_5 &= (a_{11} + a_{12})b_{22} \\
d_6 &= (-a_{11} + a_{21})(b_{11} + b_{12}) \\
d_7 &= (a_{12} - a_{22})(b_{21} + b_{22})
\end{aligned}
$$

Az ötlet nagyszerűsége abban van, hogy e módszer kiterjeszthető tetszőleges méretű négyzetes mátrixokra is, és elegendően nagy n-ekre az e módon elvégzett mátrixszorzás műveletigénye kisebb lesz a hagyományos módon elvégzettnél. A standard mátrixszorzás műveletigénye $2n^3 - n^2$ (ebből n^3 szorzás és $n^3 - n^2$ összeadás – gondoljunk utána!), a Strassen-formulákkal való szorzásé $n = 2^k$ esetén legföljebb $7 \cdot 7^k - 6 \cdot 4^k$. Ez $n = 2^{10}$ esetén már kevesebb műveletet ad. Az általánosítás lényege, hogy a Strassen-formulák 2×2-es blokkmátrixokra is használhatók, mert a szorzás kommutativitását nem használják, így ha $M(n)$ jelöli két $n \times n$-es mátrix összeszorzásához szükséges szorzások, és $S(n)$ a szükséges összeadások számát, akkor $M(2n) \leq 7M(n)$ és $S(2n) \leq 18n^2 + 7S(n)$. Az $M(1) = 1$, $S(1) = 0$ kezdeti feltételeket is használva megmutatható, hogy $M(2^k) \leq 7^k$, $S(2^k) \leq 6(7^k - 4^k)$. E képletekből a felső egészrész jelét használva és a $k = \lceil \log_2 n \rceil$ jelöléssel az műveletek összámára a $cn^{\log_2 7} \leq cn^{2.81}$ felső becslést kapjuk, ami a $2n^3 - n^2$ értéknél jobb, függetlenül a c konstans konkrét értékétől. Mivel a két összeszorzandó mátrix mindegyikének mind az n^2 elemét használni kell, ezért a szükséges műveletek számának alsó becslése cn^2. A $cn^{2.81}$ felső becslés 1990-ben $cn^{2.375477}$ lett javítva (Coppersmith és Winograd), a 2015-ben ismert legjobb korlát $cn^{2.3728639}$, de az a sejtés, hogy a kitevő 2-re, de legalább $2 + \varepsilon$-ra lenyomható, ahol ε tetszőlegesen kis pozitív szám.

A módszer gyengéje numerikus instabilitása, így a gyakorlatban csak bizonyos mátrixokra érdemes használni, például nagyméretű egészelemű mátrixokra tetszőleges pontosságú aritmetika használata esetén.

Feladatok

Igaz – hamis

5.1. A négyzetes **A** mátrix pontosan akkor invertálható, ha elemi sorműveletekkel megkapható az **I** mátrixból.

5.2. Ha elemi sorműveletek **A**-t **B**-be viszik, akkor az inverz sorműveletek **B**-t **A**-ba viszik.

5.3. Ha elemi sorműveletek **A**-t **B**-be viszik, akkor az inverz sorműveletek fordított sorrendben végrehajtva **B**-t **A**-ba viszik.

Műveleti azonosságok

5.4. Összeadás és skalárral szorzás tulajdonságai Legyen **A**, **B** és **C** azonos típusú ($m \times n$-es) mátrix, c és d legyenek skalárok. Ekkor

a) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ (felcserélhetőség, kommutativitás)
b) $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$ (csoportosíthatóság, asszociativitás)
c) $\mathbf{A}+\mathbf{O}_{m\times n}=\mathbf{A}$ (zérusmátrix)
d) $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{O}_{m\times n}$ (ellentett létezése)
e) $c(d\mathbf{A})=(cd)\mathbf{A}$ (csoportosíthatóság)
f) $(c+d)\mathbf{A}=c\mathbf{A}+d\mathbf{A}$ (disztributivitás)
g) $c(\mathbf{A}+\mathbf{B})=c\mathbf{A}+c\mathbf{B}$ (disztributivitás)
h) $0\mathbf{A}=\mathbf{O}_{m\times n}$, $1\mathbf{A}=\mathbf{A}$, $-1\mathbf{A}=-\mathbf{A}$

5.5. Egy algebrai kifejezésben végrehajtjuk az alábbi helyettesítést:

$$\begin{aligned} u &= 3x_1+2x_2+4x_3\\ v &= x_1-3x_2+x_3\\ w &= 2x_1-x_2-3x_3 \end{aligned}$$

Írjuk fel e lineáris helyettesítést mátrixszorzatos alakban. Legyen $(u^2+v^2+w^2)(2u-v-w)$ az a kifejezés, melyben a helyettestést elvégezzük. Írjuk fel e kifejezést a helyettesítés előtt és után mátrixműveletek segítségével!

Számítási feladatok

Bontsuk fel a következő mátrixokat elemi mátrixok szorzatára!

5.6. $\begin{bmatrix}1&3\\2&8\end{bmatrix}$

5.7. $\begin{bmatrix}1&2\\-2&-1\end{bmatrix}$

5.8. $\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$

5.9. $\begin{bmatrix}2&4\\3&8\end{bmatrix}$

5.10. $\begin{bmatrix}2&0&4\\0&2&0\\3&2&7\end{bmatrix}$

5.11. $\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&2\\2&4&5\end{bmatrix}$

5.12. Határozzuk meg az összes olyan 2×2-es **A** mátrixot, melyre $\mathbf{A}^2=\mathbf{O}$. Másként fogalmazva határozzuk meg a nullmátrix összes négyzetgyökét!

5.13. Számítsuk ki az

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$$

mátrix k-adik hatványait!

5.14. Írjuk fel a mátrixszorzás definícióját az Einstein-konvenciót használva.

Blokkmátrixok

5.15. Mutassuk meg, hogy ha **A** és **D** invertálható mátrixok, akkor a következő ún. blokkdiagonális mátrix invertálható, és inverze

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{D}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{-1}&\mathbf{O}\\\mathbf{O}&\mathbf{D}^{-1}\end{bmatrix}.$$

továbbá tetszőleges, de megfelelő típusú **B** mátrix esetén

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{B}\\\mathbf{O}&\mathbf{D}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}^{-1}&-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\\\mathbf{O}&\mathbf{D}^{-1}\end{bmatrix}.$$

5.16. Mutassuk meg, hogy ha **A** és **D** négyzetes mátrixok, akkor

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{B}\\\mathbf{C}&\mathbf{D}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}&-\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\\-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X}&\mathbf{D}^{-1}+\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{X}=(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1}$, és feltételezzük, hogy minden felírt mátrixinverz létezik.

Az előbbi két feladat valamelyikének felhasználásával számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzét!

5.17. $\begin{bmatrix}2&3&0&0&0\\1&2&0&0&0\\0&0&7&3&3\\0&0&8&1&2\\0&0&4&4&3\end{bmatrix}$

5.18. $\begin{bmatrix}2&3&1&1&1\\1&2&1&1&1\\0&0&7&3&3\\0&0&8&1&2\\0&0&4&4&3\end{bmatrix}$

5.19. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bizonyítások

5.20. Bizonyítsuk be, hogy ha $c\mathbf{A} = \mathbf{O}$, akkor vagy $c = 0$, vagy $\mathbf{A} = \mathbf{O}$.

5.21. SORMŰVELET ÉS ELEMI MÁTRIX INVERZE Az $S_i \leftrightarrow S_j$ sorművelethez tartozó elemi mátrixot jelölje $\mathbf{E}_{ij}$, a cS_i-hez tartozót $\mathbf{E}_i(c)$ és a $S_i + cS_j$ sorművelethez tartozót $\mathbf{E}_{ij}(c)$. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{E}_{ij}^{-1} = \mathbf{E}_{ij}$, $\mathbf{E}_i(c)^{-1} = \mathbf{E}_i(\frac{1}{c})$ és $\mathbf{E}_{ij}(c)^{-1} = \mathbf{E}_{ij}(-c)$.

5.22. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ fölcserélhető $\mathbf{B}$-vel és $\mathbf{B}$ invertálható, akkor $\mathbf{A}$ fölcserélhető $\mathbf{B}^{-1}$-gyel is.

Absztrakció

5.23. INVERTÁLHATÓ MŰVELET Legyen $\circledcirc$ egy H-n értelmezett kétváltozós művelet, azaz egy $H^2 \to H$ függvény. Fogalmazzuk meg, mit értünk azon, hogy $\circledcirc$ invertálható egy $R \subseteq H$ részhalmazán. Hogyan változik a definíció, ha a művelet kommutatív?

5.24. ELEM INVERZE Legyen $\circledcirc$ egy H-n értelmezett kétváltozós művelet.

1. Mit értünk azon, hogy $e \in H$ e művelet semleges eleme?
2. Mit értünk azon, hogy $b \in H$ az $a \in H$ elem inverze?

5.25.★ GYORSINVERTÁLÁS Legyen $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, mindketten 2×2-es mátrixok. Mutassuk meg, hogy az alábbi eljárással definiált mátrixinvertálás segítségével $n \times n$-es mátrixokra olyan algoritmus készíthető, melynek műveletigénye legföljebb $cn^{2.81}$.

$$\begin{aligned} c_1 &= a_{11}^{-1} & b_{12} &= c_3 c_6 \\ c_2 &= a_{21} c_1 & b_{21} &= c_6 c_2 \\ c_3 &= c_1 a_{12} & c_7 &= c_3 b_{21} \\ c_4 &= a_{21} c_3 & b_{11} &= c_1 - c_7 \\ c_5 &= c_4 - a_{22} & b_{22} &= -c_6 \\ c_6 &= c_5^{-1} & & \end{aligned}$$

Mátrix és diád összegének inverze

Összegmátrix inverzére nincs egyszerű képlet, de speciális mátrixokra nagyon hasznos eredmények vannak.

5.26. SHERMAN–MORRISON-FORMULA Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix invertálható, és $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ két olyan vektor, hogy $1 + \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} \neq 0$. Ekkor $\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}$ invertálható, és

$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}\right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}.$$

5.27. INVERZ VÁLTOZÁSA A MÁTRIX EGY ELEMÉNEK VÁLTOZÁSA FÜGGVÉNYÉBEN Legyen $\mathbf{A}$ invertálható mátrix, és változtassunk meg az a_{ij} elemet $a_{ij} + \varepsilon$-ra. Fejezzük ki az így kapott mátrix inverzét $\mathbf{A}^{-1}$ segítségével.

5.28.■ INVERZ VÁLTOZÁSA SZÁMPÉLDÁN Adva van egy $\mathbf{A}$ mátrix és annak inverze:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2/5 & 3/5 & 0 \\ -2/5 & 7/5 & -8/5 & 3/5 \\ 3/5 & -8/5 & 7/5 & -2/5 \\ 0 & 3/5 & -2/5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Változtassuk meg a_{11} értékét 1-ről $11/10$-re. Az így kapott mátrixot jelölje $\mathbf{B}$. Határozzuk meg inverzét!

Műveletek speciális mátrixokkal

A gyakorlatban gyakran találkozunk olyan speciális mátrixokkal, melyekkel a műveletek egyszerűbben végezhetők el.

Diagonális mátrixok A diagonális mátrixokkal végzett mátrixművele-tek szabályai igen egyszerűek.

Legyen $\mathbf{A} = \operatorname{diag}(1,2,3)$, $\mathbf{B} = \operatorname{diag}(5,4,3)$. Ekkor

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{bmatrix}, \text{ ahol } k \text{ egész szám.}$$

Mindezek alapján könnyen igazolható a következő tétel:

5.24. tétel (Műveletek diagonális mátrixokkal). *Legyen* $\mathbf{A} = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\mathbf{B} = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, *és legyen k egész. Ekkor*

a) $\mathbf{AB} = \operatorname{diag}(a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_nb_n)$,

b) $\mathbf{A}^k = \operatorname{diag}(a_1^k, a_2^k, \ldots, a_n^k)$, *speciálisan*

c) $\mathbf{A}^{-1} = \operatorname{diag}(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_n^{-1})$.

A c)- és negatív k esetén az b)-beli művelet pontosan akkor végezhető el, ha $a_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Permutáló mátrixok és kígyók Könnyen kezelhetők a diagonális mátrix-ok sorainak permutációjával kapott mátrixok is.

Tudjuk, hogy bármely permutáció megkapható elempárok cseréjé-nek egymás után való elvégzésével. Az algebra nyelvén fogalmaz-va bármely permutáció transzpozíciók szorzatára bontható. Például az $\{1,2,3,4\}$ halmaz $\{2,4,3,1\}$ permutációja megkapható az alábbi transzpozíciókkal (elempár-cserékkel):

$$\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, 3, 4\} \rightarrow \{2, \mathbf{1}, 3, \mathbf{4}\} \rightarrow \{2, 4, 3, 1\}$$

Így, ha egy mátrix sorait permutáljuk, azaz végrehajtunk rajta néhány sorcserét, akkor ez elérhető a sorcseréket adó elemi mátrixokkal való balról szorzásokkal. Ezeknek az elemi mátrixoknak a szorzataként ka-pott mátrix úgy kapható az egységmátrixból, hogy a megadott sorcse-réket végrehajtjuk rajta. Például a $\{2,4,3,1\}$ permutációt végrehajtva az $\mathbf{I}_4$ egységmátrixon, a következő $\mathbf{P}$ mátrixot kapjuk:

$$\mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{S_1 \leftrightarrow S_2}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{S_2 \leftrightarrow S_4}{\Longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{P}$$

Ezzel balról szorozva egy tetszőleges $4 \times m$-es mátrixot, annak sorait a fenti permutáció szerint fogja fölcserélni, például

$$\mathbf{PA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$$

5.25. DEFINÍCIÓ (PERMUTÁLÓ MÁTRIX, KÍGYÓ). *A diagonális mátrixok sorainak permutációjával kapott mátrixot* kígyónak *(más néven* transzverzálisnak*) nevezzük, speciálisan az egységmátrixból ugyanígy kapott mátrixot* permutáló mátrixnak *(vagy* permutációmátrixnak*) hívjuk.*

► Például az alábbi mátrixok mindegyike kígyó, az utolsó kettő egyúttal permutáló mátrix is:

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

► Könnyen látható, hogy a permutáló mátrix olyan négyzetes mátrix, melynek minden sorában és minden oszlopában *pontosan* egy 1-es van, az összes többi elem 0. A kígyó olyan négyzetes mátrix, melynek minden sorában és minden oszlopában *legföljebb* egy nemnulla elem van.

► Minden kígyó megkapható egy diagonális mátrixból oszlopcserékkel is. Egy diagonális mátrixból akkor is kígyót kapunk, ha a sorok permutációja mellett az oszlopokat is permutáljuk.

► Ha $\mathbf{P}$ egy permutáló mátrix, akkor $\mathbf{PA}$ az $\mathbf{A}$-ból a soroknak épp azzal a permutációjával kapható, amely permutációval $\mathbf{I}$-ből a $\mathbf{P}$-t kaptuk.

5.26. TÉTEL (MŰVELETEK PERMUTÁLÓ MÁTRIXOKKAL). *Bármely két azonos méretű permutáló mátrix szorzata és egy permutáló mátrix bármely egész kitevős hatványa permutáló mátrix. Permutáló mátrix inverze megegyezik a transzponáltjával, azaz ha* $\mathbf{P}$ *permutáló mátrix, akkor*

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}.$$

BIZONYÍTÁS. Legyen $\mathbf{P}$ és $\mathbf{Q}$ két permutáló mátrix. Szorzatuk sorvektorai $\mathbf{P}_{i*}\mathbf{Q}$ alakúak, ahol $\mathbf{P}_{i*}$ megegyezik valamelyik standard egységvektorral, pl. $\mathbf{P}_{i*} = \mathbf{e}_k$. Ekkor a szorzatvektornak csak az az eleme 1, amelyik oszlop $\mathbf{e}_k$-val megegyezik, és ilyen oszlop pontosan egy van. Tehát a szorzatmátrix minden sorában pontosan egy elem 1, a többi 0. Oszlopokra az állítás hasonlóan bizonyítható. A szorzatra vonatkozó állítás természetes következménye a pozitív egész kitevős hatványokra vonatkozó állítás. A negatív egész kitevőkre is igaz az állítás, aminek bizonyításához elég azt az inverzre belátni.

Tekintsük a $\mathbf{PP}^\mathsf{T}$ szorzatot. A $(\mathbf{PP}^\mathsf{T})_{ii}$ elem a $\mathbf{P}_{i*}$ vektornak és a $(\mathbf{P}^\mathsf{T})_{*i} = \mathbf{P}_{i*}$ vektornak a szorzata, vagyis 1, míg

$$(\mathbf{PP}^\mathsf{T})_{ij} = (\mathbf{P})_{i*}(\mathbf{P}^\mathsf{T})_{*j} = (\mathbf{P})_{i*} \cdot (\mathbf{P})_{j*},$$

azaz a szorzat i-edik sorának j-edik eleme a $\mathbf{P}$ i-edik és j-edik sorvektorának skalárszorzata, ami 0, mivel két különböző sorban az 1-es különböző helyen van. □

► Az alábbi példa szemlélteti a tételben kimondott egyszerű állítást:

$$\mathbf{PP}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Háromszögmátrixok A Gauss-kiküszöbölés végrehajtásakor az együtthatómátrixot lépcsős alakra transzformáltuk, melyben a főátló alatt mindig csak nullák szerepelnek. Az ilyen mátrixok nem csak a Gauss-kiküszöbölésnél fontosak.

5.27. DEFINÍCIÓ (HÁROMSZÖGMÁTRIX). *Azokat a mátrixokat, melyek főátlója alatt csak* 0*-elemek szerepelnek* felső háromszögmátrixnak, *azokat, melyek főátlója fölött csak* 0*-elemek vannak* alsó háromszögmátrixnak *nevezzük. Ha egy háromszögmátrix főátlójában csupa* 1*-es áll,* egység háromszögmátrixról *beszélünk.*

A Gauss-kiküszöbölésnél kapott felső háromszögmátrixhoz hasonlóan azok az egyenletrendszerek is megoldhatók csak behelyettesítésekkel, amelyek együtthatómátrixa alsó háromszögmátrix. A különbség kizárólag annyi, hogy ekkor az első egyenlettel kezdjük, és az első változó értékét határozzuk meg először. Például az

$$\begin{aligned} x \qquad\quad &= 3 \\ 2x + 3y \quad &= 3 \\ 2x + \ \ y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

egyenletrendszer első egyenletéből $x = 3$, a másodikba való behelyettesítés után $y = -1$, végül a harmadikba való behelyettesítés után $z = -1$.[2]

[2] Az angol nyelvű lineáris algebra tankönyvek különbséget tesznek a felső és az alsó háromszögmátrixú egyenletrendszerek megoldása között. *Forward substitution*, illetve *backward substitution* a neve a behelyettesítésnek ha alsó, illetve ha felső háromszögmátrix az együttható mátrix. Ez arra utal, hogy a változókat előre vagy hátra haladva számoljuk ki. Mi nem fogjuk használni e finom különbségtételt.

5.28. TÉTEL (MŰVELETEK HÁROMSZÖGMÁTRIXOKKAL). *Felső háromszögmátrixok összege, szorzata, és invertálható felső háromszögmátrix inverze felső háromszögmátrix. Analóg tétel igaz az alsó háromszögmátrixokra is. Egy háromszögmátrix pontosan akkor invertálható, ha főátlóbeli elemeinek egyike sem zérus.*

A bizonyítást feladatként az Olvasóra hagyjuk.

Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok Gyakran használunk olyan mátrixokat, melyekben az elemek egyenlők vagy ellentettjei a főátlóra nézve szimmetrikusan elhelyezkedő párjuknak. E tulajdonság a transzponálttal könnyen kifejezhető.

5.29. DEFINÍCIÓ (SZIMMETRIKUS ÉS FERDÉN SZIMMETRIKUS MÁTRIXOK). *A négyzetes* $\mathbf{A}$ *mátrixot* szimmetrikusnak *nevezzük, ha* $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}$, *és* ferdén szimmetrikusnak *nevezzük, ha* $\mathbf{A}^\mathsf{T} = -\mathbf{A}$.

5.30. PÉLDA (SZIMMETRIKUS ÉS FERDÉN SZIMMETRIKUS MÁTRIXOK). *Az alábbi mátrixok közül az* $\mathbf{A}$ *szimmetrikus, a* $\mathbf{B}$ *ferdén szimmetrikus, a* $\mathbf{C}$ *egyik osztályba sem tartozik.*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 9 \\ -9 & 2 & 9 \\ -9 & -9 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ha $\mathbf{A}$ ferdén szimmetrikus, akkor minden elemére $a_{ij} = -a_{ji}$, azaz $i = j$ esetén $a_{ii} = -a_{ii}$. Ez csak $a_{ii} = 0$ esetén áll fönn, azaz a ferdén szimmetrikus mátrixok főátlójában csupa 0 áll.

5.31. ÁLLÍTÁS (MŰVELETEK (FERDÉN) SZIMMETRIKUS MÁTRIXOKKAL). *Szimmetrikus mátrixok összege, skalárszorosa, inverze szimmetrikus. Ferdén szimmetrikus mátrixok összege, skalárszorosa, inverze ferdén szimmetrikus.*

Az állítás bizonyítását feladatként az olvasóra hagyjuk.

5.32. TÉTEL (FELBONTÁS SZIMMETRIKUS ÉS FERDÉN SZIMMETRIKUS MÁTRIX ÖSSZEGÉRE). *Minden négyzetes mátrix előáll egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegeként, nevezetesen minden* $\mathbf{A}$ *négyzetes mátrixra*

$$\mathbf{A} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\mathsf{T}\right)}_{\textit{szimmetrikus}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^\mathsf{T}\right)}_{\textit{ferdén szimm.}}.$$

BIZONYÍTÁS. Ha egy mátrix szimmetrikus, konstansszorosa is, így elég megmutatni, hogy az $\mathbf{A}+\mathbf{A}^\mathsf{T}$ mátrix szimmetrikus:

$$\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T}=\mathbf{A}^\mathsf{T}+\left(\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T}=\mathbf{A}^\mathsf{T}+\mathbf{A}=\mathbf{A}+\mathbf{A}^\mathsf{T}$$

Hasonlóképp $\mathbf{A}-\mathbf{A}^\mathsf{T}$ ferdén szimmetrikus, hiszen

$$\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T}=\mathbf{A}^\mathsf{T}-\left(\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T}=\mathbf{A}^\mathsf{T}-\mathbf{A}=-\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)$$

Végül a két mátrix összege valóban $\mathbf{A}$:

$$\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}+\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)+\frac{1}{2}\left(\mathbf{A}-\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)=\frac{1}{2}\mathbf{A}+\frac{1}{2}\mathbf{A}^\mathsf{T}+\frac{1}{2}\mathbf{A}-\frac{1}{2}\mathbf{A}^\mathsf{T}=\mathbf{A}.$$ □

Fontos következményei lesznek az alábbi egyszerű állításnak.

5.33. TÉTEL ($\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ ÉS $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ SZIMMETRIKUS). *Az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ és az $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ mátrixok tetszőleges $\mathbf{A}$ mátrix esetén szimmetrikusak.*

BIZONYÍTÁS. $\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T}=\left(\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}=\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}$. Az állítás másik fele ugyanígy bizonyítható. □

Feladatok

5.29.• IGAZ – HAMIS Döntsük el, igazak-e az alábbi állítások? Válaszunkat indokoljuk!

a) Szimmetrikus mátrixok összege és skalárszorosa is szimmetrikus, így szimmetrikus mátrixok tetszőleges lineáris kombinációja is szimmetrikus.

b) Ferdén szimmetrikus mátrixok összege és skalárszorosa is ferdén szimmetrikus, így ferdén szimmetrikus mátrixok tetszőleges lineáris kombinációja is ferdén szimmetrikus.

c) Minden lépcsős alakú mátrix felső háromszögmátrix.

d) Minden felső háromszögmátrix lépcsős alakú.

5.30. Számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzeit, négyzetét és köbét!

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.31. Hogyan oldanánk meg a következő egyenletrendszert a lehető legkevesebb lépésben?

$$\begin{aligned} x + 4y + 3z + 5w &= 3 \\ 6x + 3y \qquad\qquad &= 3 \\ 2x + 3y + 2z \qquad &= 3 \\ 2x + 4y + 3z + 5w &= 4 \end{aligned}$$

Bizonyítások

5.32. Mutassuk meg, hogy minden permutáló mátrix oszlopcserékkel is megkapható az egységmátrixból, és hogy permutáló mátrixszal jobbról való szorzás a beszorzott mátrix oszlopain ugyanazt a permutációt hajtja végre, mint amellyel a permutáló mátrix az egységmátrixból megkapható.

5.33. Bizonyítsuk be, hogy bármely két azonos méretű kígyó szorzata és egy kígyó bármely pozitív egész kitevős hatványa kígyó.

5.34.• Mutassuk meg, hogy egy **K** kígyó pontosan akkor invertálható, ha minden sorában pontosan egy elem nem 0, és ekkor inverze megkapható úgy, hogy minden nemnulla elem helyébe annak reciprokát írjuk, majd az így kapott mátrixot transzponáljuk.

Mátrixfelbontások

Mátrixfelbontáson egy mátrixnak adott tulajdonságú mátrixok szorzataként való fölírását értjük. Egy ilyen felbontással már találkoztunk, amikor invertálható mátrixot elemi mátrixok szorzatára bontottunk. E szakaszban a kiküszöbölési eljárásra épülő további felbontásokkal találkozunk. Ezek egyike, az LU-felbontás bizonyos lineáris algebrai feladatok számítógépes megoldásának gyakran használt eszköze.

Az LU-felbontás Tegyük fel, hogy egy $\mathbf{A}$ mátrixból el lehet jutni egy $\mathbf{U}$ felső háromszögalakhoz csak olyan sorműveletekkel, melyekben egy sor konstansszorosát valamely alatta lévő sorhoz adjuk. Minden ilyen elemi sorművelethez olyan elemi mátrix tartozik, mely alsó háromszög alakú. Ekkor tehát léteznek olyan $\mathbf{E}_1, \dots \mathbf{E}_k$ elemi alsó háromszögmátrixok, melyekre

$$\mathbf{E}_k \dots \mathbf{E}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}.$$

Innen

$$\mathbf{A} = (\mathbf{E}_k \dots \mathbf{E}_1)^{-1} \mathbf{U},$$

ahol $(\mathbf{E}_k \dots \mathbf{E}_1)^{-1}$ alsó háromszögmátrixok szorzatának inverze, tehát maga is alsó háromszögmátrix. Ráadásul mindegyik mátrixban, így szorzatukban, és annak inverzében is a főátló csupa 1-esből áll. Ez a következő definícióhoz vezet:

5.34. DEFINÍCIÓ (LU-FELBONTÁS). *Azt mondjuk, hogy az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix egy $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ alakú tényezőkre bontása* LU-felbontás *(*LU-faktorizáció *vagy* LU-dekompozíció*), ha $\mathbf{L}$ alsó egység háromszögmátrix (tehát a főátlóban 1-ek, fölötte 0-k vannak), $\mathbf{U}$ pedig felső háromszögmátrix.*

Az *LU-felbontásban* az L és U betűk az *alsó* és *felső* jelentésű angol *lower* és *upper* szavak kezdőbetűi.

▶ Nincs minden mátrixnak LU-felbontása (ld. **??**. feladat), például az

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & c \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

egyenlőség a paraméterek semmilyen értékére sem áll fönn.

▶ Az LU-felbontás nem egyértelmű, például

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

felbontás minden a paraméterértékre fönnáll. Megmutatható viszont, hogy ha $\mathbf{A}$ invertálható, és létezik LU-felbontása, akkor az egyértelmű (ld. 5.37. tétel).

5.35. PÉLDA (Az LU-FELBONTÁS KISZÁMÍTÁSA). *Elemi sorműveletekkel hozzuk felső háromszögalakra az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{és a} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixot, majd e lépéseket fölhasználva írjuk föl mindkét mátrix egy-egy LU-felbontását!

MEGOLDÁS. Először nézzük az **A** mátrixot! Oszloponként haladva végezzük el a Gauss-kiküszöbölést. Minden elemi sorművelet mellett (zárójelben) megadjuk a hozzá tartozó elemi mátrixot:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{S_2 - 1/2 S_1}{\Longrightarrow} \qquad \left(\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{S_3 - 1/4 S_1}{\Longrightarrow} \qquad \left(\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{S_3 - 1/2 S_2}{\Longrightarrow} \qquad \left(\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{U}.$$

Tehát $\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \mathbf{U}$, amiből az $(\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1)^{-1} = \mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_3^{-1}$ mátrixszal való beszorzás után $\mathbf{A} = (\mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_3^{-1})\mathbf{U}$. Kiszámoljuk az elemi mátrixok inverzeinek szorzatát, azaz az $\mathbf{L} = \mathbf{E}_1^{-1}\mathbf{E}_2^{-1}\mathbf{E}_3^{-1}$ mátrixot. Fölhasználjuk a 179. oldalon mondottakat, miszerint az $S_i + cS_j$ sorművelet mátrixának inverze egyenlő az $S_i - cS_j$ mátrixával:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Meglepő (de általánosítható) módon ezeknek az elemi mátrixoknak a szorzata a főátló alatti számok átmásolásával megkapható. Az eredmény egy alsó egység háromszögmátrix. Így az **A** mátrix LU-felbontása:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

Mivel az **A** átalakítása közben az oszlopok közt nem végeztünk műveletet, és a **B** mátrix az **A**-ból a harmadik oszlopa elhagyásával kapható

```
OCTAVE: A
A =

   4   8   4   8
   2   6   4   4
   1   3   2   4

OCTAVE: [L U]=lu(A)
L =

   1.00   0.00   0.00
   0.50   1.00   0.00
   0.25   0.50   1.00

U =

   4   8   4   8
   0   2   2   0
   0   0   0   2

OCTAVE: B
B =

   4   8   8
   2   6   4
   1   3   4

OCTAVE: [L U]=lu(B)
L =

   1.00   0.00   0.00
   0.50   1.00   0.00
   0.25   0.50   1.00

U =

   4   8   8
   0   2   0
   0   0   2
```

5.3. kód: Egy mátrix LU-felbontásának kiszámítása mátrixalapú nyelvben meg, ezért az előző felbontásból azonnal adódik a $\mathbf{B}$ felbontása is:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

□

Az 5.35. példában követett eljárás egyszerűen általánosítható tetszőleges mátrixra.

Az alábbi algoritmus a Gauss-elimináció lépcsős alak helyett felső háromszögalakú mátrixot adó megváltoztatásával vagy talál egy $m \times m$-es $\mathbf{L}$ és egy $m \times n$-es $\mathbf{U}$ mátrixot, melyekre $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, vagy hibaüzenetet ad.

5.36. ALGORITMUS (EGY LU-FELBONTÁS ELŐÁLLÍTÁSA). *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy tetszőleges* $m \times n$*-es valós (vagy bármely más test feletti) mátrix.*

Első lépésként tekintsük az $\mathbf{A}$ *mátrix első sorának első elemét. Ha ez* 0*, de az első oszlopban alatta nemnulla elem is van, akkor „a mátrixnak nincs LU-felbontása” üzenettel az algoritmus leáll. Ha alatta minden elem* 0*, az algoritmust a második sor második elemével folytatjuk (Gauss-kiküszöbölés esetén az első sor második elemével folytatnánk). Ha pedig az első sor első eleme nem* 0*, akkor az első oszlop további elemei eliminálhatók az* $S_2 - l_{21}S_1$*,* $S_3 - l_{31}S_1, \dots, S_n - l_{n1}S_1$ *sorműveletekkel, ahol* $l_{k1} = a_{k1}/a_{11}$*.*

Az algoritmust hasonlóan folytatjuk sorban haladva a főátló elemein. Ha valamelyikük 0*, de alatta van a mátrixnak nemnulla eleme, leállunk, ha alatta már minden elem* 0*, folytatjuk a következő főátlóbeli elemmel, ha pedig nemnulla, akkor elimináljuk az alatta lévő elemeket. Az i-edik lépésben tehát az* $S_{i+1} - l_{i+1,i}S_i$*,* $S_{i+2} - l_{i+2,i}S_i, \dots, S_n - l_{ni}S_i$ *sorműveleteket hajtjuk végre.*

Az elimináció végén megmaradt felső háromszögmátrix lesz $\mathbf{U}$*. A kiküszöbölés konstans* l_{ij} *elemeit írjuk az* $\mathbf{I}_m$ *egységmátrix i-edik sorának j-edik oszlopába. Ez lesz az* $\mathbf{L}$ *mátrix, azaz*

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{m1} & l_{m2} & \dots & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.4}$$

5.37. TÉTEL (AZ LU-FELBONTÁS LÉTEZÉSE ÉS EGYÉRTELMŰSÉGE). *A fenti algoritmusra igaz, hogy*

a) pontosan akkor áll le hibaüzenettel, ha $\mathbf{A}$*-nak nincs LU-felbontása,*

b) a megkonstruált $\mathbf{L}$ *és* $\mathbf{U}$ *mátrixok LU-felbontást adnak,*

c) ha $\mathbf{A}$ *invertálható, akkor e felbontás egyértelmű.*

BIZONYÍTÁS. Csak a *b)* állítást igazoljuk, a többit az Olvasóra hagyjuk (ld. 5.48. feladat). Jelölje az $S_j - l_{ji}S_i$ sorművelet elemi mátrixát $\mathbf{E}_{ji}$ ($1 \le i < j \le m$). Jelölje e mátrixoknak a végrehajtás sorrendjében jobbról balra vett szorzatát $\mathbf{E}$, azaz legyen

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}_{m-1,m})(\mathbf{E}_{m-2,m}\mathbf{E}_{m-2,m-1})\dots(\mathbf{E}_{m2}\dots\mathbf{E}_{42}\mathbf{E}_{32})(\mathbf{E}_{m1}\dots\mathbf{E}_{31}\mathbf{E}_{21}).$$

Az algoritmus szerint ekkor $\mathbf{EA} = \mathbf{U}$. Vizsgáljuk meg az $\mathbf{EL}$ szorzatot az algoritmusbeli $\mathbf{L}$ mátrixszal. Mivel $\mathbf{L}$ főátlójában csupa 1, *ji*-edik helyén l_{ji} áll, ezért az elemi $\mathbf{E}_{ji}$ mátrix épp ezt az elemet fogja eliminálni, és így $\mathbf{E}$ minden főátló alatti elemet eliminál, azaz $\mathbf{EL} = \mathbf{I}$. Eszerint $\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{L}$, tehát $\mathbf{A} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{LU}$. □

Egyenletrendszer megoldása LU-felbontással Ha már ismerjük egy $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását, akkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer könnyen megoldható. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldása az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$, $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszerek megoldásával ekvivalens. Ha ugyanis $\mathbf{x}$ megoldása az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek, akkor $\mathbf{LUx} = \mathbf{b}$, és az $\mathbf{y} = \mathbf{Ux}$ jelöléssel $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$. Másrészt, ha $\mathbf{y}$ megoldása az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek, és $\mathbf{x}$ az $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszernek, akkor $\mathbf{y}$-t behelyettesítve $\mathbf{L}(\mathbf{Ux}) = \mathbf{b}$, azaz $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Tömören:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ megoldható} \iff \mathbf{Ly} = \mathbf{b},\ \mathbf{Ux} = \mathbf{y} \text{ megoldható.}$$

Az $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ alakjából következik, hogy az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$, és az $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszerek egyszerű visszahelyettesítésekkel megoldhatók.

5.38. PÉLDA (EGYENLETRENDSZER MEGOLDÁSA LU-FELBONTÁSSAL). *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!*

$$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 + 8x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 4 \end{aligned}$$

MEGOLDÁS. Mivel ismerjük az együtthatómátrix LU-felbontását – az épp az (5.3)-beli felbontás –, ezért ezt használjuk, és először megoldjuk az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ebből $y_1 = 8$, ezt a második egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $y_2 = 0$, majd ezeket a harmadikba helyettesítve kapjuk, hogy $y_3 = 2$. Ezután megoldjuk az $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszert, aminek alakja

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ismét egyszerű visszahelyettesítésekkel kapjuk, hogy $x_3 = 1$, $x_2 = 0$ és $x_1 = 1$. A megoldás $\mathbf{x} = (0, 0, 1)$. □

Mátrix invertálása LU-felbontással Mátrix invertálásához elég megoldanunk az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ egyenletrendszert. Ha $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ egy LU-felbontása $\mathbf{A}$-nak, akkor az $\mathbf{LUX} = \mathbf{I}$ megoldása a vele ekvivalens két mátrixegyenlet megoldásával megkapható:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{I} \iff \mathbf{LY} = \mathbf{I},\ \mathbf{UX} = \mathbf{Y}.$$

E két utóbbi egyenletrendszer viszont megoldható kizárólag visszahelyettesítésekkel is!

5.39. PÉLDA (MÁTRIX INVERTÁLÁSA LU-FELBONTÁSSAL). *Invertáljuk az* 5.35. *példában megadott*

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixot az LU-felbontása segítségével!

MEGOLDÁS. A $\mathbf{B}$ mátrix LU-felbontását használva először megoldjuk az $\mathbf{LY} = \mathbf{I}$ mátrixegyenletet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{L}$ első sorával való szorzásból: $[y_{11}\ y_{12}\ y_{13}] = [1\ 0\ 0]$. A második sorral való szorzásból $\frac{1}{2}[y_{11}\ y_{12}\ y_{13}] + [y_{21}\ y_{22}\ y_{23}] = [0\ 1\ 0]$. Behelyettesítés után $[y_{21}\ y_{22}\ y_{23}] = [-\frac{1}{2}\ 1\ 0]$. Végül a harmadik sorral való szorzásból:

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} y_{21} & y_{22} & y_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

amiből behelyettesítés után kifejezve $\mathbf{Y}$ harmadik sorát kapjuk, így $[y_{31}\ y_{32}\ y_{33}] = [0\ -\frac{1}{2}\ 1]$. Azaz

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ezután ugyanígy, egyszerű helyettesítésekkel megoldható az $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$, azaz a

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixegyenlet is, melynek megoldása

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/2 & -1 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

□

Az LU-felbontás a gyakorlatban Ismét végigszámoljuk az 5.35. példabeli mátrix felbontását. Először írjunk le egy egységmátrixot, de a főátló alatti helyeket üresen hagyva, ebből lesz **L**. Írjuk mellé az **A** mátrixot, és amikor elvégzünk egy $S_i - l_{ji}S_j$ sorműveletet rajta, akkor az l_{ji} értéket bejegyezzük az **L** mátrix j-edik sorának i-edik oszlopába. Az alábbi számítások bal hasábjában látjuk a fentiek szerinti lépéseket.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 2.00 \\ 2.00 & 4.00 & 1.00 \\ 1.00 & 2.00 & 4.00 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 2.00 \\ 0.50 & 3.50 & 0.00 \\ 1.00 & 2.00 & 4.00 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 7/4 & 7/2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 2.00 \\ 0.50 & 3.50 & 0.00 \\ 0.25 & 1.75 & 3.50 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 7/2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 2.00 \\ 0.50 & 3.50 & 0.00 \\ 0.25 & 0.50 & 3.50 \end{bmatrix}$$

Vegyük észre, hogy az **A** mátrixon folytatott elemi átalakítások eredménye és az **L** már kiszámolt elemei egyetlen mátrixban is „elférnek”, ugyanis **L**-ben épp akkor és oda kerül egy elem, amikor és ahova **A**-ban 0. Ezt a számítógépprogramok kihasználják, ha igen nagy méretű **A** mátrixot kell felbontani, és az **L** és **U** mátrixot is az **A** helyében konstruálják meg. A fenti számítások jobb hasábjában ezt a számítógépes technikát alkalmazzuk. Színes háttérrel jelöljük az **L**-beli elemeket.

Az LU-felbontás műveletigénye megegyezik a Gauss-kiküszöbölésével, azaz egy n-edrendű mátrixra nagyságrendileg $2n^3/3$. Egyenletrendszer megoldásánál is azonos a lépésszám, hisz a Gauss-módszernél a kiküszöbölést a jobb oldallal is meg kell csinálni, az LU-felbontásnál viszont az alsó háromszögmátrixhoz tartozó egyenletrendszert is meg kell oldani: mindkettő $n(n-1)/2$ összeadás/kivonás és ugyanennyi szorzás/osztás. Az LU-felbontásnak viszont több olyan előnyös tulajdonsága van, ami miatt használata meghatározó az egyenletrendszerek megoldásában és amellett több más feladatban is. Néhány a legfontosabbak közül:

1. Mivel az egyenletrendszer együtthatómátrixának LU-felbontásához nincs szükség az egyenletrendszer jobb oldalára, ezért használható olyan esetekben, amikor a jobb oldal még nem ismeretes, vagy több

különböző jobb oldallal is dolgozni kell.

2. Az LU-felbontás ismeretében több mátrixokkal kapcsolatos számítás gyorsabban elvégezhető mint egyébként, pl. ilyen a mátrix inverzének, vagy a később tanulandó determinánsának meghatározása.

3. Korábban említettük, hogy az LU-felbontás igen memóriatakarékos, ráadásul vannak olyan speciális mátrixosztályok (pl. a szalagmátrixok, vagy a ritka mátrixok), melyekre létezik a kiküszöbölésnél gyorsabb algoritmus az LU-felbontásra.

4. A komputer algebra programok úgy működnek, hogy ha egy mátrixon valamilyen számítást kell elvégezni, ami megoldható az LU-felbontással (vagy a következő pontban tárgyalandó PLU-felbontással), akkor azzal oldják meg. Így ha később egy másik számítást is el kell e mátrixszal végezni, e felbontás ismeretében az már sokkal gyorsabb lehet.

*PLU-felbontás** Nincs minden $\mathbf{A}$ mátrixnak LU-felbontása, de sorcserékkel – azaz egy permutáló mátrixszal való balról szorzással – olyan alakra hozható, melynek van LU-felbontása. Létezik tehát olyan $\mathbf{P}$ permutáló mátrix, hogy

$$\mathbf{PA} = \mathbf{LU}, \text{ azaz } \mathbf{A} = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{LU}.$$

(Itt kihasználtuk, hogy permutáló mátrix inverze megegyezik transzponáltjával.)

5.40. DEFINÍCIÓ (PLU-FELBONTÁS). *Egy tetszőleges $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixnak egy permutáló, egy egység főátlójú négyzetes alsó háromszög- és egy $m \times n$-es felső háromszögmátrix szorzatára való bontását* PLU-felbontásnak *nevezzük.*

► Ha $m > n$, akkor $\mathbf{U}$ utolsó $m - n$ sora zérussor, ezért ezeket, és $\mathbf{L}$ utolsó $m - n$ oszlopa is elhagyható, vagyis ha $r = \min(m, n)$, akkor $\mathbf{P}$ $m \times m$-es permutáló mátrix, $\mathbf{L}$ 1-esekből álló főátlójú $m \times r$-es alsó, míg az $\mathbf{U}$ $r \times n$-es felső háromszögmátrix. Például a következő első felbontás a definíciót, a második e megjegyzés szerinti felbontást adja:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\1/2 & 1/2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\\&= \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\1/2 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

A PLU-felbontást megadó algoritmus minimális változtatással megkapható az LU-felbontáséból. Az algoritmust – épp ahogy a számítógépek is számolnak – az $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ mátrix elemeit egyetlen mátrixban tárolva fogjuk végrehajtani. Az LU-hoz képest csak annyi a változás, hogy sorcserék elvégzését is megengedjük. Az LU-felbontás algoritmusa akkor akad el, amikor egy főátlóbeli elem 0, de van alatta nem nulla elem az oszlopban. Most ilyen esetben e két sort kicseréljük. Sőt, olyankor is kicserélhetünk egy sort egy alatta lévővel, ha főátlóbeli eleme nem 0. Egy ilyen cserét a kerekítési hibák csökkentése érdekében lehet érdemes megtenni. A korábban már említett részleges főelemkiválasztás szabálya szerint mindig a legnagyobb abszolút értékű elemet érdemes főelemnek választani. Hogy az algoritmus végén tudjuk, hogyan változott a sovektorok sorrendje, a sorindexek változását folyamatosan följegyezzük – praktikusan a mátrix sorvektorai elé írva. Lássunk egy példát. Azt, hogy az **L** és **U** mátrixok összeolvasztásából kapott mátrixon is elvégezhetők a sorcserék, később igazoljuk!

5.41. PÉLDA (PLU-FELBONTÁS). *Határozzuk meg az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 1 & -7 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5 \\ 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8 \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

mátrix PLU-felbontását úgy, hogy minden lépésben részleges főelem-kiválasztással a főátlóbeli elem alatti legnagyobb abszolút értékű elemet választjuk ki.

```
OCTAVE: A = [
> -1  6 1 -7  4
>  1  4 4 -7  5
>  4 -8 4  8 -4
>  3 -6 8  6 -8]
A =

  -1   6   1  -7   4
   1   4   4  -7   5
   4  -8   4   8  -4
   3  -6   8   6  -8

OCTAVE: [L U P] = lu(a)
L =

   1.00   0.00   0.00   0.00
   0.25   1.00   0.00   0.00
   0.75   0.00   1.00   0.00
  -0.25   0.67   0.00   1.00

U =

   4  -8   4   8  -4
   0   6   3  -9   6
   0   0   5   0  -5
   0   0   0   1  -1

P =

Permutation Matrix

   0   0   1   0
   0   1   0   0
   0   0   0   1
   1   0   0   0

OCTAVE: transpose(P)*L*U
ans =

  -1   6   1  -7   4
   1   4   4  -7   5
   4  -8   4   8  -4
   3  -6   8   6  -8
```

5.4. kód: Egy mátrix PLU-felbontásának kiszámítása mátrixalapú nyelvben

MEGOLDÁS. A mátrix sorindexeit a következőképp fogjuk jelölni:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 6 & 1 & -7 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5 \\ 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8 \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

Mivel az első oszlopban 4 a legnagyobb abszolút értékű szám, végrehajtunk egy $S_{i \leftrightarrow j}$ sorcserét, majd elimináljuk az első oszlop összes többi elemét:

$$\begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5 \\ -1 & 6 & 1 & -7 & 4 \\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8 \end{bmatrix} \to \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 1/4 & 6 & 3 & -9 & 6 \\ -1/4 & 4 & 2 & -5 & 3 \\ 3/4 & 0 & 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

A második oszlop második eleme alatt nincs nagyobb abszolút értékű szám, most nem kell sort cserélni, a negyedik sort eliminálni sem kell, (azaz kivonhatjuk belőle a második sor 0-szorosát):

$$\to \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 1/4 & 6 & 3 & -9 & 6 \\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1 & -1 \\ 3/4 & 0 & 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

A harmadik oszlopban 0 áll a főátlón, kicseréljük a harmadik és negyedik sort. Az eddig még nem indokolt mozzanat: az $\mathbf{L}$ és az $\mathbf{U}$ mátrixba eső részén egyaránt végrehajtható e művelet, és épp ezt tesszük a sorindexekkel is:

$$\to \begin{array}{c} 3\\ 2\\ 4\\ 1 \end{array}\begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 1/4 & 6 & 3 & -9 & 6 \\ 3/4 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{array}{c} 3\\ 2\\ 4\\ 1 \end{array}\begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 1/4 & 6 & 3 & -9 & 6 \\ 3/4 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Az utolsó lépésben nem is volt tennivalónk, mivel a főátló alatt 0 volt, így csak jeleztük, hogy mi kerül az $\mathbf{L}$ mátrixba e helyen. (Az a két nulla nem ugyanaz a nulla! A második már az $\mathbf{L}$ eleme!) Végül ebből az alakból leolvasható az $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$ és az indexekből a $\mathbf{P}$ mátrix. Ezeket egyből a $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ egyenlőségben adjuk meg:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 6 & 1 & -7 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5 \\ 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 0 & 6 & 3 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Mindkét oldalt $\mathbf{P}^\mathsf{T}$-tal szorozva megkapjuk a PLU-felbontást, azaz az $\mathbf{A} = \mathbf{P}^\mathsf{T}\mathbf{LU}$ egyenlőséget:

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 & 1 & -7 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5 \\ 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 0 & 6 & 3 & -9 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ezzel megoldottuk a feladatot! □

E felbontás egy lehetséges használatára mutatunk példát.

5.42. PÉLDA. *Oldjuk meg az*

$$\begin{bmatrix} -1 & 6 & 1 & -7 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5 \\ 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

egyenletrendszert az együtthatómátrix PLU-felbontását használva!

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletet $\mathbf{P}$-vel szorozva és $\mathbf{PA}$ helyébe $\mathbf{LU}$-t írva kapjuk, hogy az $\mathbf{LUx} = \mathbf{Pb}$ egyenletrendszert kell megoldani, ahol $\mathbf{b} = (1, 4, 4, 8)$. Ez – hasonlóan az LU-felbontásnál tanultakhoz – az $\mathbf{Ly} = \mathbf{Pb}$ és az $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszerek megoldásával ekvivalens.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása fejben számolva is leolvasható: $\mathbf{y} = (4, 3, 5, 0)$. Az $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszer bővített mátrixa, és annak redukált lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 & 8 & -4 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & -9 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Innen a megoldás $\mathbf{x} = (-2t, 0, 1 + t, t, t)$. □

5.43. algoritmus (Egy PLU-felbontás előállítása). *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy (test fölött értelmezett) tetszőleges* $m \times n$*-es mátrix, legyen* $r = \min(m, n)$*, és képezzük az* $\mathbf{A}_k$*,* $\mathbf{P}_k$*,* $\mathbf{L}_k$*,* $\mathbf{U}_k$ *(*$k = 0, 1, \ldots, r$*) mátrixok sorozatát a következő eljárás szerint:*

a) $\mathbf{A}_0 = \mathbf{U}_0 = \mathbf{A}$, $\mathbf{L}_0 = \mathbf{I}$, *így* $\mathbf{A}_0 = \mathbf{L}_0\mathbf{U}_0$,

b) a k*-adik lépésben az* $\mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{L}_{k-1}\mathbf{U}_{k-1}$ *összefüggés mátrixaiból megkonstruáljuk az* $\mathbf{A}_k = \mathbf{L}_k\mathbf{U}_k$ *egyenlőségbeli mátrixokat:*

1. *ha* $\mathbf{U}_{k-1}$ *főátlóján a* k*-adik elem és alatta minden elem* 0*, akkor legyen* $\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_{k-1}$*,* $\mathbf{L}_k = \mathbf{L}_{k-1}$*,* $\mathbf{U}_k = \mathbf{U}_{k-1}$*,* $\mathbf{P}_k = \mathbf{I}$*, megnöveljük* k *értékét* 1*-gyel és visszatérünk e pontra, egyébként a következővel folytatjuk.*
2. *ha* $\mathbf{U}_{k-1}$ *főátlóján a* k*-adik elem* 0*, és van olyan* $i > k$*, hogy az* i*-edik sorban alatta nem nulla elem van, akkor az* $S_k \leftrightarrow S_i$ *sorcserét végző* $\mathbf{P}_k$ *elemi mátrixszal kicseréljük e két sort, kapjuk az* $\mathbf{U}'_{k-1} = \mathbf{P}_k\mathbf{U}_{k-1}$*. E sorcserét végrehajtjuk az* $\mathbf{A}_{k-1}$ *mátrixon is, Ez lesz* $\mathbf{A}_k$*. Kihasználva, hogy* $\mathbf{P}_k\mathbf{P}_k = \mathbf{I}$*, az* $\mathbf{L}_{k-1}$*-en elvégzendő transzformáció is adódik:*

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k &= \mathbf{P}_k\mathbf{A}_{k-1} = \mathbf{P}_k\mathbf{L}_{k-1}\mathbf{U}_{k-1} = \mathbf{P}_k\mathbf{L}_{k-1}\mathbf{I}\mathbf{U}_{k-1} \\ &= \mathbf{P}_k\mathbf{L}_{k-1}\mathbf{P}_k\mathbf{P}_k\mathbf{U}_{k-1} = (\mathbf{P}_k\mathbf{L}_{k-1}\mathbf{P}_k)(\mathbf{P}_k\mathbf{U}_{k-1}) \\ &= \mathbf{L}'_k\mathbf{U}'_k. \end{aligned}$$

Itt tehát $\mathbf{L}'_k = \mathbf{P}_k\mathbf{L}_{k-1}\mathbf{P}_k$*, azaz az* $\mathbf{L}_{k-1}$ *mátrix* k*-adik, és egy* $i \geq k$ *indexre az* i*-edik sorának főátló alatti részei felcserélődnek. A* $\mathbf{P}_k\mathbf{L}_{k-1}$ *szorzat megcseréli az* $\mathbf{L}_{k-1}$ *mátrix* k*-adik és* i*-edik sorát, megcserélve a főátlóbeli* 1*-eseket is. A* $\mathbf{P}_k$*-val való jobbról szorzás eredményeként a* k*-adik és* i*-edik oszlopok helyet cserélnek, mivel azonban* $\mathbf{L}_{k-1}$*-ben ezekben az oszlopokban csak zérusok vannak a főátló elemein kívül, ezért e két* 1*-es visszakerül a főátlóra. Szemléltetésként legyen* $m = 5$*,* $k = 3$*,*

$i = 5$:

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L}_{k-1} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \boldsymbol{k_1} & \boldsymbol{k_2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & 0 & 1 & 0 \\ \boldsymbol{i_1} & \boldsymbol{i_2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}\right]$$

$$\mathbf{P}_k\mathbf{L}_{k-1} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \boldsymbol{i_1} & \boldsymbol{i_2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ * & * & 0 & 1 & 0 \\ \boldsymbol{k_1} & \boldsymbol{k_2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] \quad \mathbf{P}_k\mathbf{L}_{k-1}\mathbf{P}_k = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} \\ * & 1 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{0} \\ \hline i_1 & i_2 & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{0} \\ * & * & \mathbf{0} & 1 & \mathbf{0} \\ k_1 & k_2 & \mathbf{0} & 0 & \mathbf{1} \end{array}\right]$$

3. *Ezután az $\mathbf{U}'_{k-1}$ mátrix k-adik oszlopának főátló alatti elemeit egymás után elimináljuk, mindegyiket egy $S_i \leftarrow S_i - cS_k$ elemi sorműveletet végző $\mathbf{E}$ elemi mátrixszal. Ennek inverze a vele való jobbról szorzás esetén az $O_k \leftarrow O_k + cO_i$ oszlopműveletet végzi, így az*

$$\mathbf{L}'_k\mathbf{U}'_k = \mathbf{L}'_k\mathbf{I}\mathbf{U}'_k = \mathbf{L}'_k\mathbf{E}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{U}'_k$$

egyenlőségnek megfelelően az $\mathbf{U}'_k$-n végrehajtott sorművelet mellett az $\mathbf{L}'_k$ mátrix i-edik oszlopának c-szeresét kell a k-adik oszlophoz adni, azaz a c számot beírni az i-edik sor k-adik oszlopába. Az eliminációt a kapott mátrixokon tovább folytatjuk, míg az összes elemet nem elimináltuk a k-adik oszlopban a főátló alatt. $\mathbf{L}_k$ és $\mathbf{U}_k$ jelöli e procedúra végén kapott mátrixokat, tehát $\mathbf{U}_k$-ban már a főátló alatt minden elem 0, és $\mathbf{L}_k$ a párja, melyekre $\mathbf{A}_k = \mathbf{L}_k\mathbf{U}_k$. Megnöveljük k értékét, és ha $k < r$, visszatérünk az 1. pontra, egyébként a következő pontra lépünk.

c) *Legyen $\mathbf{P} = \mathbf{P}_r\mathbf{P}_{r-1}\ldots\mathbf{P}_1$, $\mathbf{L} = \mathbf{L}_r$, $\mathbf{U} = \mathbf{U}_r$. Ekkor a fentiek szerint $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$ az $\mathbf{A}$ egy PLU-felbontása.*

Az, hogy ez az algoritmus valóban PLU-felbontást ad, az algoritmus leírásában bizonyítottuk, illetve onnan kiolvasható.

Feladatok

Adjuk meg az alábbi mátrixok egy LU-felbontását!

5.35. $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

5.36. $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

5.37. $\begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 4 & -5 & -5 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

5.38. $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

5.39. $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

5.40. $\begin{bmatrix} 2.0 & 2.0 & -2.0 \\ -0.5 & 0.0 & -1.0 \\ 1.0 & 1.5 & 1.0 \end{bmatrix}$

Az előző feladatokban megkonstruált LU-felbontásokat használva oldjuk meg az alábbi egyenletrendszereket, azaz oldjuk meg előbb az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$*, majd az* $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ *egyenletrendszereket!*

5.41. $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

5.42. $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

5.43. $\begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 4 & -5 & -5 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix}$

5.44. $\begin{bmatrix} 2.0 & 2.0 & -2.0 \\ -0.5 & 0.0 & -1.0 \\ 1.0 & 1.5 & 1.0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5.6 \\ -1.0 \\ 4.6 \end{bmatrix}$

5.45. Végtelen sok megoldás

$$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 8x_4 &= 8 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 4x_4 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Határozzuk meg az alábbi mátrixok inverzét az LU-felbontásuk ismeretében, azaz oldjuk meg az $\mathbf{LY} = \mathbf{I}$ *és az* $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$ *mátrix-egyenleteket!*

5.46. $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

5.47. $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

5.48. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ az $\mathbf{A}$ egy LU-felbontása, és $\mathbf{A}$ invertálható, akkor e felbontás egyértelmű!

Adjuk meg az alábbi mátrixok egy PLU-felbontását! Alkalmazzunk részleges főelem-kiválasztást!

5.49. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

5.50. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

5.51. $\begin{bmatrix} 0.0 & -1.0 & 1.5 \\ 0.5 & -2.0 & 2.0 \\ 0.0 & 2.0 & 2.0 \end{bmatrix}$

5.52. Igazoljuk, hogy az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixnak nincs LU-felbontása, és annak a mátrixnak sincs, melyet az $\mathbf{A}$ első két sorának felcserélésével kapunk.

Megoldások

5.4. A bizonyítások közvetlenül következnek a valós számok közti műveletek tulajdonságaiból. Mintaként bebizonyítjuk az *(a)* állítást.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}+\mathbf{B} &= [a_{ij}]+[b_{ij}] = [a_{ij}+b_{ij}]\\ &\overset{*}{=} [b_{ij}+a_{ij}] = [b_{ij}]+[a_{ij}] = \mathbf{B}+\mathbf{A}.\end{aligned}$$

A *-gal jelzett egyenlőségnél használjuk a számok összeadásának kommutativitását. A többi állítás hasonlóan bizonyítható.

5.5. Helyettesítés előtt:

$$\mathbf{u}^\mathsf{T}\mathbf{u}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\end{bmatrix}\mathbf{u}.$$

Az $\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ helyettesítés elvégzése után

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\end{bmatrix}\mathbf{A}\mathbf{x},$$

ahol

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},\ \mathbf{u} = \begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix},\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\1 & -3 & 1\\2 & -1 & -3\end{bmatrix}.$$

5.6. $$\begin{bmatrix}1&3\\2&8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}$$

5.7. $$\begin{bmatrix}1&2\\-2&-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$$

5.8. $$\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}$$

5.9. $$\begin{bmatrix}2&4\\3&8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}$$

5.10. $$\begin{bmatrix}2&0&4\\0&2&0\\3&2&7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

5.11. $$\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&2\\2&4&5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

5.12. Legyen $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right]$. Négyzete a zérusmátrix, azaz

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a^2+bc & b(a+d)\\c(a+d) & bc+d^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

Innen vagy $a = d = 0$ és c vagy d legalább egyike 0, vagy $a \neq 0$, $c \neq 0$ és $b = -a^2/c$, $d = -a$.

5.13. A feladat érdekes, abban a Fibonacci sorozat elemei bukkannak föl. Ez az $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$ egyenlőségekkel definiált sorozat, melynek első néhány tagja: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$. Tekintsük $\mathbf{B}$ néhány hatványát:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^2 &= \begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f_1&f_2\\f_2&f_3\end{bmatrix},\\ \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} &= \begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f_2&f_3\\f_3&f_4\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Ennek alapján azt sejtjük, hogy

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix}f_{n-1} & f_n\\f_n & f_{n+1}\end{bmatrix}.$$

Az állítás $n = 1, 2, 3$ esetén igaz, és n-ről öröklődik $n+1$-re, ugyanis

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}^n\mathbf{A} &= \begin{bmatrix}f_{n-1}&f_n\\f_n&f_{n+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}f_n & f_{n+1}\\f_{n-1}+f_n & f_n+f_{n+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}f_n&f_{n+1}\\f_{n+1}&f_{n+2}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

5.14. $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ Einstein-konvencióval: $c_{ij} = a_{ik}b_{kj}$.

5.17. $$\begin{bmatrix}2&-3&0&0&0\\-1&2&0&0&0\\0&0&-5&3&3\\0&0&-16&9&10\\0&0&28&-16&-17\end{bmatrix}$$

5.18. $$\begin{bmatrix}2&-3&7&-4&-4\\-1&2&-7&4&4\\0&0&-5&3&3\\0&0&-16&9&10\\0&0&28&-16&-17\end{bmatrix}$$

5.19. $$\begin{bmatrix}-1&0&1&1&1\\2&-1&-1&-1&-1\\-1&1&1&0&0\\-1&1&0&1&0\\-1&1&0&0&1\end{bmatrix}$$

5.22. A fölcserélhetőségre vonatkozó $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ egyenletet szorozzuk meg mindkét oldalról $\mathbf{B}^{-1}$-gyel:

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{AB})\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{BA})\mathbf{B}^{-1}.$$

Az asszociativitást használva

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})(\mathbf{BB}^{-1}) = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B})(\mathbf{AB}^{-1}),$$

amiből a $\mathbf{BB}^{-1} = \mathbf{I}$ azonosság fölhasználásával kapjuk, hogy

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AB}^{-1}.$$

5.23. Azt mondjuk, hogy a $\circledcirc$ művelet invertálható a H egy R részhalmazán, ha bármely $a, b, c \in R$ elem esetén az

$$a \circledcirc x = b, \qquad y \circledcirc a = c$$

egyenletek mindegyike megoldható, azaz vannak olyan $x, y \in H$ elemek, melyek kielégítik a fenti egyenleteket. Ha a definícióbeli $\circledcirc$ kommutatív művelet, akkor elég a fenti két egyenlet egyikét tekinteni.

5.24. *a)* Az $e \in H$ semleges elem, ha minden $a \in H$ elemre $a \circledcirc e = e \circledcirc a = a$. *b)* Azt mondjuk, hogy a $\circledcirc$ műveletre nézve a inverze b, ha $a \circledcirc b = b \circledcirc a = e$.

5.26. Elég megmutatni, hogy

$$\left(\mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}\right)(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}) = \mathbf{I},$$

mert ez a formula igazolása mellett azt is bizonyítja, hogy $\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}$ invertálható.

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}\right)(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}) \\
&\qquad = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}}{1 + \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T}}{1 + \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}} \\
&\qquad = \mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}1\mathbf{v}^\mathsf{T}}{1 + \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\left(\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\right)\mathbf{v}^\mathsf{T}}{1 + \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}} \\
&\qquad = \mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\left(1 + \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\right)\mathbf{v}^\mathsf{T}}{1 + \mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}} \\
&\qquad \overset{*}{=} \mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^\mathsf{T} \\
&\qquad = \mathbf{I}.
\end{aligned}$$

A $*$-gal jelzett egyenlőségnél azt használtuk ki, hogy 1×1-es mátrixszal való szorzás egybeesik a skalárral való szorzással, a skalár tényező pedig egy mátrixszorzatban áttehető más helyre, így az adott törtkifejezésben egyszerűsíthettünk vele.

5.27. Első lépésként kifejezzük az új mátrixot $\mathbf{A}$-ból mátrixműveletekkel. Legyen $\mathbf{e}_i$ és $\mathbf{e}_j$ az i-edik és j-edik standard egységvektor. Ekkor a módosított mátrix

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^\mathsf{T}.$$

Erre alkalmazható a Sherman – Morrison-formula az $\mathbf{u} = \mathbf{e}_i$ és $\mathbf{v} = \varepsilon\mathbf{e}_j$ választással.

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^{-1} &= \left(\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^\mathsf{T}\right)^{-1} \\
&= \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_i(\varepsilon\mathbf{e}_j)^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}}{1 + \varepsilon\mathbf{e}_j^\mathsf{T}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_i} \\
&= \mathbf{A}^{-1} - \varepsilon\frac{(\mathbf{A}^{-1})_{*i}(\mathbf{A}^{-1})_{j*}}{1 + \varepsilon(\mathbf{A}^{-1})_{ji}}
\end{aligned}$$

5.28. Az előző példa alkalmazásával

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{1}{10}\frac{(\mathbf{A}^{-1})_{*1}(\mathbf{A}^{-1})_{1*}}{1 + \frac{1}{10}(\mathbf{A}^{-1})_{11}}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0 & -2/5 & 3/5 & 0 \\ -2/5 & 7/5 & -8/5 & 3/5 \\ 3/5 & -8/5 & 7/5 & -2/5 \\ 0 & 3/5 & -2/5 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{10}\frac{\begin{bmatrix} 0 \\ -2/5 \\ 3/5 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2/5 & 3/5 & 0 \end{bmatrix}}{1 + \frac{1}{10}\cdot 0} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -2/5 & 3/5 & 0 \\ -2/5 & 7/5 & -8/5 & 3/5 \\ 3/5 & -8/5 & 7/5 & -2/5 \\ 0 & 3/5 & -2/5 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/25 & -6/25 & 0 \\ 0 & -6/25 & 9/25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -2/5 & 3/5 & 0 \\ -2/5 & 173/125 & -197/125 & 3/5 \\ 3/5 & -197/125 & 341/250 & -2/5 \\ 0 & 3/5 & -2/5 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Tizedestörtekkel számolva:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0 & -0.4 & 0.6 & 0.0 \\ -0.4 & 1.4 & -1.6 & 0.6 \\ 0.6 & -1.6 & 1.4 & -0.4 \\ 0.0 & 0.6 & -0.4 & 0.0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.000 & -0.400 & 0.600 & 0.000 \\ -0.400 & 1.384 & -1.576 & 0.600 \\ 0.600 & -1.576 & 1.364 & -0.400 \\ 0.000 & 0.600 & -0.400 & 0.000 \end{bmatrix}.$$

5.31. Az első egyenletet kivonjuk az utolsóból, innen $x = 1$, ezután visszahelyettesítés a második, harmadik, majd az első egyenletbe.

5.35. $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

5.36. $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5.37. $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4/5 & 1 & 0 \\ -3/5 & 7/9 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 0 & -9/5 & -17/5 \\ 0 & 0 & -23/9 \end{bmatrix}.$

5.38. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{10} \end{bmatrix}$

5.39. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

5.40. $\begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.25 & 1.00 & 0.00 \\ 0.50 & 1.00 & 1.00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.00 & 2.00 & -2.00 \\ 0.00 & 0.50 & -1.50 \\ 0.00 & 0.00 & 3.50 \end{bmatrix}.$

5.41. $\mathbf{y} = (0, 3, 4)$, $\mathbf{x} = (-1, -1, 2)$.

5.42. $\mathbf{y} = (0, 3, 1)$, $\mathbf{x} = (1, -1, 1)$.

5.43. $\mathbf{y} = (3, -17/5, -23/9)$, $\mathbf{x} = (1, 0, 1)$.

5.44. $\mathbf{y} = (5.6, 0.4, 1.4)$, $\mathbf{x} = (1.2, 2.0, 0.4)$.

5.45. Mivel ismerjük az együtthatómátrix LU-felbontását – az épp az (5.2)-beli felbontás –, ezért ezt használjuk, és először megoldjuk az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ebből $y_1 = 8$, ezt a második egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $y_2 = 0$, majd ezeket a harmadikba helyettesítve kapjuk, hogy $y_3 = 2$. Ezután megoldjuk az $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ egyenletrendszert, aminek alakja

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ismét egyszerű visszahelyettesítésekkel kapjuk, hogy $x_4 = 1$, $x_3 = s$ a szabad változó, $x_2 = -s$ és $x_1 = s$. A megoldás $\mathbf{x} = (s, -s, s, 1) = (0, 0, 0, 1) + s(1, -1, 1, 0)$.

5.46. Az $\mathbf{LY} = \mathbf{I}$ egyenletből

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/12 & -1/3 & 1 \end{bmatrix},$$

míg az $\mathbf{UX} = \mathbf{Y}$ egyenlet megoldása, egyúttal $\mathbf{A}$ inverze

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 5/12 & -1/3 & 0 \\ -1/8 & 1/2 & -1/2 \\ -1/24 & -1/6 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

5.47. $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/12 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1/3 & -5/3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1/12 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}.$

5.48. Tegyük fel, hogy létezik az n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrixnak két LU-felbontása is, azaz $\mathbf{A} = \mathbf{L}_1\mathbf{U}_1 = \mathbf{L}_2\mathbf{U}_2$. Mivel $\mathbf{A}$ invertálható, ezért $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{L}_2$ és $\mathbf{U}_2$ is. Ugyanis ha pl. $\mathbf{L}_1$ nem volna invertálható, akkor az oszloptérének dimenziója kisebb lenne n-nél, és mivel $\mathbf{L}_1\mathbf{U}_1$ oszlopvektorai az $\mathbf{L}_1$ oszlopvektorainak lineáris kombinációi, ezért e szorzat oszlopterének dimenziója is kisebb lenne n-nél, azaz $\mathbf{A}$ nem lenne invertálható. A többi mátrix invertálhatósága hasonlóan igazolható. Balról $\mathbf{L}_1$, jobbról $\mathbf{U}_2$ inverzével szorozva kapjuk, hogy

$$\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2^{-1} = \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2.$$

A bal oldalon két felső háromszögmátrix szorzataként egy felső háromszögmátrix van, míg a jobb oldalon két alsó háromszögmátrix szorzata, ami alsó háromszögmátrix (**??** feladat). Ráadásul a jobb oldal egység főátlójú (**??** feladat). Ez csak akkor állhat fönn, ha $\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2^{-1} = \mathbf{L}_1^{-1}\mathbf{L}_2 = \mathbf{I}$, azaz ha $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2$ és $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2$.

5.49. $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

5.50. $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 & 9 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{5}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

5.51. $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.5 & 1.0 \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0.5 & -2.0 & 2.0 \\ 0.0 & 2.0 & 2.0 \\ 0.0 & 0.0 & 2.5 \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

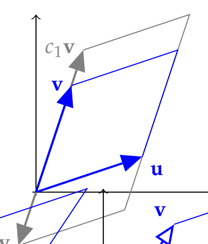
5.52. Egyrészt $\det \mathbf{A} = 1 \neq 0$, és így $\det \mathbf{U} \neq 0$, tehát $u_{11} \neq 0$, másrészt $\mathbf{A}$ és egy LU-felbontás bal felső elemére $0 = a_{11} = (\mathbf{LU})_{11} = l_{11}u_{11} \neq 0$, ami ellentmondás. Az első két sor felcserélése után kapott mátrixnál hasonló ellentmondásra jutunk az a_{22} elemmel.

6
Determináns

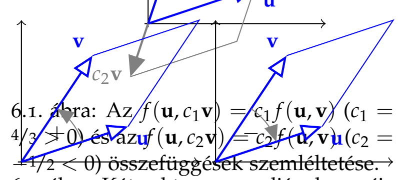
Egy valós négyzetes mátrix sorvektorai által kifeszített paralelepipedon térfogata jó jellemezője a mátrix egyes tulajdonságainak. Ehhez közel áll a determináns fogalma, melyet egy négyzetes mátrixokon értelmezett skalárértékű függvényként definiálunk, ami elemi sorműveletekkel számolható.

Parallelogramma előjeles területe A paralelogramma területéről szóló 1.38. tétel szerint az (a, b) és a (c, d) vektorok által kifeszített paralelogramma területe $|ad - bc|$, $ad - bc$ pontosan akkor pozitív, ha az (a, b) és a (c, d) vektorok jobbrendszert alkotnak, és pontosan akkor negatív, ha balrendszert. Ez a következő definícióhoz vezet: két síkbeli vektor által kifeszített paralelogramma *előjeles területe* megegyezik területével, ha a két vektor jobbrendszert alkot, és a terület -1-szeresével, ha balrendszert. Jelölje f az előjelesterület-függvényt, azaz legyen $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = ad - bc$, ahol $\mathbf{u} = (a, b)$, $\mathbf{v} = (c, d)$. f néhány tulajdonsága:

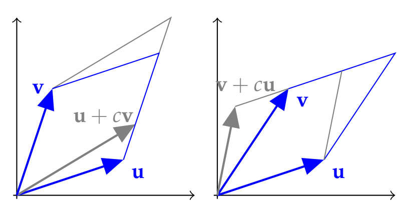
1. $f(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = cf(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, és $f(\mathbf{u}, c\mathbf{v}) = cf(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, azaz ha f egyik argumentumát c-vel szorozzuk, a függvényérték is c-szeresére változik. (Azt mondjuk, hogy f *homogén* mindkét változójában.) Ez nyilvánvaló, hisz egy paralelogramma egyik oldalának c-szeresére növelése c-szerezi a területét. Ha c negatív, akkor a vektorok körüljárása is változik összhangban azzal, hogy az előjeles területének is megváltozik az előjele (6.1. ábra).
2. $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -f(\mathbf{v}, \mathbf{u})$, hisz a két vektor sorrendjét megcserélve megváltozik orientációjuk, jobbrendszerből balrendszerbe és viszont (6.2. ábra).
3. $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u} + c\mathbf{v}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v} + c\mathbf{u})$, azaz az $\left[\begin{smallmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{v}\end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right]$ mátrix sorvektorai által kifeszített paralelogramma területe megegyezik a hozzáadás sorművelete után kapott mátrix sorvektoraihoz tartozó paralelogramma területével (6.3. ábra).
4. $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$, és hasonlóképp $f(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = f(\mathbf{0}, \mathbf{u}) = 0$ tetszőleges $\mathbf{u}$ vektorra, ugyanis az elfajuló paralelogramma területe 0.



6.1. ábra: Az $f(\mathbf{u}, c_1\mathbf{v}) = c_1 f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ($c_1 = 4/3 > 0$) és az $f(\mathbf{u}, c_2\mathbf{v}) = c_2 f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ($c_2 = -1/2 < 0$) összefüggések szemléltetése.



6.2. ábra: Két vektor sorrendjének cseréje megváltoztatja a orientációjukat.



6.3. ábra: Az $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u} + c\mathbf{v}, \mathbf{v})$ és az $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v} + c\mathbf{u})$ összefüggések szemléltetése.

5. $f(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = 1$, azaz a standard bázis által kifeszített egységnégyzet területe 1.

Az állítások a fenti ábrákkal szemléltetett egyszerű geometriai érvelések mellett az $f((a,b),(c,d)) = ad - bc$ formulával is bizonyíthatóak. E tulajdonságok segítségével általánosítani tudjuk az előjeles terület fogalmát, és bevezethetjük az előjeles térfogat fogalmát az n-dimenziós valós tér paralelepipedonjaira.

Parallelepipedon előjeles térfogata A vegyes szorzat tárgyalásakor láttuk (1.31. definíció), hogy a valós háromdimenziós térben három vektor vegyes szorzata a vektorok által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogatát adja, ahol az előjel aszerint pozitív vagy negatív, hogy a három vektor jobb- vagy balrendszert alkot. A háromdimenziós tér paralelepipedonjainak f előjeles térfogatára a paralelogrammánál látottakhoz hasonló tulajdonságok igazolhatók.

1. f homogén mindhárom argumentumában, azaz egy konstans tényező bármelyik argumentumból kiemelhető, pl. $f(c\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = cf(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$.
2. Bármely két argumentum felcserélése megváltoztatja a függvényérték előjelét, pl. $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -f(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u})$, $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -f(\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v})$.
3. f bármely argumentumához hozzáadva egy másik konstansszorosát, a függvényérték nem változik, pl. $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{u} + c\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$.
4. Ha f bármely két argumentuma megegyezik, a függvényérték 0, pl. $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0$. Ugyancsak 0 értéket kapunk, ha f bármelyik argumentuma a $\mathbf{0}$-vektor, pl. $f(\mathbf{u}, \mathbf{0}, \mathbf{w}) = 0$.
5. $f(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = 1$, azaz az egységkocka térfogata 1.

Látjuk, hogy f eddig megismert tulajdonságai vagy azonnal megadják f értékét (ha az 0 vagy 1), vagy az argumentumok olyan megváltoztatását tartalmazzák, amelyekhez hasonlókat a mátrixok elemi sorműveleteinél láttunk. Valóban, e tulajdonságok nem csak egy új fogalom – az előjeles térfogat általánosítását –, de egyúttal annak egyszerű kiszámítási módját is lehetővé teszik.

A determináns mint sorvektorainak függvénye

A determináns definíciója Az n darab n-dimenziós vektor által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata helyett olyan fogalmat fogunk definiálni, mely speciális esetként ezt is tartalmazza. Ez lesz a determináns. A determináns tehát olyan függvény, mely n darab n-dimenziós vektorhoz – vagy ami ezzel ekvivalens, a belőlük képzett $n \times n$-es mátrixhoz – egy skalárt rendel. A definícióban csak az előjeles térfogat vizsgálatában megismert függvénytulajdonságokat használjuk.

Az $\mathbf{A} = [a_{ij}]_n$ mátrixhoz rendelt skalárt, azaz determinánsának értékét $\det(\mathbf{A})$, $|\mathbf{A}|$ vagy $|a_{ij}|_n$ jelöli. Részletezve az általános jelölést az $\mathbf{A}$ mátrixra és determinánsára:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

E jelölésnek megfelelően a $\det(\mathbf{A})$ determináns sorain, oszlopain, elemein az $\mathbf{A}$ mátrix sorait, oszlopait, elemeit értjük.

A determinánsokat először SEKI Takakazu (関 孝和, 1642–1708) vizsgálta, eredményei 1683-ban jelentek meg. Seki 2-től 5-ödrendűek értékét tudta kiszámolni. Európában is 1683-ban jelenik meg e fogalom először Leibniz egy l'Hôpitalnak írt levelében, melyet később rezultánsnak hív. A determináns név Gausstól származik. A mátrixok és determinánsok történetének szép összefoglalója olvasható a MacTutor History of Mathematics weboldalon.

6.1. DEFINÍCIÓ (DETERMINÁNS). Determinánson *azt a négyzetes mátrixokon értelmezett és* det*-tel jelölt skalár értékű függvényt értjük, mely eleget tesz a következő feltételeknek:*

D1. értéke c-szeresére változik, ha egy sorát c-vel szorozzuk,

D2. értéke -1*-szeresére változik, ha két különböző sorát fölcseréljük,*

D3. értéke nem változik a hozzáadás elemi sorművelete közben,

D4. az egységmátrixhoz 1*-et rendel.*

► Mint látjuk, a definíció első három feltétele azt mondja ki, hogy hogyan változik a determináns értéke elemi sorműveletek közben. Az egyetlen változás, hogy itt a skalárral való szorzásnál nem kötöttük ki, hogy c nem lehet 0. Látni fogjuk, hogy e kikötés elhagyása nem fog gondot okozni az elemi sorműveletek determinánsokra való alkalmazásában.

► A definícióból nem látszik, hogy e feltételeket kielégítő függvény létezik-e és ha igen, egyértelmű-e. Ezeket később igazolni fogjuk.

► A definícióban nem törekedtünk a feltételek minimalizálására, inkább a természetesség és egyszerűség volt a fontosabb szempont. Például a *D2.* feltétel elhagyható, hisz a sorcsere előállítható a két másik sorművelet segítségével, amint azt a 2.29. feladatból is láthattuk.

► Az 1×1-es $[a]$ mátrix determinánsa $\det([a]) = a$, ugyanis a determináns definíciója szerint $\det([1]) = 1$, és $\det([a]) = \det([a \cdot 1]) = a\det([1]) = a$. A *D2.* és *D3.* feltételek teljesülnek, hisz e determinánsnak csak egy sora van. A jelölésbeli zavarok elkerülésére az 1×1-es $[a]$ mátrix determinánsára csak a $\det([a])$ vagy $\det(a)$ jelölést használjuk, mert $|a|$ az a abszolút értékét jelöli!

► Hamarosan igazolni fogjuk, hogy a fejezet elején említett

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

képlet illeszkedik e definícióhoz.

► A determináns tekinthető olyan n-változós függvénynek, melynek n argumentumába a mátrix n sorvektora kerül. Nem okoz félreértést, ha ezt a függvényt is det jelöli. Ha tehát $\mathbf{A}$ sorvektorai $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n$, akkor $\det(\mathbf{A})$ megegyezik a $\det(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n)$ függvényértékkel. Például a 3×3-as egységmátrix determinánsa az alábbi alakokba írható:

$$\det(\mathbf{I}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \det((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) = \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3),$$

ahol $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ a standard egységvektorokat jelöli. A determináns fenti definíciója könnyen fölírható e jelöléssel is (ld. 6.11. feladat).

Mikor 0 a determináns értéke Gyakran vízválasztó, hogy egy determináns értéke zérus-e.

6.2. TÉTEL (RÁNÉZÉSRE 0 DETERMINÁNSOK). *Ha egy mátrixnak van egy zérussora, akkor determinánsa* 0. *Ha egy mátrixnak van két azonos sora, akkor determinánsa* 0.

BIZONYÍTÁS. Ha egy mátrixnak van egy zérussora, akkor e sort bármely c számmal beszorozva e sor nem változik, így a determináns értéke sem. Másrészt a determináns definíciójának *D1.* pontja szerint a determináns értéke c-szeresére változik. E két feltétel csak úgy állhat fönn minden c skalárra, ha $\det(\mathbf{A}) = 0$. (Ennek következményeként a definíció *D1.* pontjában nem kell a $c = 0$ lehetőséget kizárni.)

Ha egy determinánsnak két azonos sora van, akkor *D3.* szerint értéke nem változik, ha az egyik sort a másikból kivonjuk, így egy zérussort kapunk, akkor pedig a determináns értéke 0. □

6.3. TÉTEL (ZÉRUS ÉRTÉKŰ DETERMINÁNS). *Legyen* $\mathbf{A}$ *négyzetes mátrix. A következő állítások ekvivalensek:*

1. $\det(\mathbf{A}) = 0$,
2. $\mathbf{A}$ *sorvektorai lineárisan összefüggők,*
3. $\mathbf{A}$ *szinguláris,*
4. *a homogén lineáris* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása.*

BIZONYÍTÁS. Az 5.20. tételben láttuk, hogy négyzetes mátrix sorvektorai pontosan akkor lineárisan összefüggők, ha a mátrix szinguláris, azaz ha a lépcsős alakra hozás során keletkezik egy 0-sor, ez pedig azzal ekvivalens, hogy a determináns értéke 0. Az utolsó állítás ekvivalenciája a mátrix invertálhatóságáról szóló 5.15. tétel közvetlen következménye. □

6.4. PÉLDA (ZÉRUS ÉRTÉKŰ DETERMINÁNSOK). *A sorvektorok lineáris* *összefüggőségének igazolásával mutassuk meg, hogy*

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

MEGOLDÁS. Az első determináns első sora a második és a harmadik összege. De fogalmazhatunk úgy is, hogy az első sorból kivonva a másodikat és a harmadikat, a nullvektort kapjuk. Tehát az első mátrix sorvektorai lineárisan összefüggők, így determinánsa 0.

A második determináns sorvektorainak összege a nullvektor, tehát ezek is lineárisan összefüggőek, így ez a determináns is 0. □

Az előző 6.3. tétel, valamit az 5.15. tétel fontos következménye a determinánsnak az egyenletrendszerek megoldhatóságával való kapcsolatáról szól:

6.5. TÉTEL (EGYENLETRENDSZER MEGOLDHATÓSÁGA ÉS A DETERMINÁNS). *Legyen* $\mathbf{A}$ *négyzetes mátrix. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

1. $\det \mathbf{A} \neq 0$,
2. *az* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *egyenletrendszer tetszőleges* $\mathbf{b}$*-re egyértelműen megoldható,*
3. *az* $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ *egyenletrendszernek csak triviális megoldása van.*

► A legegyszerűbb eseteket leszámítva a sorvektorok lineáris összefüggősége „ránézésre” nem látható, de az összefüggőséget bizonyító skalárok – ha szükségünk van rá – megkaphatók az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer nemtriviális megoldásaiból.

► A gyakorlatban – például mért vagy közelítő számítással kapott adatok esetén – annak eldöntése, hogy egy determináns nulla-e, nagy óvatosságot igényel! Az, hogy egy mátrix „közel szinguláris”, nem feltétlenül olvasható le abból, hogy a determináns értéke „közel van a nullához”. Például az

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix} = 1, \quad \text{és az} \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2^n}$$

determinánsok közül az első értéke tetszőlegesen nagy n-re is 1, pedig $\frac{1}{n}$ tetszőlegesen közel lehet 0-hoz, és az $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & n \end{smallmatrix}\right]$ mátrix már szinguláris. A második determinánsbeli $\frac{1}{2}\mathbf{I}_n$ mátrix nem szinguláris, pedig determinánsának értéke tetszőlegesen közel lehet 0-hoz, igaz, csak elegendően nagy n esetén.

► A véletlen valós mátrixok determinánsa 1 valószínűséggel nem 0, ha a mátrix elemeit valamely folytonos valószínűségeloszlás szerint választjuk. Másként fogalmazva, ha egy valós elemű mátrix determinánsa 0, akkor annak különleges oka van! Ez az ok, a sorvektorok közti lineáris kapcsolat, ami „igen ritkán” esik meg „véletlenül”.

A determináns értékének kiszámítása A determináns kiszámításához az elemi sorműveleteket fogjuk használni. A 6.1. definíció pontosan megmondja, hogyan változik a determináns értéke az elemi sorműveletek közben. Ha a lépcsős alakra hozás közben nem keletkezik zérussor, akkor a lépcsős alak háromszög alakú, illetve a redukált lépcsős alak diagonális. Ezek értékéről szól a következő tétel:

6.6. TÉTEL (HÁROMSZÖGMÁTRIX DETERMINÁNSA). *Az alsó vagy felső háromszögmátrix, s így a diagonális mátrix determinánsa megegyezik a főátlóbeli elemek szorzatával.*

BIZONYÍTÁS. Ha egy háromszögmátrix főátlójában van 0, akkor a redukált lépcsős alakra hozás után a főelemek száma kevesebb lesz, mint a sorok száma, azaz a mátrixban lesz egy zérussor, így determinánsának értéke 0. Ha nincs 0-elem a főátlóban, mind az alsó, mind a felső háromszögmátrix csak a hozzáadás sorműveletével – azaz a determináns értékének megváltoztatása nélkül – diagonálissá alakítható a főátlón kívüli elemek kiküszöbölésével, azaz

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ ? & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ? & ? & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & ? & \dots & ? \\ 0 & a_{22} & \dots & ? \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Egy diagonális mátrix determinánsában minden sorból kiemelve a főátlóban szereplő számot kapjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{D1}{=} a_{11}a_{22}\dots a_{nn} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn},$$

tehát a determináns értéke valóban a főátlóbeli elemek szorzata. □

Például az alábbi determináns értéke egyetlen sorcsere után azonnal leolvasható:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = -72$$

A determináns kézzel való kiszámításának módja tehát a következő: elemi sorműveletekkel hozzuk a determinánst olyan alakra, melynek vagy van egy zérussora, vagy háromszög alakú. Az elemi sorműveletek közben pedig gondosan adminisztráljuk hatásukat, azaz

- két sor cseréjekor szorozzuk meg a determinánst -1-gyel,
- egy sorának c-vel való szorzásakor pedig szorozzuk meg a determinánst $1/c$-vel.

A háttérben lényegében ezt teszik a számítógépek is (ld. a 6.4. kódot).

```
sage: M = matrix(3,range(9))
sage: M[2,2]=9
sage: M
[0 1 2]
[3 4 5]
[6 7 9]
sage: M.det()
-3
sage: det(M)
-3
```

6.4. kód: Determináns kiszámítása

6.7. PÉLDA (DETERMINÁNS KISZÁMÍTÁSA HÁROMSZÖG ALAKRA HOZÁSSAL). *Számítsuk ki a*

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \\ 4 & 5 & -6 \end{vmatrix} \quad \textit{és a} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

determinánsok értékét!

MEGOLDÁS. Elemi sorműveletekkel kapjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -4 \\ 4 & 5 & -6 \end{vmatrix} \overset{\substack{S_2-S_1 \\ S_3-2S_1}}{=} \begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{S_2\leftrightarrow S_3}{=} -\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-2) = 2.$$

A következő determinánsnál sorcsere nélkül eliminálhatók a főátló alatti elemek, ezért a sorműveleteket nem is jelezzük.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Egy érdekes észrevétel: a fenti determinánsban és sorlécsős alakjában is a Pascal-háromszög számai találhatók. Ez nem véletlen, erről szólnak a 6.15. és a 6.16. feladatok. □

Elemi mátrixok determinánsa Az elemi mátrixok egyetlen sorművelettel kaphatók az egységmátrixból, így ezek determinánsa könnyen számolható.

6.8. KÖVETKEZMÉNY (ELEMI MÁTRIXOK DETERMINÁNSA). *A hozzáadás sorműveletével kapott elemi mátrix determinánsa* 1, *a sorcserével kapotté* -1, *egy sor* c*-vel való szorzásával kapotté* c.

BIZONYÍTÁS. Az állítás abból következik, hogy az elemi mátrixok az 1 determinánsú egységmátrixból kaphatók egyetlen sorművelettel. □

Például:

$$\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&4&0&1\end{vmatrix}=1,\quad \begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\end{vmatrix}=-1,\quad \begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{vmatrix}=3.$$

Permutáló mátrix determinánsa[*] A permutáló mátrix minden sorában és oszlopában egyetlen 1-es van, így csak elemi sorcserékkel megkapható az egységmátrixból. A sorcsere csak a determináns előjelét változtatja meg, ezért permutáló mátrix determinánsa 1, ha páros sok sorcserére volt szükség, -1, ha páratlan sokra. Például az alábbi determinánsok közül az első determináns két sorcserével, a második három sorcserével kapható meg az egységmátrixból, tehát

$$\begin{vmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{vmatrix}=1,\quad \begin{vmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{vmatrix}=-1.$$

Azt mondjuk, hogy egy permutáló mátrix két sora *inverzióban* áll, ha az előbb álló sorbeli 1-es hátrébb van, mint a másik sorbeli. A

$$\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

mátrix inverzióinak száma például 4, ugyanis az első-második, első-negyedik, második-negyedik, harmadik-negyedik sorpárok inverzióban vannak.

6.9. TÉTEL (PERMUTÁLÓ MÁTRIX DETERMINÁNSA). *A permutáló mátrix determinánsa aszerint $+1$ vagy -1, hogy inverzióban álló sorpárjainak száma páros vagy páratlan.*

BIZONYÍTÁS. Elég megmutatni, hogy egy sorcsere mindig megváltoztatja az inverziók számának paritását, vagyis azok száma párosból páratlanra, páratlanból párosra változik. Így ha egy permutáló mátrix inverzióinak száma páros, akkor csak páros sok sorcserével vihető az identikus mátrixba. Hasonlóan, ha az inverziók száma páratlan, akkor csak páratlan sokkal.

Ha a két megcserélendő sor szomszédos, akkor a sorcsere megváltoztatja e két sor viszonyát: ha inverzióban álltak, akkor ezután nem fognak, és fordítva. Az előttük és mögöttük álló sorokhoz való viszonyuk nem változott. Eszerint az inverziók száma eggyel nőtt vagy eggyel csökkent, azaz paritása megváltozott.

Ezután cseréljük fel az i-edik és j-edik sorokat (legyen $i < j$). Az inverziók számának nyomon követése érdekében ezt szomszédos sorok cseréjével valósítjuk meg. Cseréljük ki az i-ediket az $(i+1)$-edikkel, majd azt az $(i+2)$-edikkel,..., míg az eredetileg i-edik sor a j-edik helyére nem kerül. Ehhez $j-i$ sorcserére van szükség. Ezután az eredetileg j-edik sort $j-i-1$ sorcserével az i-edik helyre visszük. Ez összesen $2(j-i)-1$, azaz páratlan sok szomszédos sor cseréje, ami a paritást valóban ellenkezőjére változtatja. □

Mátrixműveletek és determináns Kérdés, hogy milyen kapcsolat van a mátrixműveletek és a determináns között. Fontos megjegyezni, hogy a determinánsfüggvénynek *nincs* a mátrixösszeadásra és a skalárral való szorzásra nézve művelettartó tulajdonsága, azaz általában $\det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \neq \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$, és $\det(c\mathbf{A}) \neq c\det(\mathbf{A})$.

A skalárral való szorzás esetén mondható valami: mivel egy mátrix c-szeresének determinánsa minden sorából kiemelhető c, ez annyi kiemelést jelent, ahány sora van a mátrixnak. Így tetszőleges $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra és tetszőleges c skalárra $\det(c\mathbf{A}) = c^n \det(\mathbf{A})$. Ez az $\mathbb{R}^2$- vagy $\mathbb{R}^3$-beli geometriai interpretációból is világos: egy paralelogramma előjeles területe 4-szeresére, egy paralelepipedon előjeles térfogata 8-szorosára nő, ha minden élét 2-szeresére növeljük.

A determináns művelettartó a négyzetes mátrixok szorzására nézve. Ezt mondja ki a következő állítás.

6.10. ÁLLÍTÁS (DETERMINÁNSOK SZORZÁSSZABÁLYA). *Ha* $\mathbf{A}$ *és* $\mathbf{B}$ *azonos méretű négyzetes mátrixok, akkor* $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$.

BIZONYÍTÁS. A 6.8. tétel következtében egy elemi mátrixszal való balról szorzás egy mátrixon olyan sorműveletet hajt végre, mely determinánsát épp annyiszorosára változtatja, amennyi az elemi mátrix determinánsa. Így egy $\mathbf{E}$ elemi mátrix és egy tetszőleges négyzetes $\mathbf{B}$ mátrix szorzatának determinánsa megegyezik determinánsaik szorzatával, azaz

$$|\mathbf{EB}| = |\mathbf{E}|\,|\mathbf{B}|\,.$$

Tudjuk, hogy ha $\mathbf{A}$ szinguláris, akkor $\mathbf{AB}$ is, azaz ha $|\mathbf{A}| = 0$, akkor $|\mathbf{AB}|$ is 0, tehát $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|$. Ha $\mathbf{A}$ nem szinguláris, akkor felbontható elemi mátrixok szorzatára: $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\dots\mathbf{E}_k$, így $\mathbf{AB} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\dots\mathbf{E}_k\mathbf{B}$. A $|\mathbf{EB}| = |\mathbf{E}|\,|\mathbf{B}|$ összefüggést az $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\dots\mathbf{E}_k$-ra és $\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\dots\mathbf{E}_k\mathbf{B}$-re is használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| &= |\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3\dots\mathbf{E}_k|\,|\mathbf{B}|\\
&= |\mathbf{E}_1|\,|\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3\dots\mathbf{E}_k|\,|\mathbf{B}|\\
&= |\mathbf{E}_1|\,|\mathbf{E}_2|\,|\mathbf{E}_3\dots\mathbf{E}_k|\,|\mathbf{B}| = \dots =\\
&= |\mathbf{E}_1|\,|\mathbf{E}_2|\,|\mathbf{E}_3|\dots|\mathbf{E}_k|\,|\mathbf{B}|\,,\ \text{másrészt}\\
|\mathbf{AB}| &= |\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3\dots\mathbf{E}_k\mathbf{B}|\\
&= |\mathbf{E}_1|\,|\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3\dots\mathbf{E}_k\mathbf{B}|\\
&= |\mathbf{E}_1|\,|\mathbf{E}_2|\,|\mathbf{E}_3\dots\mathbf{E}_k\mathbf{B}| = \dots =\\
&= |\mathbf{E}_1|\,|\mathbf{E}_2|\,|\mathbf{E}_3|\dots|\mathbf{E}_k|\,|\mathbf{B}|\,,
\end{aligned}$$

ami bizonyítja az állítást. Egy másik, nagyon szép bizonyítás található a 6.12. feladatban. □

A determinánsok szorzásszabályának egy fontos alkalmazása a determináns értékének kiszámítása PLU-felbontással (ld. 6.5. kód).

```
sage: M = matrix(3,range(9))
sage: M[2,2]=9
sage: N=M.change_ring(RDF)
sage: N
[0.0 1.0 2.0]
[3.0 4.0 5.0]
[6.0 7.0 9.0]
sage: N.det()
-3.0
sage: P,L,U = N.LU()
sage: P
[0.0 0.0 1.0]
[1.0 0.0 0.0]
[0.0 1.0 0.0]
sage: U
[ 6.0  7.0  9.0]
[ 0.0  1.0  2.0]
[ 0.0  0.0 -0.5]
sage: P.det()
1.0
sage: U.det()
-3.0
```

6.5. kód: Determináns kiszámítása a PLU-felbontásból. A felbontás az egészek gyűrűjében nem működik, ezért gyűrűt váltunk és dupla pontosságú lebegőpontos számokkal számolunk (RDF).

6.11. PÉLDA (DETERMINÁNS KISZÁMOLÁSA PLU-FELBONTÁSBÓL). *Hogyan határozzuk meg egy* $\mathbf{A}$ *mátrix determinánsát, ha ismerjük PLU-felbontását? Konkrétan mennyi a következő mátrix determinánsa?*

$$\begin{bmatrix}0&1&2\\3&5&6\\4&7&9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3/4&-1/4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&7&9\\0&1&2\\0&0&-1/4\end{bmatrix}$$

MEGOLDÁS. Egy PLU-felbontásban szereplő mindegyik mátrix determinánsa könnyen meghatározható. $\mathbf{P}$ két sorcserével egységmátrixszá válik, tehát $\det\mathbf{P} = 1$. $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ háromszögmátrixok, amelyek determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata, ami $\mathbf{L}$ esetén mindig 1. A megadott konkrét esetben tehát $\det\mathbf{A} = 4\cdot 1\cdot(-1/4) = -1$. □

Mátrix determinánsa és transzponáltjának determinánsa megegyezik. Ez lehetővé teszi, hogy a determináns kiszámításához nem csak az elemi sor-, de az elemi oszlopműveleteket is használjuk, hisz egy mátrixon végzett oszlopművelet a transzponált sorművelete.

6.12. ÁLLÍTÁS (TRANSZPONÁLT DETERMINÁNSA). *Mátrix determinánsa megegyezik transzponáltjának determinánsával, azaz bármely négyzetes* $\mathbf{A}$ *mátrixra* $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^\mathsf{T})$.

BIZONYÍTÁS. Az $\mathbf{A}$ mátrix redukált lépcsős alakra hozásának mátrixszorzatos alakja legyen $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\dots\mathbf{E}_k\mathbf{R}$, ahol $\mathbf{E}_i$ elemi mátrix, $\mathbf{R}$ az $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja. A transzponált determinánsa

$$|\mathbf{A}^\mathsf{T}| = |\mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{E}_k^\mathsf{T}\dots\mathbf{E}_2^\mathsf{T}\mathbf{E}_1^\mathsf{T}| = |\mathbf{R}^\mathsf{T}||\mathbf{E}_k^\mathsf{T}|\dots|\mathbf{E}_2^\mathsf{T}||\mathbf{E}_1^\mathsf{T}|.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy minden elemi mátrix determinánsa megegyezik transzponáltjának determinánsával (ellenőrizzük!). Mivel $\mathbf{R}$

redukált lépcsős alak, ezért $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, vagy $\mathbf{R}$-nek van egy zérus sora. Ha $\mathbf{R} = \mathbf{I}$, akkor $|\mathbf{R}^\mathsf{T}| = |\mathbf{R}| = |\mathbf{I}| = 1$, ha pedig $\mathbf{R}$-nek van zérus sora, akkor $\mathbf{R}^\mathsf{T}$-nak zérus oszlopa, és egy ilyen mátrix nem alakítható elemi sorműveletekkel egységmátrixszá, tehát determinánsa 0. Azaz $|\mathbf{R}| = |\mathbf{R}^\mathsf{T}|$ ekkor is fönnáll. Ekkor pedig

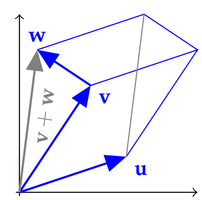
$$\begin{aligned}|\mathbf{A}^\mathsf{T}| &= |\mathbf{R}^\mathsf{T}||\mathbf{E}_k^\mathsf{T}|\dots|\mathbf{E}_2^\mathsf{T}||\mathbf{E}_1^\mathsf{T}| = |\mathbf{R}||\mathbf{E}_k|\dots|\mathbf{E}_2||\mathbf{E}_1|\\ &= |\mathbf{E}_1||\mathbf{E}_2|\dots|\mathbf{E}_k||\mathbf{R}| = |\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\dots\mathbf{E}_k\mathbf{R}| = |\mathbf{A}|.\end{aligned}$$

Tehát $|\mathbf{A}^\mathsf{T}| = |\mathbf{A}|$. □

6.13. PÉLDA (DETERMINÁNS KISZÁMÍTÁSA ELEMI OSZLOPMŰVELETEKKEL). *Az alábbi determinánst elemi sor- és oszlopműveletek alkalmazásával 2 lépésben is kiszámíthatjuk:*

$$\begin{vmatrix}1&0&0&1&0\\2&2&1&3&1\\1&1&1&1&0\\1&1&1&2&0\\1&1&1&2&1\end{vmatrix} \overset{S_2-S_5}{=} \begin{vmatrix}1&0&0&1&0\\1&1&0&1&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&2&0\\1&1&1&2&1\end{vmatrix} \overset{O_4-O_1}{=} \begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1\end{vmatrix} = 1$$

Determinánsok soronkénti additivitása A determinánsok egy fontos tulajdonságát a paralelogramma előjeles területével szemléltetünk. Tekintsük a síkban az $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ vektorokat, valamint az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ által, valamint az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{w}$ által kifeszített paralelogrammákat, ahogy azt a 6.6. ábra mutatja. Igazolható, de az ábráról is leolvasható, hogy (előjeles) területük összege megegyezik az $\mathbf{u}$ és a $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ vektorok által kifeszített paralelogramma (előjeles) területével. Az előjeles területet f-fel jelölve igaz tehát az $f(\mathbf{u},\mathbf{v}) + f(\mathbf{u},\mathbf{w}) = f(\mathbf{u},\mathbf{v}+\mathbf{w})$ összefüggés. Hasonlóképp igaz, hogy $f(\mathbf{u},\mathbf{v}) + f(\mathbf{w},\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}+\mathbf{w},\mathbf{v})$ bármely három $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ vektorra. Szavakban kifejezve f additív mindkét változójában.



6.6. ábra: Az $f(\mathbf{u},\mathbf{v}) + f(\mathbf{u},\mathbf{w}) = f(\mathbf{u},\mathbf{v}+\mathbf{w})$ összefüggés szemléltetése.

6.14. TÉTEL (SORONKÉNTI ADDITIVITÁS). *Legyen* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *és* $\mathbf{C}$ *három olyan mátrix, melyek i-edik sorukat kivéve megegyeznek egymással. A három mátrix i-edik sorvektora legyen rendre* $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ *és* $\mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i$. *Ekkor* $|\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| = |\mathbf{C}|$, *azaz*

$$\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\\\vdots\\\mathbf{a}_i\\\vdots\\\mathbf{a}_n\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\\\vdots\\\mathbf{b}_i\\\vdots\\\mathbf{a}_n\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\mathbf{a}_1\\\mathbf{a}_2\\\vdots\\\mathbf{a}_i+\mathbf{b}_i\\\vdots\\\mathbf{a}_n\end{vmatrix}$$

BIZONYÍTÁS. Ha az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorok lineárisan összefüggők, akkor $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| = |\mathbf{C}| = 0$, így a tétel állítása fönnáll. Ugyanez igaz akkor is, ha $\mathbf{a}_i$ és $\mathbf{b}_i$ is előáll a fenti vektorok lineáris kombinációjaként, mert akkor összegük is előáll, és így ismét mindhárom determináns 0. Feltesszük tehát, hogy $\mathbf{a}_i$ és $\mathbf{b}_i$ legalább egyike független a többi sorvektortól. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy $\mathbf{a}_i$ független a többi sorvektortól, vagyis $\mathbf{A}$ sorvektorai függetlenek, így bázist alkotnak. Ekkor $\mathbf{b}_i$ előáll lineáris kombinációjukként:

$$\mathbf{b}_i = b_1\mathbf{a}_1 + b_2\mathbf{a}_2 + \dots + b_i\mathbf{a}_i + \dots + b_n\mathbf{a}_n.$$

Vonjuk ki a $|\mathbf{B}|$ determináns i-edik sorából a $b_k\mathbf{a}_k$ sorokat, ahol $k = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n$. E műveletek közben a determináns értéke nem változik, és az i-edik sorban csak a $b_i\mathbf{a}_i$ vektor marad. Ezután emeljük ki az i-edik sorból a b_i konstanst, kapjuk, hogy $|\mathbf{B}| = b_i|\mathbf{A}|$. A $\mathbf{C}$ mátrixszal is megismételjük e műveleteket, csak ott a végén az i-edik sorban az $(1 + b_i)\mathbf{a}_i$ vektor marad, így kapjuk, hogy $|\mathbf{C}| = (1 + b_i)|\mathbf{A}|$. Innen pedig

$$|\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + b_i|\mathbf{A}| = (1 + b_i)|\mathbf{A}| = |\mathbf{C}|,$$

és ezzel kész a bizonyítás. □

► Az előbbi tételt használva a determinánsok második soraira, a determinánsok kiszámítása nélkül is látjuk, hogy

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 9 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 6 \end{vmatrix}.$$

► A tétel indukcióval kettőnél több sorra is igazolható, így például a következő egyenlőség is igaz:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 9 & 8 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 9 & 8 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 9 & 8 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 6 \\ 9 & 8 & 6 \end{vmatrix}.$$

► A tételbeli képletet fordított irányban is használni fogjuk, nevezetesen egy determináns fölbontható több determináns összegére. Például:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 9 & 0 \end{vmatrix}.$$

mivel $(1, 2, 3) = (1, 0, 0) + (0, 2, 0) + (0, 0, 3)$.

► Mivel a transzponálás nem változtat a determináns értékén, e tétel sorvektorok helyett oszlopvektorokra is kimondható.

► E tétel a determináns definíciójának *D1.* feltételével együtt azt mondja, hogy a determináns olyan függvénye bármelyik sorának (a többi sor rögzítése mellett), mely megőrzi a lineáris kombinációt. Ezen azt értjük, hogy ha egy determináns i-edig sorvektora egyenlő a $c\mathbf{x}+d\mathbf{y}$ vektorral, akkor a determináns felbontható a következő képlet szerint:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i-1} \\ c\mathbf{x}+d\mathbf{y} \\ \mathbf{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i-1} \\ \mathbf{x} \\ \mathbf{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{i-1} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}.$$

E tulajdonsággal rendelkező függvényeket *lineárisaknak* fogjuk nevezni, azokat a többváltozós függvényeket pedig, amelyek minden változójukban lineárisak, *multilineárisaknak*. Tehát a determináns, mint n-változós függvény multilineáris, ugyanis bármely i-re ($i=1,2,\dots,n$):

$$\begin{aligned} &\det(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{i-1},c\mathbf{x}+d\mathbf{y},\mathbf{a}_{i+1},\dots,\mathbf{a}_n) \\ &= c\det(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{i-1},\mathbf{x},\mathbf{a}_{i+1},\dots,\mathbf{a}_n) + d\det(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_{i-1},\mathbf{y},\mathbf{a}_{i+1},\dots,\mathbf{a}_n). \end{aligned}$$

Feladatok

6.1.• Melyek igazak az alábbi állítások közül? (Az $\mathbf{A}$ itt mindig négyzetes mátrixot jelöl.)

1. Ha egy determináns értéke 0, akkor van két azonos sora.
2. Ha egy determináns értéke nem 0, akkor oszlopvektorai lineárisan függetlenek.
3. Ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása, akkor $|\mathbf{A}| \neq 0$.
4. $|\mathbf{A}| \neq 0$ pontosan akkor igaz, ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer nem oldható meg.
5. $|\mathbf{A}| = 0$ pontosan akkor igaz, ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer egyértelműen megoldható.

6.2.♥ Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét fejben!

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ *c)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ *e)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ *f)* $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 1 & 5 & 4 \\ 6 & 5 & 6 & 0 \end{vmatrix}$

6.3.♥ Mutassuk meg – lineáris összefüggőséget keresve a sorok közt –, hogy az alábbi determinánsok értéke 0.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ *c)* $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ *e)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ *f)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}$ *h)* $\begin{vmatrix} \ln 10 & \ln 4 & \ln 40 \\ \ln 5 & \ln 4 & \ln 20 \\ \ln 2 & 0 & \ln 2 \end{vmatrix}$

6.4.♥ Fölhasználva, hogy

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -2.$$

számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét:

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & c+f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ *d)* $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} a & 3b & c \\ d & 3e & f \\ g & 3h & i \end{vmatrix}$ *f)* $\begin{vmatrix} a & b & c+a \\ d & e & f+d \\ g & h & i+g \end{vmatrix}$

g) $\begin{vmatrix} 2a & 3b & c+a \\ 2d & 3e & f+d \\ 2g & 3h & i+g \end{vmatrix}$ *h)* $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3d & 3e & 3f \\ g+4a & h+4b & i+4c \end{vmatrix}$

6.5.♥ Legyen $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ két 3×3-as mátrix, és legyen $\det(\mathbf{A}) = 5$, $\det(\mathbf{B}) = 4$. Számítsuk ki a következő determinánsok értékét!

a) $\det(\mathbf{A}^2)$ *b)* $\det(2\mathbf{A})$ *c)* $\det((2\mathbf{A})^2)$
d) $\det(\mathbf{A}^{-1})$ *e)* $\det(5\mathbf{A}^{-1})$ *f)* $\det((5\mathbf{A})^{-1})$
g) $\det(\mathbf{AB}^{-1})$ *h)* $\det(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{B})$ *i)* $|\mathbf{A}^{-1}||\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}||\mathbf{B}|$

6.6.♥ Csak sorcserék segítségével hozzuk egyszerűbb alakra (például háromszögalakra) az alábbi determinánsokat, és így számítsuk ki értéküket:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 6 & 8 \\ 4 & 7 & 9 & 2 \end{vmatrix}$ *e)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ *g)* $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

6.7.♥ Számítsuk ki elemi sorműveletekkel az alábbi determinánsokat!

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 8 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ *d)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

6.8. MELLÉKÁTLÓBAN EGYESEK Hány sor áll inverzióban abban a mátrixban, melynek mellékátlójában egyesek, egyebütt nullák állnak, és mennyi ennek determinánsa?

6.9.★ Számítsuk ki elemi sorműveletekkel az alábbi n-edrendű determinánsokat!

a) $\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & a & \dots & a^{n-2} \\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \dots & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a & a^2 & a^3 & \dots & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ c & a & b & \dots & b \\ c & c & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \dots & a \end{vmatrix}$

6.10. ■ Számítsuk ki a Petersen-gráf szomszédsági mátrixának (ld. **??** feladat) determinánsát!

6.11. • Írjuk fel a determináns definícióját oly módon, hogy det egy n-változós, n-dimenziós vektorokon értelmezett skalár értékű függvény legyen.

6.12. Adjunk új bizonyítást a determinánsok szorzásszabályára azt igazolva, hogy az $\mathbf{A} \mapsto \det(\mathbf{AB}) / \det(\mathbf{B})$ leképezés eleget tesz a determináns definíciójában kirótt feltételeknek.

6.13. ★ Bizonyítsuk be az LU-felbontás fölhasználásával a transzponált determinánsára vonatkozó 6.12. állítást.

6.14. Fejezzük ki az elemi mátrixokra használt jelöléseket használva ($\mathbf{E}_{S_i+cS_j}$, $\mathbf{E}_{S_i \leftrightarrow S_j}$, $\mathbf{E}_{cS_i}$) azok determinánsát!

6.15. Számítsuk ki a 6.7. példa Pascal-háromszöget tartalmazó

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

determinánsának értékét úgy, hogy az első oszlop főátló alatti elemeinek kinullázásához először vonjuk ki az utolsó előtti sort az utolsóból, majd a második sort a harmadikból, végül az elsőt a másodikból, és kövessük e módszert a többi főátló alatti elemre is.

6.16. ★ Számítsuk ki az

$$\left| \binom{i+j-2}{j-1} \right|_{n\times n} = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \dots & \binom{n-1}{n-1} \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{n}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n}{1} & \dots & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix}$$

determináns értékét! (Útmutatás: az utolsó sorral kezdve mindegyik sorból vonjuk ki az előzőt!)

6.17. Mutassuk meg, hogy egy legalább 3-adrendű determináns értéke 0, ha elemei sorfolytonosan olvasva számtani sorozatot adnak. Például

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

6.18. Mutassuk meg, hogy egy legalább 3-adrendű determináns értéke 0, ha minden sora számtani sorozat, például

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

6.19. Mutassuk meg, hogy ha egy determináns elemei sorfolytonosan olvasva mértani sorozatot alkotnak, akkor értéke 0. Például

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 4 \\ 8 & 16 & 32 \end{vmatrix} = 0.$$

6.20. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b, c és d valósokra

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

6.21. • Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{C}$ invertálható, akkor $\det(\mathbf{CAC}^{-1}) = \det(\mathbf{A})$ tetszőleges azonos méretű $\mathbf{A}$ mátrixra fennáll.

6.22. • VEKTOROK DETERMINÁNSA MÁSIK BÁZISBANIgazoljuk, hogy ha $\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ az áttérés mátrixa, akkor a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_n$ vektorok $\mathcal{B}$- és $\mathcal{C}$-beli koordinátás alakjaiból képzett $\mathbf{V}_\mathcal{B}$ és $\mathbf{V}_\mathcal{C}$ mátrixok determinánsára $|\mathbf{V}_\mathcal{C}| = |\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}||\mathbf{V}_\mathcal{B}|$.

6.23. • Igazoljuk, hogy páratlan rendű ferdén szimmetrikus mátrix determinánsa 0.

6.24. • MÁTRIX NÉGYZETÉNEK DETERMINÁNSA Igazoljuk, hogy bármely négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixra $|\mathbf{A}^2| = |\mathbf{AA}^\mathsf{T}|$.

6.25. A determináns négyzetének kiszámításával (6.24. feladat) és a determinánsok szorzástételének alkalmazásával számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ b & -a & -d & c & f & -e & h & -g \\ c & d & -a & -b & g & -h & -e & f \\ d & -c & b & -a & h & g & -f & -e \\ e & -f & -g & -h & -a & b & c & d \\ f & e & h & -g & -b & -a & d & -c \\ g & -h & e & f & -c & -d & -a & b \\ h & g & -f & e & -d & c & -b & -a \end{vmatrix}.$$

6.26. Mutassuk meg, hogy az $(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2)$ szorzat előállítható két szám négyzetének összegeként, azaz

$$(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) = (z_1^2 + z_2^2),$$

ahol z_1 és z_2 mindegyike külön az x_i és külön az y_i változóknak is lineáris kifejezése ($i = 1, 2$). (Hasonló összefüggések bizonyíthatóak négy illetve nyolc négyzetszám összegéről is. Például a négy szám négyzetösszegére vonatkozó képlet

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2) = (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2),$$

ahol z_i az x_i és az y_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ változókban lineáris. A megoldáshoz használjuk fel az előző feladat állítását.)

6.27. TÉGLALAP KÉPÉNEK TERÜLETE Legyen egy téglalap négy csúcsa (p, q), $(p + x, q)$, $(p, q + y)$, $(p + x, q + y)$, ahol $x, y > 0$. Tehát a téglalap oldalhossza x és y, területe xy. Mekkora lesz a területe annak a síkidomnak, mely e téglalapból keletkezik az $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ mátrixú lineáris transzformáció hatására.

6.28.* ORIENTÁCIÓ Azt mondjuk, hogy $\mathbb{R}^n$ két bázisa azonos orientációjú, ha az egyiket a másikba vivő lineáris transzformáció determinánsa pozitív. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^n$ bázisain az „azonos orientációjú” reláció ekvivalencia reláció, amely így az összes bázist két osztályba sorolja.

A determináns mint elemeinek függvénye

A determinánst eddig sorvektorainak függvényeként kezeltük, a következőkben elemeinek függvényeként fogjuk. Ehhez két olyan módszerrel fogunk megismerkedni, melyekben a determináns kiszámítását egyszerűbb determinánsok kiszámítására vezetjük vissza.

Eddig nagyvonalúan bántunk a determináns elemeinek mibenlétével. Annyit feltételeztünk róluk kimondatlanul, hogy azonos algebrai struktúrából valók, és az összeadás, kivonás, szorzás és osztás elvégezhető köztük. Az elemi sorműveletek elvégzéséhez épp e négy műveletre volt szükség. E szakaszban ki fog derülni, hogy a determináns kiszámolható osztás nélkül is. Ennek következménye például, hogy egészelemű mátrix determinánsa egész szám, akkor is, ha számolás közben racionálisokba botlunk.[1]

[1] Általánosan fogalmazva: nem csak testek pl. a valós $\mathbb{R}$, a racionális $\mathbb{Q}$, a komplex $\mathbb{C}$ számtestek vagy a véges $\mathbb{F}_q$ testek elemeiből álló determinánst számolhatunk ki az adott struktúrán belül, hanem pl. az egészek $\mathbb{Z}$ gyűrűjének vagy a polinomok gyűrűjének elemeiből képzett determinánsokat is. További részletekért lásd a függelék *A* szakaszát.

Kígyók determinánsa A 2×2-es determináns kiszámítására ismerjük azt a formulát, amely a determináns értékét a determináns elemeinek függvényében írja fel: $\det\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] = ad - bc$. Itt tehát csak az összeadásra, kivonásra és a szorzásra van szükség. Hasonló formulát keresünk az n-edrendű determinánsokra. Ehhez az ún. *kígyókat* – más nevén *transzverzálisokat* – használjuk. A kígyók a diagonális mátrixok sorainak permutációjával származtatott mátrixok, azaz minden $\mathbf{K}$ kígyó felírható $\mathbf{K} = \mathbf{P}\operatorname{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ alakban, ahol $\mathbf{P}$ egy permutáló mátrix. Ezt a *kígyóhoz tartozó permutáló mátrixnak* fogjuk nevezni. Mivel $\mathbf{P}$ determinánsa 1 vagy -1, ezért $|\mathbf{K}| = a_1 a_2 \dots a_n$ vagy $|\mathbf{K}| = -a_1 a_2 \dots a_n$.

A determinánsok soronkénti linearitását használva érdekes felbontását kapjuk a determinánsnak. Tekintsük példaként az

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

determinánst. Első sorvektorának $(a, b, c) = (a, 0, 0) + (0, b, 0) + (0, 0, c)$ felbontását fölhasználva bontsuk fel a determinánst három determináns összegére:

$$\begin{vmatrix} a+0+0 & 0+b+0 & 0+0+c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Ezután folytassuk e felbontást a második sorvektorral, így már az eredeti determinánst 9 determináns összegére bontottuk. Végül tegyük ugyanezt az utolsó sorral is. Az így kapott 27 determinánst nem írjuk föl, de szemléltetésül egy sematikus ábrán megmutatjuk a felbontás lépéseit (6.7 ábra). Tömör négyzet jelöli azokat a helyeket, ahol megtartjuk a determináns eredeti elemét, üres kör azokat, ahová zérust írunk. A 27 determináns mindegyikének minden sorában egy elem az eredeti determinánsból való, a többi zérus. Közöttük azonban csak 6 kígyó van. A többinek van zérus oszlopa, így azok értéke 0, vagyis az eredeti determinánst 6 kígyó összegére bontottuk (a 0 értékű determinánsokat szürke színnel jeleztük).

Hasonló módon bármely n-edrendű determináns fölbomlik n^n olyan determináns összegére, melynek minden sorában egyetlen elem az eredeti determinánsból való, a többi 0, de ezek közül csak azok lesznek kígyók determinánsai, melyek minden oszlopában is van egy elem az eredetiből. (Ezeket nevezzük a mátrixból/determinánsból kiválasztható kígyóknak.) Ezek száma $n!$, mert az első sorból n-féleképp választhatunk egy elemet, a második sorból minden esetben már csak $n-1$-féleképp,..., és ez összesen $n(n-1)\dots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$ eset. Igaz tehát a következő állítás:

6.15. ÁLLÍTÁS (FELBONTÁS KÍGYÓK DETERMINÁNSAINAK ÖSSZEGÉRE). *Minden n-edrendű determináns fölbomlik az összes belőle kiválasztható kígyó determinánsának összegére. Jelölje $d_{j_1 j_2 \dots j_n}$ annak a permutáló mátrixnak a determinánsát, mely az a_{1j_1}, a_{2j_2}, ..., a_{nj_n} elemekből álló kígyóhoz tartozik (ennek értéke 1 vagy -1). Ekkor*

$$\det([a_{ij}]) = \sum d_{j_1 j_2 \dots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

ahol az összegzés az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz összes lehetséges $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ permutációján végigfut.

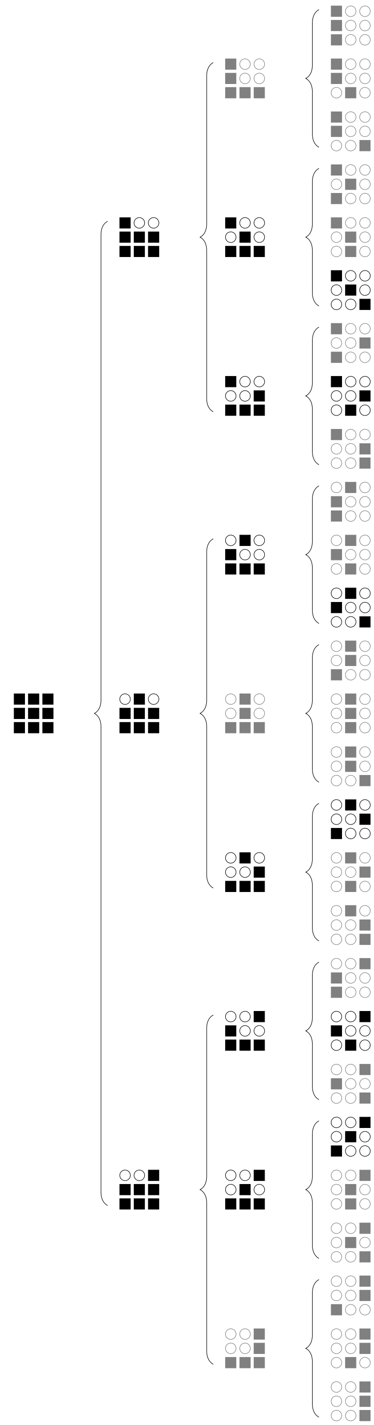
► Az $n!$ az n növekedtével rendkívül gyorsan nő (pl. $10! = 3628800$, $20! = 2432902008176640000$), determináns ilyen módon való számítása viszonylag kis rend esetén már számítógéppel sem lehetséges emberi idő alatt. E felbontást a determinánsok tulajdonságainak vizsgálatában használjuk.

► Kivételt csak az $n=2$ és $n=3$ eset képez, kézzel való számításban is praktikusak:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} = ad - bc,$$

mivel a második determináns egyetlen sorcserével hozható diagonális alakra. $n = 3$ esetén – felhasználva a 6.7 ábrát is – kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & h & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & f \\ g & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & e & 0 \\ g & 0 & 0 \end{vmatrix}\\ &= aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg \\ &= aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg\end{aligned}$$



6.7. ábra: Egy 3×3-as determináns felbontása 3^3 determináns összegére, melyek közül $3! = 6$ darabot kivéve mindegyikben van egy zérusoszlop – ezek sematikus ábráját szürke szín jelöli.

► E két formula könnyen megjegyezhető egy egyszerű szabállyal, amelyet az $n = 2$ és $n = 3$ esetben *Sarrus-szabálynak* is neveznek: a főátló irányú szorzatok összegéből vonjuk ki a mellékátló irányú szorzatokat. (Hogy mit értsünk főátló és mellékátló irányú szorzaton, a 6.8. és a 6.9. ábrákról megérthető.) Fontos, hogy hasonló szabály $n > 3$ esetén már *nem érvényes* (ld. a 6.33. feladatot)!

A determináns 6.15. tételbeli felbontása a determináns értékét a determináns elemeinek függvényeként állítja elő. Ennek sok szép és fontos következménye van.

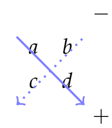
6.16. KÖVETKEZMÉNY (DETERMINÁNSFÜGGVÉNY LÉTEZÉSE). *A determinánsfüggvény létezik, és egyértelmű.*

BIZONYÍTÁS. Elég megmutatni, hogy a kígyók determinánsainak összegével definiált determinánsfogalom eleget tesz a determináns definíciójában kirótt feltételeknek. Ez azonnal látszik, hisz azokat elég csak kígyókra ellenőrizni. Ezt az Olvasóra hagyjuk. □

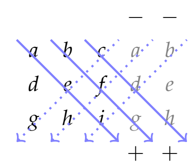
Íme további két fontos következménye a kígyókra bontásnak:

► Egy algebrai következmény: a determináns kiszámolásához elég csak az összeadás és szorzás művelete, az osztásra, melyet az elemi sorműveletek során használhatunk, nincs szükség. Eszerint egész számokból álló determináns értéke egész szám.

► Egy függvényanalízis körébe tartozó következmény: a determináns értéke folytonos függvénye elemeinek. Eszerint bármely kis pozitív ε-hoz van olyan $\delta > 0$ szám, hogy ha a determináns bármely eleme legföljebb δ értékkel megváltozik, akkor a determináns értéke legföljebb ε-nyit változik. Sőt, mivel a determináns kifejtésében csak az összeadás és a szorzás művelete szerepel, a determináns differenciálható függvénye elemeinek.

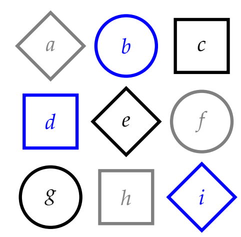


(a) $ad - bc$



(b) $aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$

6.8. ábra: Az *(a)* másod- és a *(b)* harmadrendű determináns kiszámítása: a főátló irányú szorzatok összegéből vonjuk ki a mellékátló irányú szorzatokat. Harmadrendű esetben kezdetben könnyíthetünk magunknak a determináns első két oszlopának a determináns utáni megismétlésével.



6.9. ábra: A harmadrendű determináns kiszámítására egy – IQ-tesztek típuskérdésére emlékeztető – másik módszer: az egyforma alakúak szorzatának összegéből ki kell vonni az egyforma színűek szorzatait.

*A determináns definíciója kígyókkal** A determináns definícióját kiterjesztjük a kígyók összegére való bontásra vonatkozó állítást használva. Így a determináns fogalma nem csak algebrai testek, de gyűrűk fölött is értelmezhető (ld. az A fejezetben).

6.17. DEFINÍCIÓ (DETERMINÁNS). *Legyen R egy tetszőleges egységelemes kommutatív gyűrű és legyen $\mathbf{A} \in R^{n\times n}$. Ekkor $\mathbf{A}$ determinánsán az*

$$\sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{I(\sigma)} a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \dots a_{n,\sigma(n)},$$

ahol S_n az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz összes permutációját jelöli, és egy $\sigma \in S_n$ permutációra $I(\sigma)$ a σ inverzióinak számát.

6.18. PÉLDA (POLINOMOK DETERMINÁNSA). *Határozzuk meg x^4 és x^3*

együtthatóját az alábbi determinánsban!

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x & 2 \\ 0 & 1 & x & x \\ x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

MEGOLDÁS. x^4 csak egyetlen kígyóból kapható (a 0-k helyét üresen hagytuk):

$$\begin{vmatrix} & & x & \\ & & & x \\ x & & & \\ & x & & \end{vmatrix}.$$

Az inverziók száma 4, azaz páros, tehát e determináns értéke x^4. Két kígyóban szerepel x^3:

$$\begin{vmatrix} & & & 2 \\ & & x & \\ x & & & \\ & x & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & x & \\ & & & x \\ & x & & \\ 1 & & & \end{vmatrix}.$$

Az inverziók száma mindkét determinánsban páratlan, tehát ennek értéke $-3x^3$. (Hasonlóképp folytatva kapjuk, hogy a determináns értéke: $x^4 - 3x^3 + x^2 + 4x - 1$.) □

Előjeles aldetermináns Ha az első sor elemeit kiemeljük a 3×3-as determinánst kifejtő képletből, érdekes sejtést fogalmazhatunk meg:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg \\ &= a(ei - fh) - b(fg - di) + c(dh - eg) \\ &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Mielőtt ezt megtennénk, némi előkészítés következik.

6.19. DEFINÍCIÓ (ELŐJELES ALDETERMINÁNS). *Az n-edrendű $|\mathbf{A}|$ determináns i-edik sorának és j-edik oszlopának elhagyásával kapott $(n-1)$-edrendű determináns $(-1)^{i+j}$-szeresét az $|\mathbf{A}|$ determináns a_{ij} eleméhez tartozó* előjeles aldeterminánsának *nevezzük.*

Az előjeles aldeterminánshoz kiszámítandó előjel a mátrixon sakktáblaszerűen változik, azaz a bal felső sarokban $+$, és két egymás melletti vagy alatti mezőben ellenkező előjelű. Ezt nevezik *sakktáblaszabálynak*.

+	−	+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+	−	+
+	−	+	−	+	−	+	−
−	+	−	+	−	+	−	+

6.10. ábra: Sakktáblaszabály: a $(-1)^{i+j}$ előjele a bal felső sarokban, vagyis az első sor első oszlopában $+$, él mentén szomszédos mezőkben pedig ellentétes.

6.20. PÉLDA (ELŐJELES ALDETERMINÁNS). *Számítsuk ki az*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 9 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

determináns második sor harmadik eleméhez tartozó előjeles aldeterminánsát!

MEGOLDÁS. A determináns második sorát és harmadik oszlopát kiemeltük

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 9 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Az ezek elhagyása után megmaradó aldetermináns és -1 megfelelő hatványának szorzata, vagyis a kért előjeles aldetermináns

$$(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot 6 = -6.$$

Tehát a determináns második sor harmadik eleméhez tartozó előjeles aldeterminánsa -6. □

6.21. ÁLLÍTÁS (DETERMINÁNS RENDJÉNEK CSÖKKENTÉSE). *Tegyük fel, hogy az n-edrendű $|\mathbf{A}|$ determináns a_{ij} elemének sorában vagy oszlopában minden további elem 0. Jelölje A_{ij} az a_{ij} elemhez tartozó előjeles aldeterminánst. Ekkor*

$$|\mathbf{A}| = a_{ij} A_{ij}.$$

BIZONYÍTÁS. Legyen az $|\mathbf{A}|$ determináns i-edik sorában az a_{ij}-n kívül minden elem 0 (hasonlóan tárgyalható, ha a j-edik oszlopban vannak nullák). Cseréljük ki a j-edik oszlopot a $(j-1)$-edikkel, majd ezt a $(j-2)$-edikkel..., addig, míg az $\mathbf{A}_{*j}$ oszlop az első oszlopba nem kerül. Ez $j-1$ oszlopcserét jelent, azaz a determináns értéke $(-1)^{j-1}$-szeresére változik. Ezután hasonlóképp vigyük az i-edik sort szomszédos sorok cseréjével az első sorba. Ehhez $i-1$ csere szükséges, miközben a determináns értéke $(-1)^{i-1}$-szeresére változik.

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix}
&= (-1)^{j-1}
\begin{vmatrix}
a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{ij} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix} \\
&= (-1)^{i-1}(-1)^{j-1}
\begin{vmatrix}
a_{ij} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix} \\
&\overset{*}{=} (-1)^{i+j} a_{ij}
\begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix} \\
&\overset{**}{=} (-1)^{i+j} a_{ij}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}
\end{vmatrix} \\
&= a_{ij} A_{ij}.
\end{aligned}
$$

Az *-os egyenlőségnél kihasználtuk, hogy $i+j-2$ és $i+j$ paritása azonos, tehát -1 kitevőjeként is azonos eredményt adnak, továbbá kiemeltük a_{ij}-t az első sorból. A **-os egyenlőség előtt álló determináns kiszámításához csak a másodiktól lefelé lévő sorokat kell használni, a végeredményt az első oszlop elemei nem befolyásolják, így az első sor és első oszlop elhagyásával kapott determináns értéke ugyanaz. Végül az így kapott determináns az előjellel együtt épp A_{ij}, és ezzel bizonyítottuk az állítást. □

6.22. példa (Determináns rendjének csökkentése). *A determináns rendjének csökkentésével számítsuk ki az alábbi determináns értékét!*

$$
\begin{vmatrix}
1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\
1 & 2 & 0 & 8 & 4 \\
6 & 0 & 0 & 7 & 0 \\
8 & 9 & 8 & 7 & 6 \\
5 & 4 & 0 & 3 & 2
\end{vmatrix}.
$$

MEGOLDÁS. Minden lépésben – esetleg egy apró átalakítás után – találunk egy sort vagy oszlopot, melyben csak egy nemnulla szám áll, így a determináns könnyen számolható:

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 8 & 4 \\ 6 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 8 & 9 & \boxed{8} & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} &= (-1)^{4+3} \cdot 8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 8 & 4 \\ 6 & 0 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\
(S_2 - S_1) \qquad &= (-8) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (-8) \cdot (-1)^{2+3} \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \boxed{6} & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (-8) \cdot (-5) \cdot (-1)^{2+1} \cdot 6 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (-8) \cdot (-5) \cdot (-6) \cdot (-12) \\
&= 2880.
\end{aligned}
$$

□

Determináns kifejtése Ritkán adódik, hogy a determináns rendje az előző (6.21.) állítás segítségével csökkenthető, viszont fölhasználásával a determinánsok egy gyönyörű kifejtési tételét kapjuk.

E kifejtési tételt egyes könyvek *Laplace-féle kifejtési tételnek* nevezik, míg más könyvek csak ennek egy – a feladatok közt megtalálható – általánosítását hívják így, sok könyv pedig e tételbeli összefüggéssel definiálja a determinánst.

6.23. TÉTEL (DETERMINÁNSOK KIFEJTÉSI TÉTELE). *Egy determináns értéke megkapható úgy, hogy egy tetszőleges sorának vagy oszlopának minden elemét beszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánssal, és e szorzatokat összeadjuk. Képletben, az n-edrendű $|\mathbf{A}|$ determináns értéke i-edik sora szerint kifejtve*

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik},$$

és j-edik oszlopa szerint kifejtve

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}.$$

BIZONYÍTÁS. Hasonlóan a korábbiakban látottakhoz, az i-edik sorvektor felbontásával a determinánst n olyan determináns összegére bontjuk, amelyek i-edik sorában csak egy elem származik az eredeti determinánsból, a többi 0. Az egyszerűség kedvéért e felbontást csak $n = 3$ és $i = 2$ esetére írjuk fel, de tetszőleges n-re ugyanígy megy. Ezután a 6.21. állítást alkalmazzuk mindegyik új determinánsra:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\
&= \sum_{k=1}^{3} a_{2k}A_{2k}.
\end{aligned}$$

A bizonyítás ugyanígy megy az oszlopokra is, amit példaként az $n = 3$, $j = 3$ esettel szemléltetünk:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \\
&= \sum_{k=1}^{3} a_{k3}A_{k3}.
\end{aligned}$$

□

6.24. PÉLDA (KIFEJTÉSI TÉTEL). *Számítsuk ki az alábbi determináns értékét a kifejtési tételt használva!*

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

MEGOLDÁS. Érdemes e determinánst a harmadik oszlopa szerint kifejteni, mert ott két 0 is van, így a velük megszorzott aldeterminánsokat le sem kell írni.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1.$$

□

Vandermonde-determináns Bemutatunk egy fontos determinánst. Számtalan alkalmazása van, melyek egyike a polinominterpoláció.

6.25. PÉLDA (INTERPOLÁCIÓ MÁSODFOKÚ POLINOMOKRA). *Legyen x, y és z három különböző valós, a, b és c három tetszőleges valós. Mutassuk meg, hogy egyetlen olyan legföljebb másodfokú f polinom létezik, melyre $f(x) = a$, $f(y) = b$ és $f(z) = c$.*

MEGOLDÁS. Legyen $f : x \mapsto p + qx + rx^2$, ahol p, q és r a polinom ismeretlen együtthatói. Az $f(x) = a$, $f(y) = b$ és $f(z) = c$ egyenlőségek a következő egyenletrendszerre vezetnek:

$$\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Ez az egyenletrendszer a 6.5. tétel szerint pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha az együtthatómátrix determinánsa nem 0. Oszlopműveletekkel kezdjük az átalakítást:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \overset{O_3 - xO_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 1 & y & y^2 - xy \\ 1 & z & z^2 - xz \end{vmatrix} \overset{O_2 - xO_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & y - x & y^2 - xy \\ 1 & z - x & z^2 - xz \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} y - x & y^2 - xy \\ z - x & z^2 - xz \end{vmatrix} = (y - x) \begin{vmatrix} 1 & y \\ z - x & z^2 - xz \end{vmatrix} = (y - x)(z - x) \begin{vmatrix} 1 & y \\ 1 & z \end{vmatrix}$$
$$= (y - x)(z - x)(z - y)$$

Mivel x, y és z három különböző valós, ezért a determináns értéke nem 0, tehát az egyenletrendszer egyértelműen megoldható, vagyis egyetlen olyan polinom létezik, mely a feltételeket teljesíti. □

E probléma, és a benne szereplő determináns általánosítása a következő definícióhoz vezet:

6.26. DEFINÍCIÓ (VANDERMONDE-DETERMINÁNS). *Az $x_1, x_2, \dots x_n$ számokhoz tartozó* Vandermonde-determinánson *a*

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \tag{6.1}$$

determinánst vagy ennek

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

transzponáltját értjük. A hozzá tartozó mátrixot Vandermonde-mátrixnak *nevezzük.*

Mivel egy determináns értéke megegyezik transzponáltjának értékével, ezért a definícióbeli két determináns értéke is azonos, így mindegy melyik alakot használjuk.

6.27. TÉTEL (VANDERMONDE-DETERMINÁNS ÉRTÉKE). *Az x_1, x_2,… x_n ($n > 1$) számokhoz tartozó Vandermonde-determináns értéke megegyezik az olyan $(x_j - x_i)$ alakú különbségek szorzatával, ahol $i < j$, azaz*

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i<j}(x_j - x_i).$$

BIZONYÍTÁS. A determináns utolsó oszlopával kezdve minden oszlopból vonjuk ki az előző oszlop x_1-szeresét.

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1x_2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1x_n & \dots & x_n^{n-1} - x_1x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

ami az első sora szerinti kifejtés, majd minden sorból kiemelve az első oszlopbeli elemet, a következő alakra vezet:

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1x_2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1x_n & \dots & x_n^{n-1} - x_1x_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1)V_{n-1}(x_2, \dots, x_n) \\ &= V_{n-1}(x_2, \dots, x_n)\prod_{1<j}(x_j - x_1). \end{aligned}$$

Eredményül egy rekurzív képletet kaptunk, melyet önmagába helyettesítve, és a $V_2(x_{n-1}, x_n) = x_n - x_{n-1}$ képletet is fölhasználva a tételbeli összefüggésre jutunk. □

Cramer-szabály és a mátrix inverze Eddig akár az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldására, akár az $\mathbf{A}$ mátrix inverzének kiszámítására olyan módszert használtunk, mely az elemi sorműveletek használatával csak egy algoritmust ad a számításokra, de nem adja meg a kapcsolatot (képletet) az adatok és a kiszámítandók közt. E paragrafusban ezt pótoljuk!

Jelölje $\mathbf{A}_{i,\mathbf{b}}$ azt a mátrixot, melyet akkor kapunk, ha az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik oszlopának helyére a $\mathbf{b}$ vektort írjuk. Kifejtve

$$\mathbf{A}_{i,\mathbf{b}} = [\mathbf{a}_{*1} \ \dots \ \mathbf{a}_{*,i-1} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a}_{*,i+1} \ \dots \ \mathbf{a}_{*n}].$$

E jelöléssel $\mathbf{I}_{i,\mathbf{x}}$ mátrixon az $[\mathbf{e}_{*1} \ \dots \ \mathbf{e}_{*,i-1} \ \mathbf{x} \ \mathbf{e}_{*,i+1} \ \dots \ \mathbf{e}_{*n}]$ mátrixot értjük.

6.28. TÉTEL (CRAMER-SZABÁLY). *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy* $n \times n$*-es mátrix. Az* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha* $\det \mathbf{A} \neq 0$. *Ekkor a megoldás:*

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_{i,\mathbf{b}}}{\det \mathbf{A}}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Gabriel Cramer (1704–1752) genfi születésű svájci matematikus, akinek az algebrai görbékről szóló „Introduction à l'analyse des lignes courbes algébraique" című, 1750-ben publikált munkájában szerepelt a ma Cramer-szabály néven ismert tétel. A szabályt korábban már mások is ismerték.

BIZONYÍTÁS. Az állítás első felét már bizonyítottuk a 6.5. tételben. Ebből felhasználjuk, hogy mivel az egyenletrendszer megoldható, $\det \mathbf{A} \neq 0$. Kihasználva, hogy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, továbbá hogy $\mathbf{Ae}_i = \mathbf{a}_{*i}$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mathbf{AI}_{i,\mathbf{x}} &= \mathbf{A}[\mathbf{e}_{*1} \ \dots \ \mathbf{e}_{*,i-1} \ \mathbf{x} \ \mathbf{e}_{*,i+1} \ \dots \ \mathbf{e}_{*n}] \\
&= [\mathbf{Ae}_{*1} \ \dots \ \mathbf{Ae}_{*,i-1} \ \mathbf{Ax} \ \mathbf{Ae}_{*,i+1} \ \dots \ \mathbf{Ae}_{*n}] \\
&= [\mathbf{a}_{*1} \ \dots \ \mathbf{a}_{*,i-1} \ \mathbf{b} \ \mathbf{a}_{*,i+1} \ \dots \ \mathbf{a}_{*n}] \\
&= \mathbf{A}_{i,\mathbf{b}}
\end{aligned}$$

Mivel az $\mathbf{I}_{i,\mathbf{x}}$ mátrix i-edik sorának és oszlopának elhagyása után egy identikus mátrix marad, ezért az i-edik sora szerint kifejtve

$$\det \mathbf{I}_{i,\mathbf{x}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & x_1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n & \dots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{i+i} x_i = x_i.$$

Így a determinánsok szorzási szabályát is használva $\det(\mathbf{AI}_{i,\mathbf{x}}) = \det \mathbf{A}_{i,\mathbf{b}}$, amiből $x_i \det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}_{i,\mathbf{b}}$, azaz $x_i = \det \mathbf{A}_{i,\mathbf{b}} / \det \mathbf{A}$. □

6.29. PÉLDA (CRAMER-SZABÁLY). *Oldjuk meg az*

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 4 \\ 5x + 3y &= 6 \end{aligned}$$

egyenletrendszert a Cramer-szabállyal!

MEGOLDÁS. A kiszámolandó determinánsok a $\mathbf{b} = \left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 6 \end{smallmatrix}\right]$ jelöléssel:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -19, \quad |\mathbf{A}_{1,\mathbf{b}}| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -18, \quad |\mathbf{A}_{2,\mathbf{b}}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -8.$$

Innen $x = \frac{-18}{-19} = \frac{18}{19}$, $y = \frac{-8}{-19} = \frac{8}{19}$. □

Ha egyenletrendszert meg tudunk oldani, akkor szimultán egyenletrendszert is, és így pl. az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ megoldásával a mátrix inverzét is ki tudjuk számítani. Az $\mathbf{x}_{ij}$ elem kiszámításához az $\mathbf{Ax}_{*j} = \mathbf{e}_j$ egyenletrendszert kell megoldani. A megoldás i-edik koordinátája az $\mathbf{x}_{ij}$ elem. A Cramer-szabály szerint

$$\mathbf{x}_{ij} = \frac{\det \mathbf{A}_{i,\mathbf{e}_j}}{\det \mathbf{A}}$$

Mivel az $\mathbf{A}_{i,\mathbf{e}_j}$ mátrix i-edik oszlopában csak egy elem nem 0, a kifejtési tétel szerint

$$\det \mathbf{A}_{i,\mathbf{e}_j} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & 1 & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = A_{ji},$$

vagyis e determináns megegyezik az $\mathbf{A}$ egy előjeles aldeterminánsával, tehát

$$\mathbf{x}_{ij} = \frac{\det \mathbf{A}_{i,\mathbf{e}_j}}{\det \mathbf{A}} = \frac{\det \mathbf{A}_{ji}}{\det \mathbf{A}}.$$

Mint látjuk, az $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$ előállításához az $\mathbf{A}$ előjeles aldeterminánsai mátrixának transzponáltjára van szükség. E mátrixot az $\mathbf{A}$ *klasszikus adjungáltjának* nevezzük és $\operatorname{adj}(\mathbf{A})$-val jelöljük. A klasszikus jelzőre azért van szükség, mert az adjungált szót komplex elemű mátrix konjugált transzponáltjára is használjuk, és ez félreértésekhez vezethet. Képletben tehát

$$\operatorname{adj} \mathbf{A} = [A_{ij}]^{\mathsf{T}} = [A_{ji}]. \tag{6.2}$$

Így a következő tételt kapjuk:

6.30. TÉTEL (MÁTRIX INVERZÉNEK ELEMEI). *Tegyük fel, hogy* $\mathbf{A}$ *egy invertálható mátrix. Ekkor inverzének ij indexű eleme az* a_{ji} *elemhez tartozó előjeles aldetermináns és az* $\mathbf{A}$ *mátrix determinánsának hányadosa, azaz*

$$[\mathbf{A}^{-1}]_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det \mathbf{A}}.$$

Így az inverz mátrix az

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}[A_{ij}]^{\mathsf{T}} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \operatorname{adj} \mathbf{A}. \tag{6.3}$$

alakba írható.

► Könnyen ellenőrizhető, hogy az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ mátrix klasszikus adjungáltja

$$\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix},$$

így inverze

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \operatorname{adj} \mathbf{A} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

► A mátrix inverzének e kifejezése azt mutatja, hogy az inverz mátrix minden eleme folytonos függvénye a mátrix minden elemének minden olyan helyen, ahol az inverz létezik, egy ilyen helyen és annak valamely környezetében a determináns nem 0.
► Az előző megjegyzésből az is következik, hogy egy n-ismeretlenes n egyenletből álló egyenletrendszer megoldásvektorának minden koordinátája folytonos függvénye az egyenletrendszer együtthatóinak és a jobb oldalán álló vektor koordinátáinak, hisz a megoldás az inverzzel való szorzással megkapható.
► Egészelemű mátrix inverze pontosan akkor egészelemű, ha determinánsa 1 vagy -1. Ez abból adódik, hogy $\det(\mathbf{A})\det(\mathbf{A}^{-1}) = \det \mathbf{I} = 1$, tehát ha $|\det \mathbf{A}| \neq 1$, akkor $\det(\mathbf{A}^{-1})$ nem egész szám, tehát $\mathbf{A}^{-1}$ nem lehet egészelemű, ha pedig $|\det \mathbf{A}| = 1$, akkor a (6.3) képlet szerint $\mathbf{A}^{-1}$ minden eleme egész szám.
► A tételbeli képlet könnyen kiterjeszthető szinguláris mátrixokra is, vagyis amikor a determináns 0, ugyanis

$$\mathbf{A} \operatorname{adj} \mathbf{A} = \det(\mathbf{A})\mathbf{I} \tag{6.4}$$

minden négyzetes mátrixra fennáll (ld. a 6.46. feladatot).

6.31. PÉLDA (MÁTRIX INVERZE). *Számítsuk ki a szemléltetés céljából csupa különböző elemet tartalmazó*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

mátrix inverzét!

MEGOLDÁS. Az $\operatorname{adj} \mathbf{A}$ determinánst olyan alakba írjuk föl, ahonnan látszik minden elem kiszámításának módja. Szürke színnel szedjük az elhagyandó elemeket:

$$\operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

$$= \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 5 & -8 & 4 \\ -4 & 6 & -3 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$

Mivel $\det\mathbf{A} = -1$, ezért

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{A}}\operatorname{adj}\mathbf{A} = -\begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 5 & -8 & 4 \\ -4 & 6 & -3 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} -3 & -5 & 4 \\ 3 & 8 & -6 \\ -1 & -4 & 3 \end{bmatrix} \qquad \square$$

Már ezekből az egyszerű példákból is látszik, hogy mátrix invertálása e módszerrel igen műveletigényes. Valóban, gyakorlati számításokhoz nem használjuk, elméleti okfejtésekben vesszük nagy hasznát.

*Blokkmátrixok determinánsa** Az $\mathbf{M} = \left[\begin{smallmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{smallmatrix}\right]$ mátrix általában még négyzetes részmátrixok esetén sem számítható az $\mathbf{AD} - \mathbf{BC}$ képlettel (ld. a **??** feladatban)! Először egy speciális, de fontos esettel kezdjük.

6.32. TÉTEL (DETERMINÁNSOK SZORZATA BLOKKMÁTRIXBAN). *Legyenek* $\mathbf{A}$ *és* $\mathbf{D}$ *négyzetes mátrixok. Ekkor*

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}||\mathbf{D}|.$$

BIZONYÍTÁS. Megmutatjuk, hogy minden olyan kígyó, melynek nincs eleme a $\mathbf{O}$-mátrixból, egy $\mathbf{A}$-beli és egy $\mathbf{D}$-beli kígyó szorzata. Ehhez elég megmutatni, hogy ha egy kígyónak van eleme a $\mathbf{B}$, illetve a $\mathbf{C}$ mátrixból, akkor az $\mathbf{O}$-ból is. Valóban, ha pl. $\mathbf{B}$ egy eleme benne van egy kígyóban, akkor oszlopában nincs elem $\mathbf{D}$-ben, így $\mathbf{D}$-ben marad egy sor is üresen, amelyet csak egy $\mathbf{O}$-beli elem foghat le. Ellenőrizni kell még, hogy az $\mathbf{A}$- és $\mathbf{D}$-beli kígyók előjeleinek szorzata megegyezik-e az egyesítésükkel kapott kígyó előjelével. Ez nyilván igaz, hisz egy $\mathbf{A}$-t és egy $\mathbf{D}$-t metsző sor nem lehet inverzióban, így az egyesített kígyó inverzióinak száma megegyezik a két kígyó inverzióinak összegével, az előjelet pedig a -1-nek az inverziók számára emelt hatványa adja.□

6.33. TÉTEL (2×2-ES BLOKKMÁTRIX DETERMINÁNSA). *Legyen*

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{A}$ *és* $\mathbf{D}$ *négyzetes mátrixok.*

1. *Ha* $|\mathbf{A}| \neq 0$, *akkor* $|\mathbf{M}| = |\mathbf{A}||\mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}|$.
2. *Ha* $|\mathbf{D}| \neq 0$, *akkor* $|\mathbf{M}| = |\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}||\mathbf{D}|$.

BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{A}$ invertálható, akkor $\mathbf{M}$ alábbi alsó és felső blokkháromszögmátrix szorzatára való bontása segít:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Az utóbbi három mátrix közül a szélsők determinánsa 1, a középsőé pedig a bizonyítandó kifejezés. Az

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

felbontás bizonyítja a második összefüggést. □

Feladatok

6.29. Melyek igazak az alábbi állítások közül? (Az $\mathbf{A}$ itt mindig négyzetes mátrixot jelöl.)

1. A determináns folytonos függvénye minden elemének.
2. A determináns differenciálható függvénye minden elemének.
3. Ha egy determináns minden eleme racionális szám, akkor értéke is racionális.
4. Ha egy determináns minden sorában és minden oszlopában pontosan egy elem nem 0, akkor a determináns értéke nem 0.
5. Ha egy mátrix két kígyó összege, akkor determinánsa is két kígyó determinánsának összege.
6. Ha $i + j$ páratlan szám, akkor az előjeles A_{ij} aldetermináns negatív.
7. Ha egy determináns minden eleme pozitív, akkor értéke nem lehet negatív.
8. Mátrix inverze folytonos függvénye minden elemének.

Felbontás kígyók determinánsainak összegére

6.30. Válasszuk ki az alábbi determinánsokból az összes nemnulla determinánsú kígyót, és ezek segítségével számítsuk ki a determináns értékét!

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

6.31. Anélkül, hogy kiszámolnánk az értékét, mutassuk meg, hogy az alábbi determináns osztható 30-cal:

$$\begin{vmatrix} 24 & 40 & 68 \\ 27 & 15 & 31 \\ 51 & 55 & 53 \end{vmatrix}$$

6.32. Az alábbi – lottótippekből álló – determináns elemeinek csak a paritását vizsgálva minden számolás nélkül igazoljuk, hogy

$$\begin{vmatrix} 12 & 25 & 28 & 44 & 56 \\ 21 & 34 & 54 & 68 & 80 \\ 10 & 40 & 52 & 69 & 72 \\ 24 & 36 & 53 & 56 & 84 \\ 18 & 24 & 28 & 58 & 87 \end{vmatrix} \neq 0.$$

6.33. A 4-edrendű determinánsok $4! = 24$ kígyó determinánsának összegére bonthatók. Soroljuk fel közülük azt a 12 darabot, melyet elemei szorzata után -1-gyel kell szorozni! (A Sarrus-szabály 4-edrendű determinánsra csak 8 kígyóból állna, ezért nem használható!)

Kifejtési tétel

6.34. Tudjuk, hogy 504, 747 és 855 egyaránt oszthatók 9-cel. Ezt fölhasználva, a determináns értékének kiszámítása nélkül mutassuk meg, hogy az alábbi determináns osztható 9-cel:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 7 \\ 8 & 5 & 5 \end{vmatrix}.$$

6.35. Konstruáljunk olyan nemnulla értékű determinánst, melynek van olyan eleme, amelyet tetszőlegesen változtatva a determináns értéke nem változik.

6.36.* LAPLACE-FÉLE KIFEJTÉSI TÉTEL ÁLTALÁNOSÍTÁSA Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ és $J = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ az $N = \{1, 2, \dots, n\}$ halmaz k-elemű részhalmazai és legyen $\bar{I} = N \setminus I$, illetve $\bar{J} = N \setminus J$. Jelölje $A_{I,J}$ az I-be eső indexű sorok és a J-be eső indexű oszlopok kereszteződésében lévő elemek determinánsát. Ekkor

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \sum_J (-1)^{\sum I + \sum J} A_{I,J} A_{\bar{I},\bar{J}} \\ &= \sum_I (-1)^{\sum I + \sum J} A_{I,J} A_{\bar{I},\bar{J}}, \end{aligned}$$

ahol $\sum I = i_1 + i_2 + \ldots + i_k$.

6.37. Számítsuk ki az alábbi determinánst az első és harmadik sor, majd a második és negyedik oszlop szerint a Laplace-féle kifejtési tétel általánosítása segítségével.

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Blokkdeterminánsok

6.38. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét kihasználva blokkstruktúrájukat!

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Speciális mátrixok determinánsa

6.39. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét!

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 8 & -1 & -8 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 9 & -27 & 81 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d+e & d^2+e^2 & d^3+e^3 \end{vmatrix}$

6.40. Bizonyítsuk be, hogy

$$D = \begin{vmatrix} p^2 & p & 1 & qrs \\ q^2 & q & 1 & prs \\ r^2 & r & 1 & pqs \\ s^2 & s & 1 & pqr \end{vmatrix} = (p-q)(p-r)(p-s)(q-r)(q-s)(r-s).$$

6.41. Igazoljuk, hogy az $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ képletekkel definiált Fibonacci-sorozat n-edik eleme egyenlő az alábbi $n \times n$-es tridiagonális determinánssal:

$$a_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

6.42. Legyen

$$P_n = \begin{vmatrix} a_n & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_{n-1} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{n-2} & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_1 \end{vmatrix}$$

Mutassuk meg, hogy

$$\frac{P_k}{P_{k-1}} = a_k + \cfrac{1}{a_{k-1} + \cfrac{1}{a_{k-2} + \cfrac{1}{\ddots \; \cfrac{}{a_2 + \cfrac{1}{a_1}}}}}.$$

Vegyes feladatok

6.43. Elérhető-e egyetlen elem megváltoztatásával, hogy egy tetszőleges $n \times n$-es nem szinguláris mátrix determinánsa 0-vá váljon?

6.44. Ferde kifejtés Vegyük egy determináns egy sorának elemeit, és szorozzuk meg mindegyiket egy másik sor azonos oszlopbeli eleméhez tartozó előjeles aldeterminánsával, majd képezzük ezek összegét. Ez mindig 0. Hasonló állítás igaz a determináns minden oszlopára is. Tehát az i-edik és u-adik sorra ($i \neq u$) és a j-edik és v-edik oszlopra ($j \neq v$):

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{uk} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kv} = 0.$$

6.45. Foglaljuk egyetlen állításba a kifejtési és a ferde kifejtési tételeket!

6.46. Mátrix inverze a kifejtési tételekkel A kifejtési és a ferde kifejtési (ld. az előző és a 6.44. feladatokat) segítségével adjunk új bizonyítást a mátrix inverzére vonatkozó (6.3) formulátra!

6.47. Legyen $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ $n+1$ darab különböző valós, $y_0, y_1, \dots, y_n$ ugyanannyi tetszőleges valós. Mutassuk meg, hogy egyetlen olyan legföljebb n-edfokú p polinom van, melyre $p(x_i) = y_i$ minden $i = 0, \dots, n$ esetén.

Cramer-szabály és mátrix inverze

6.48.♥ Oldjuk meg Cramer-szabállyal az alábbi egyenletrendszereket!

a) $\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - 2y &= 4 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x - y - z &= 4 \\ 3x + 4y - 2z &= 11 \\ 3x - 2y + 4z &= 11 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x + 2y + 4z &= 31 \\ 5x + y + 2z &= 29 \\ 3x - y + z &= 10 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x + y \phantom{{}+ z + w} &= 1 \\ x + 2y + z \phantom{{}+ w} &= 2 \\ y + 2z + w &= 3 \\ z + 2w &= 4 \end{aligned}$

6.49.♥ Határozzuk meg a megadott mátrixok inverzének megadott indexű elemét!

a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $a_{23} = ?$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $a_{24} = ?$

6.50.♥ Határozzuk meg a megadott mátrixok inverzét a klasszikus adjungált kiszámolásával:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -7 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ $(abc \neq 0)$ *f)* $\begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *h)* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6.51. Igazoljuk, hogy tetszőleges négyzetes mátrixra $\mathbf{A}\,\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})\mathbf{I}$.

*Véges testek fölötti mátrixok determinánsa**

6.52. A determináns kiszámításának megismert technikái véges testek fölött is működnek. Számítsuk ki az alábbi – a megadott test fölött értelmezett – mátrixok determinánsát!

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_5$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbb{F}_{11}$

6.53. **Véletlen bitmátrix determinánsa** Számítsuk ki $\mathbb{F}_2$ fölötti véletlen mátrixok determinánsát! Egy $\mathbb{F}_2^{5\times 5}$-beli mátrix determinánsa mekkora valószínűséggel 0? Kísérletezzünk számítógéppel, majd válaszoljuk meg a kérdést pontosan.

Projekt: a vektori szorzás általánosítása

6.54. Bizonyított tény, hogy nem lehet olyan bináris vektorműveletet definiálni az n-dimenziós tér vektorain ($n > 3$), mely eredményül ugyanannak a térnek egy vektorát adja és rendelkezik a vektori szorzás műveleti tulajdonságaival. E feladatsorban egy másik irányú általánosítást dolgozunk fel, mely nem a bináris műveleti tulajdonságokat, hanem az eredménynek a vektorokra való merőlegességét tarja meg.

a) Fogalmazzuk meg, hogy mit kapunk eredményül, ha a vektori szorzásra vonatkozó formális

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \mathbf{i} \\ a_2 & b_2 & \mathbf{j} \\ a_3 & b_3 & \mathbf{k} \end{vmatrix}$$

összefüggést 2×2-es vagy 4×4-es formális determinánsokra írjuk föl, vagyis mit ad eredményül az

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} \end{vmatrix} \quad \text{és az} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{vmatrix}$$

kifejezés?

b) Igazoljuk, hogy az n-dimenziós

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \\ \mathbf{a}_2 &= (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_{n-1} &= (a_{n-1,1}, a_{n-1,2}, \dots, a_{n-1,n}) \end{aligned}$$

vektorok által kifeszített $n-1$-dimenziós paralelepipedon térfogata megegyezik az

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_n \end{vmatrix}$$

vektor abszolút értékével.

c) Ha a fentiek alapján általánosított képlettel $n-1$ darab n-dimenziós vektorhoz egy n-ediket rendelünk, akkor mit mondhatunk az így kapott n vektor körüljárásáról?

6.55. Határozzuk meg azt a vektort, mely merőleges az $(1,1,1,1)$, $(1,2,2,2)$, $(1,2,3,3)$ vektorokra, hossza megegyezik a három vektor által kifeszített paralelepipedon térfogatával, és e három vektor mellé negyediknek véve velük jobbrendszert alkot.

Megoldások

6.1. 1. Hamis. 2. Igaz. 3. Hamis. 4. Hamis. Az $|\mathbf{A}| \neq 0$ azzal ekvivalens, hogy az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer nem oldható meg egyértelműen, vagyis vagy nem oldható meg, vagy több megoldása is van. 5. Hamis.

6.2.

a) -2.

b) 0, mert van 0-sora.

c) 0, mert van két azonos sora.

d) 0, mert a második sor az első konstansszorosa.

e) 1, mert háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

f) 6, mert háromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

g) 0, mert van két azonos oszlopa.

6.3.

a) a második sor az első -1-szerese.

b) a harmadik sor egyenlő az első kettő összegével.

c) a harmadik sor egyenlő az első kettő összegével.

d) a második sor az első és a harmadik számtani közepe (másként: a harmadik sorból kivonva a másodikat, majd a másodikból az elsőt, mindkétszer az $(1,1,1)$ vektort kapjuk, azaz így van két azonos sor).

e) a második sor az első és a harmadik számtani közepe.

f) a három sorvektor összege a zérusvektor.

g) $\sin(\xi+\delta) = \sin\xi\cos\delta + \cos\xi\sin\delta$, így a harmadik oszlop az első és a második oszlop lineáris kombinációja, vagyis az oszlopvektorok lineárisan összefüggőek, tehát a determináns értéke 0.

h) Az első és második oszlop összege a harmadik oszlop (ill. az első és a második sor különbsége a harmadik sor), tehát az oszlopvektorok (ill. sorvektorok) lineárisan összefüggőek.

6.5. *a)* 25, *b)* 40, *c)* 1600, *d)* $1/5$, *e)* 25, *f)* $1/625$, *g)* $5/4$, *h)* 20, *i)* 1.

6.6.

a) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$

b) Az 1. és 2., azután az 1. és 3., végül az 1. és 5. sorokat felcserélve:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -120.$$

c) $-1, -1, 1$.

d) 24.

e) 24.

f) Az első sort cseréljük fel az utolsóval, a másodikat az utolsó előttivel, …, így $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ sorcserét hajtottunk végre, tehát a determináns értéke $(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}$ (itt $\lfloor . \rfloor$ az egészrész-függvényt jelöli). Ennek értéke 1, ha $n = 4k$ vagy $n = 4k+1$, és -1, ha $n = 4k+2$ vagy $n = 4k+3$ valamilyen k természetes számra. Más alakban kapjuk meg az eredményt, ha csak szomszédos sorokat cserélünk: először az első sort visszük (szomszédos sorok cseréjével) az utolsóba, majd az eredeti determináns második sorát az utolsó előttibe, …, azaz az alábbi sorpárok cseréjét hajtjuk végre:
$(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$,…, $(n-1,n)$,
$(1,2)$, $(2,3)$,…, $(n-2,n-1)$,
…
$(1,2)$, $(2,3)$,
$(1,2)$.
Ez összesen $(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 = \frac{n(n-1)}{2}$ sorcsere. Minden sorcserével (-1)-szeresére változik a determináns értéke, így a végeredmény $(-1)^{n(n-1)/2}$. Természetesen e hatvány értéke is akkor 1, ha $n = 4k$ vagy $4k+1$, és akkor -1, ha $n = 4k+2$ vagy $4k+3$. (Ugyanilyen gondolatmenettel kimutatható, hogy ha egy determináns mellékátlója felett csupa 0 áll, akkor a determináns értéke a mellékátlóbeli elemek szorzatának $(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}$-szerese vagy más alakban $(-1)^{n(n-1)/2}$-szerese.)

g) ld. az előző pontot.

6.7.

a) Az első sort kivonjuk a másodikból és a harmadikból, majd a másodikat a harmadikból:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

b) Az első sort kivonva a többi sorból, majd a második sor kétszeresét kivonva a harmadikból, kapjuk, hogy

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&2&4&6\\0&3&6&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&0&0\\0&3&6&9\end{vmatrix}=0.$$

c) $\begin{vmatrix}3&8&6&3\\1&2&0&1\\1&1&-1&2\\2&5&1&5\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&0&1\\3&8&6&3\\1&1&-1&2\\2&5&1&5\end{vmatrix}=$
$-\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&2&6&0\\0&-1&-1&1\\0&1&1&3\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&1&3&0\\0&-1&-1&1\\0&1&1&3\end{vmatrix}=$
$-2\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&1&3&0\\0&0&2&1\\0&0&-2&3\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&1&3&0\\0&0&2&1\\0&0&0&4\end{vmatrix}=-16$. Részletezzük a megoldás lépéseit:

1. lépés: Cseréljük ki az első és második sort, hogy az első sor első eleme 1 legyen, s így ne kelljen törtekkel számolni. A determináns értéke (-1)-szeresére változik.

2. lépés: Az első sor (-3)-, (-1)- ill. (-2)-szeresét adjuk a második, harmadik ill. negyedik sorhoz.

3. lépés: Hogy a második sor második eleme is 1 legyen, emeljünk ki 2-t a második sorból.

4. lépés: A második sort ill. (-1)-szeresét adjuk a harmadik ill. negyedik sorhoz.

5. lépés: Adjuk a harmadik sort a negyedikhez. A determináns értéke -16.

d) 144.

6.8. E mátrixban bármely két sor inverzióban áll egymással, így ha a sorok száma n, a sorpároké $n(n-1)/2$. Eszerint e mátrix determinánsa $(-1)^{n(n-1)/2}$. (Az egységmátrix $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ sorcserével is megkapható e mátrixból, így determinánsát $(-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$ alakban is ki lehet fejezni, ld. még a 6.6. feladatban).

6.9.

a) $n=1$ esetén $1+x_1y_1$, $n=2$ esetén $x_1y_1+x_2y_2-x_1y_2-x_2y_1$ a determináns értéke. Ha $n\geq 3$, akkor a determináns értéke 0. Ezt úgy bizonyítjuk, hogy először a determinánst két determináns összegére bontjuk, majd mindkettőről belátjuk, hogy értékük 0. Az első determináns csupa 1-esből álló első sorát kivonjuk az összes többi sorból, az így kapott determináns értéke pedig valóban 0, hisz ha $x_2=0$, akkor a második sor csupa 0-ból áll, ha pedig $x_2\neq 0$, akkor a második sorának x_3/x_2-szerese egyenlő a harmadik sorral. A második determináns értéke is 0, hiszen ha $x_1=0$, akkor az első sor csupa 0-ból áll, ha pedig $x_1\neq 0$, akkor az első sor x_i/x_1-szeresét kivonva az i-edik sorból egy olyan determinánst kapunk, amelyben a második sortól kezdve minden sor 1-esekből áll, tehát a determinánsnak van két azonos sora.

$$\begin{vmatrix}1&1&\dots&1\\1+x_2y_1&1+x_2y_2&\dots&1+x_2y_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1+x_ny_1&1+x_ny_2&\dots&1+x_ny_n\end{vmatrix}$$
$$+\begin{vmatrix}x_1y_1&x_1y_2&\dots&x_1y_n\\1+x_2y_1&1+x_2y_2&\dots&1+x_2y_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1+x_ny_1&1+x_ny_2&\dots&1+x_ny_n\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}1&1&\dots&1\\x_2y_1&x_2y_2&\dots&x_2y_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_ny_1&x_ny_2&\dots&x_ny_n\end{vmatrix}$$
$$+\begin{vmatrix}x_1y_1&x_1y_2&\dots&x_1y_n\\1&1&\dots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\dots&1\end{vmatrix}$$
$$=0.$$

b) $(1-a^n)^{n-1}$. Vonjuk ki az első sor a^{n-1}-szeresét a második sorból, a^{n-2}-szeresét a harmadik sorból, …, a-szorosát az utolsó sorból: így a főátló alatt csak nullák lesznek.

c) $(a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$. Első megoldás: adjunk minden sort az elsőhöz, emeljük ki a közös $a+(n-1)b$ értéket, majd e sor b-szeresét vonjuk ki minden sorból. Másik megoldás: az utolsó sorral kezdve mindegyik sorból vonjuk ki a fölötte lévőt, majd jobbról kezdve mindegyik oszlopot adjuk a megelőzőhöz.

6.10. Az eredmény 48. Megoldás Sage-ben:

```
g = graphs.PetersenGraph()
G = matrix(g)
G.det()
```

6.13. Az $\mathbf{A}$ előáll $\mathbf{PLU}$ alakban, ahol $\mathbf{P}$ permutáló mátrix, $\mathbf{L}$ alsó, $\mathbf{U}$ felső háromszögmátrix. Az $\mathbf{L}$ és az $\mathbf{U}$ háromszögmátrixok, így determinánsuk megegyezik transzponáltjuk determinánsával, hisz a főátlóbeli elemek helyben maradnak a transzponálás során. A $\mathbf{P}$ permutáló mátrix determinánsa 1 vagy -1, transzponáltja pedig megegyezik inverzével, így $\det(\mathbf{I})=\det(\mathbf{PP}^\mathsf{T})=\det(\mathbf{P})\det(\mathbf{P}^\mathsf{T})=1$, azaz $\mathbf{P}$ és $\mathbf{P}^{-1}$ egyszerre 1 vagy -1, tehát megegyeznek. Végül $\det(\mathbf{A})=\det(\mathbf{PLU})=\det(\mathbf{P})\det(\mathbf{L})\det(\mathbf{U})$, és $\det(\mathbf{A}^\mathsf{T})=$

$\det((\mathbf{PLU})^\mathsf{T}) = \det(\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{L}^\mathsf{T}\mathbf{P}^\mathsf{T}) = \det(\mathbf{U})\det(\mathbf{L})\det(\mathbf{P})$ összevetése bizonyítja az állítást.

6.14. $\det(\mathbf{E}_{S_i+cS_j}) = 1$, $\det(\mathbf{E}_{S_i\leftrightarrow S_j}) = -1$, $\det(\mathbf{E}_{cS_i}) = c$.

6.15.

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\1&4&10&20\end{vmatrix} \overset{S_4-S_3}{=} \begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\0&1&4&10\end{vmatrix}$$

$$\overset{S_3-S_2}{=} \begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\0&1&3&6\\0&1&4&10\end{vmatrix} \overset{S_2-S_1}{=} \begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&1&3&6\\0&1&4&10\end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{S_4-S_3\\S_3-S_2}}{=} \begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&1&4\end{vmatrix} \overset{S_4-S_3}{=} \begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{vmatrix} = 1.$$

Ld. még a 6.16. feladatot!

6.16. Felhasználva, hogy $\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{k-1}$, elvégezve az ajánlott sor-, majd oszlopműveleteket, majd azt megismételve az egyre kisebb bal alsó részdeterminánssal kapjuk, hogy

$$D = \begin{vmatrix}1&0&0&\dots&0\\1&\binom{1}{0}&\binom{2}{0}&\dots&\binom{n-1}{0}\\1&\binom{2}{1}&\binom{3}{1}&\dots&\binom{n}{1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&\binom{n-1}{n-2}&\binom{n}{n-2}&\dots&\binom{2n-3}{n-2}\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}1&0&0&\dots&0\\0&\binom{0}{0}&\binom{1}{0}&\dots&\binom{n-2}{0}\\0&\binom{1}{1}&\binom{2}{1}&\dots&\binom{n-1}{1}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\binom{n-2}{n-2}&\binom{n-1}{n-2}&\dots&\binom{2n-4}{n-2}\end{vmatrix}$$

$$= \dots = \begin{vmatrix}1&0&0&\dots&0\\0&1&0&\dots&0\\0&0&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\dots&\binom{0}{0}\end{vmatrix} = 1.$$

6.17. Az első sort kivonva a másodikból és a harmadikból két konstans sort kapunk, melyek egymás konstansszorosai, tehát a determináns értéke 0.

6.18. Vonjuk ki az első oszlopot a másodikból és a harmadikból. Az így kapott harmadik oszlop kétszerese a másodiknak, tehát a determináns értéke 0.

6.20. Első megoldás: vonjuk ki az első oszlopot a többiből, ezzel eltüntetve azokból a négyzetes tagot, majd vonjuk a második oszlop megfelelő skalárszorosát a harmadik és negyedik oszlopból, hogy elimináljuk azok lineáris tagját, végül a harmadik oszlop konstansszorosát vonjuk ki a negyedikből, hogy ott csak 0-k maradjanak.

Második megoldás: Elég megmutatnunk, hogy a determináns oszlopai lineárisan összefüggőek. Az $a^2x + (a+1)^2y + (a+2)^2z + (a+3)^2w = 0$ egyenlet a homogén

$$\begin{aligned} x + \ y + \ z + \ w &= 0\\ 2y + 4z + 6w &= 0\\ y + 4z + 9w &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszerre vezet, aminek biztosan van nemtriviális megoldása, hisz 4 ismeretlenhez csak 3 egyenlet van adva. (Megoldani már szükségtelen, elég a megoldás létezését igazolni, de például az $(x, y, z, w) = (1, -3, 3, -1)$ egy megoldás).

6.22. Mivel a koordináták báziscserében való változásáról szóló 4.24. állításban láttuk, hogy a koordinátás alakokat a $[\mathbf{v}_i]_\mathcal{C} = \mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}_i]_\mathcal{B}$ képlet kapcsolja össze, ezért a $\mathbf{v}$ vektorok koordinátás alakjaiból, mint oszlopvektorokból képzett mátrixokra $\mathbf{V}_\mathcal{C} = \mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{V}_\mathcal{B}$, így determinánsaikra $|\mathbf{V}_\mathcal{C}| = |\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}||\mathbf{V}_\mathcal{B}|$.

6.23. Egyrészt $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, másrészt mivel $\mathbf{A}^\mathsf{T} = -\mathbf{A}$, ezért $\det(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = (-1)^n\det(\mathbf{A})$, azaz $\det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{A})$, amiből $\det(\mathbf{A}) = 0$.

6.24. $|\mathbf{A}^2| = |\mathbf{A}|^2 = |\mathbf{A}||\mathbf{A}| = |\mathbf{A}||\mathbf{A}^\mathsf{T}| = |\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}|$.

6.25. Mindhárom determinánst a következőképpen számítjuk ki. Legyen $\mathbf{A}$ a determinánshoz tartozó mátrix. Tekintsük az $|\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}|$ determinánst. Ezt könnyű kiszámítani (hisz a főátlón kívül csak nullák állnak), s ennek négyzetgyöke lesz a determináns értéke. Ezek alapján a három determináns értéke: $a^2 + b^2$, $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$, $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + g^2 + h^2)^4$.

6.26. A determinánsok szorzási szabályát is felhasználva:

$$\begin{aligned}(x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) &= \begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ -x_2 & x_1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ -y_2 & y_1\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}x_1y_1 - x_2y_2 & x_1y_2 + x_2y_1\\ -x_2y_1 - x_1y_2 & -x_2y_2 + x_1y_1\end{vmatrix}\\ &= (x_1y_1 - x_2y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2.\end{aligned}$$

A négy illetve a nyolc négyzet összegére vonatkozó analóg összefüggések hasonlóan bizonyíthatóak. (Hurwitz bebizonyította, hogy ha n négyzetszám összegére igaz a feladatbelivel analóg összefüggés, akkor $n = 1, 2, 4$ vagy 8.)

6.27. Minthogy lineáris transzformáció alteret altérbe, eltolt alteret eltolt altérbe visz, e téglalap képe egy (esetleg elfajuló) téglalap lesz. Ezért elég kiszámolni csak a téglalap

4 csúcsának képét. Ez kiszámolható egyetlen mátrixszorzással:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & p+x & p & p+x \\ q & q & q+y & q+y \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} ap+bq & ap+ax+bq & ap+bq+by & ap+ax+bq+by \\ cp+dq & cp+cx+dq & cp+dq+dy & cp+cx+dq+dy \end{bmatrix}$$

Innen leolvasható, hogy a téglalap képeként kapott paralelogramma oldalvektorai (ax, cx) és (by, dy), és így területe

$$|(ax)(dy)-(cx)(by)| = |ad-bc|xy.$$

Eszerint tehát a téglalap képének területe független a téglalap helyzetétől, és mindig a téglalap területének $|ad-bc|$-szerese.

6.29. 1. Igaz. 2. Igaz. 3. Igaz. 4. Igaz. 5. Hamis. Mátrixok összegének determinánsa általában nem egyenlő determinánsaik összegével (ld. a 6.30. feladatot). 6. Hamis. Egy aldetermináns értéke bármilyen előjelű lehet, az előjeles aldeterminánst belőle úgy kapjuk, hogy páratlan $i+j$ esetén megszorozzuk -1-gyel. 7. Hamis. 8. Hamis. Csak azokon a helyeken folytonos függvénye a mátrix elemeinek, ahol a determinánsa nem 0.

6.30.

a) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = 8$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1+16-4-4 = 9$$

c) $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

6.31. Az első sor minden eleme páros, az első oszlop minden eleme osztható 3-mal, a második oszlop minden eleme osztható 5-tel, tehát minden kígyó osztható $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$-cal, így az összegük is.

6.32. Csak egyetlen kígyó áll csupa páratlan számból, így a kígyók összegére bontásnál csak annak determinánsa páratlan, a többié páros, összegük tehát páratlan, vagyis nem lehet 0.

6.33. Megadjuk, hogy melyik sorban hányadik elem lesz a kígyóba választva. A 12 kígyó: 1243, 1324, 1432, 2134, 2341, 2413, 3142, 3214, 3421, 4123, 4231, 4312. Ezek alapján a 12 determináns – a kígyó elemeit négyzettel jelölve:

$$\begin{vmatrix} \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & \blacksquare & 0 \\ \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

6.34. Adjuk a harmadik oszlophoz az első 100-szorosát és a második 10-szeresét. Így az utolsó sorban a megadott, 9-cel osztható számok szerepelnek. Ha e sor szerint fejtjük ki a determinánst, akkor minden összeadandó osztható lesz 9-tel, tehát a determináns is.

6.35. Egy olyan determinánst kell konstruálni, melynek van egy nulla értékű aldeterminánsa. például a

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

determináns értéke 1, de a 9-hez tartozó aldetermináns értéke 0, így a második sor vagy oszlop szerinti kifejtésben e szám 0-val szorzódik, vagyis nem befolyásolja a determináns értékét.

6.37. Az első és harmadik sor szerint kifejtve:

$$\det(\mathbf{A}) =$$
$$(-1)^{1+3+1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3+1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$+ (-1)^{1+3+1+4} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3+2+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$+ (-1)^{1+3+2+4} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3+3+4} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= -1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 3 \cdot 6 - (-3) \cdot 0 + (-4) \cdot 0 - 1 \cdot (-3) = -15$$

6.38.

a) $-6 \cdot 6 = -36$, mert a blokkmátrixok determinánsára vonatkozó tétel szerint a bal felső 2×2-es és a jobb alsó 3×3-as determinánsok szorzata adja az eredményt.

b) 24, mert a bal felső 1×1-es és a jobb alsó 4×4-es determinánsok értéke 1, illetve 24, és ezek szorzata 24. Másik megoldáshoz jutunk, ha a determinánst az első oszlopa, az egyetlen kiszámítandó aldeterminánst az első sora... szerint fejtjük ki.

6.39.

a) A determináns a 2, -1, -2, 1 számokból képezett Vandermonde-determináns, így értéke: $(-1-2)(-2-2)(1-2)(-2-(-1))(1-(-1))(1-(-2)) = 72$.

b) Vandermonde-determináns; értéke -2880.

c) A determináns két Vandermonde-determináns összegére bomlik:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & e & e^2 & e^3 \end{vmatrix}$$
$$= (b-a)(c-a)(c-b)$$
$$\times \left[(d-a)(d-b)(d-c) + (e-a)(e-b)(e-c)\right].$$

6.40. Ha $pqrs \neq 0$, akkor szorozzuk be az első sort p-vel, a másodikat q-val, a harmadikat r-rel, a negyediket s-sel, majd a negyedik oszlopból emeljünk ki $pqrs$-t; így egy Vandermonde-determinánst kapunk:

$$D = \frac{pqrs}{pqrs} \begin{vmatrix} p^3 & p^2 & p & 1 \\ q^3 & q^2 & q & 1 \\ r^3 & r^2 & r & 1 \\ s^3 & s^2 & s & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (q-p)(r-p)(s-p)(r-q)(s-q)(s-r).$$

Ha $pqrs = 0$, például $s = 0$, akkor az eredeti determináns negyedik oszlopa szerinti kifejtéssel kapjuk, hogy

$$D = pqr \begin{vmatrix} p^2 & p & 1 \\ q^2 & q & 1 \\ r^2 & r & 1 \end{vmatrix}.$$

Ezekből rövid átalakítás után látható, hogy az összefüggés ebben az esetben is fennáll.

6.41. $a_1 = \det[1] = 1$, $a_2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right] = 2$, az $(n \times n)$-es determinánst első sora szerint kifejtve kapjuk, hogy $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

6.43. Igen. Tekintsük a determináns első sor szerinti kifejtését! Ha mindegyik elemhez tartozó előjeles aldetermináns 0 lenne, akkor a mátrix szinguláris lenne, így valamelyik elemhez tartozó aldetermináns nem 0. Legyen pl. $A_{1j} \neq 0$. Ekkor a kifejtés összes többi tagját összevonva kapjuk, hogy $\det \mathbf{A} = a_{1j}A_{1j} + c$. Mivel $A_{1j} \neq 0$, ezért az $a_{1j}A_{1j} + c = 0$ egyenlet megoldható a_{ij}-re, tehát ennek az elemnek a megváltoztatása 0-vá teszi a determinánst.

6.44. Ha az i-edik sor elemeit az u-adik sorhoz tartozó előjeles aldeterminánsokkal szorozzuk, akkor az u-adik sor elemeit nem használjuk, tehát szabadon megváltoztathatjuk. Másoljuk az i-edik sort az u-adik helyére, tehát minden k-ra $a_{ik} = a_{uk}$. Ekkor egyrészt $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{uk} = \sum_{k=1}^{n} a_{uk}A_{uk}$, azaz e determináns u-adik sor szerinti kifejtését kaptuk, másrészt e determinánsnak van két azonos sora, tehát determinánsa 0. Az oszlopokra vonatkozó állítás egy transzponálással visszavezethető erre.

6.45. A két tétel képletei közös képletbe foglalhatók. Sorokra:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{uk} = \begin{cases} \det \mathbf{A}, & \text{ha } i = u, \\ 0, & \text{ha } i \neq u, \end{cases} \tag{6.5}$$

oszlopokra:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kv} = \begin{cases} \det \mathbf{A}, & \text{ha } j = v, \\ 0, & \text{ha } j \neq v. \end{cases} \tag{6.6}$$

6.46. A két kifejtési tételből adódik, hogy

$$[a_{ij}][A_{ij}]^{\mathsf{T}} = \det(\mathbf{A})\mathbf{I},$$

ugyanis $[a_{ij}]$ i-edik sorának és $[A_{ij}]^{\mathsf{T}}$ u-adik oszlopának, azaz $[A_{ij}]$ u-adik sorának skaláris szorzata a (6.5) képlet szerint $\det(\mathbf{A})$, ha $i = u$, azaz a szorzat főátlójában, egyebütt pedig 0. Ebből pedig mindkét képlet adódik.

6.50.

a) Az előjeles aldeterminánsok mátrixának transzponáltja:

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -7 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 42 & 4 & -49 \\ -11 & -1 & 13 \end{bmatrix}$$

Mivel a mátrix determinánsa 1, ezért inverze megegyezik az előjeles aldeterminánsok előbb kiszámolt mátrixával.

b) Az előjeles aldeterminánsok mátrixának transzponáltja:

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Mivel a mátrix determinánsa 16, ezért az inverz mátrix

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

c) Mivel $\det(\mathbf{A}) = 1$, ezért $\mathbf{A}^{-1}$ megegyezik az előjeles aldeterminánsok mátrixának transzponáltjával. Ennek mind a 16 elemét nem kell kiszámolni, mert felső háromszögmátrix inverze felső háromszögmátrix. Hasonlóan könnyen látható, hogy a főátlóbeli elemekhez tartozó előjeles aldeterminánsok értéke 1. Tehát csak a főátló alatti elemek előjeles aldeterminánsait kell kiszámolni. Példaként egyet mutatunk:

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = -2.$$

Hasonlóan kiszámolva a többit is kapjuk, hogy

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & -3 & 1\end{bmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Mi lehet e feladat általánosítása, és mi a válasz?

d) A mátrixból csak egy nemnulla kígyó választható ki, így determinánsa könnyen számolható: $\det \mathbf{B} = 16$. Az inverz kiszámításához nem kell sok aldeterminánst számolni, mert nagy részük láthatóan 0 értékű. Vegyük figyelembe a számolásnál azt is, hogy $\mathbf{B}$ szimmetrikus, így egyrészt a szimmetrikusan elhelyezkedő elemek közül csak az egyiket kell kiszámolni, másrészt a szimmetria miatt a végén szükségtelen a transzponálás.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix}0 & 8 & 0 & -8\\ 8 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 8\\ -8 & 0 & 8 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}.$$

e) Az inverz

$$\frac{1}{abc}\begin{bmatrix}bc & 0 & 0\\ 0 & ac & 0\\ 0 & 0 & ab\end{bmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix}\frac{1}{a} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{b} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{c}\end{bmatrix},$$

ha $abc \neq 0$. Az $abc = 0$ esetben a mátrix nem invertálható.

f) $\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1-i\end{bmatrix}$.

g) Az inverz $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1/4\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/3 & 0\\ 0 & 1/2 & 0 & 0\end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

6.52. *a)* A három eredmény: 1, 2, 4. Mivel mindhárom test esetén ugyanazokat a számolásokat kell elvégezni, csak más modulus szerinti maradék lesz az eredmény, legegyszerűbb, ha az egészek fölött számolunk, és annak maradékait tekintjük. Valóban, az egészek fölött -1 a determináns, és $-1 \bmod 2 = 1$, $-1 \bmod 3 = 2$, $-1 \bmod 5 = 4$. *b)* 5. Legegyszerűbb, ha az első sor 2-szeresét hozzáadjuk a második, és 3-szorosát a harmadik sorhoz.

6.53. Sage-kód egy $\mathbb{F}_2$ fölötti véletlen mátrix kiírására:

```
sage: random_matrix(GF(2), 5)
[1 0 0 1 1]
[1 1 1 0 1]
[1 1 1 0 0]
[1 0 0 0 0]
[0 0 1 0 0]
sage: _.det()
1
```

Hány olyan $\mathbb{F}_2^{5\times 5}$-beli mátrix van, amelynek determinánsa nem 0? Az első sora bármelyik vektor lehet, kivéve a $\mathbf{0}$-vektort, így $2^5 - 1$ lehetőség van. A második sor nem lehet ez a vektor és a $\mathbf{0}$-vektor, ez $2^5 - 2$ lehetőség. A harmadik vektor nem lehet az előző két vektor által kifeszített altér, melynek a $\mathbf{0}$-vektorral együtt $2^2 = 4$ eleme van, e vektor kiválasztására tehát $2^5 - 2^2$ lehetőség adódik. Hasonlóan folytatva kapjuk, hogy az összes független vektorötösök – azaz a nemnulla értékű determinánsok – száma $(2^5 - 2^0)(2^5 - 2^1)(2^5 - 2^2)(2^5 - 2^3)(2^5 - 2^4)$. Ha ezt elosztjuk az összes $\mathbb{F}_2^{5\times 5}$-beli mátrixok számával, 0.2980-t kapunk, így a determináns 0.7020 valószínűséggel lesz 0.

6.54.

a) Egy vektort, mely merőleges a megadott vektorokra, és azzal/azokkal jobbrendszert alkot.

b) Segítség: használjuk fel, hogy egy $n-1$-dimenziós P paralelepipedon térfogata megegyezik annak az n-dimenziós Q paralelepipedonnak a térfogatával, melyet a P-ből úgy kapunk, hogy a P-t kifeszítő vektorokhoz n-edik vektorként egy egységvektort adunk, mely merőleges a többire.

c) Pozitív. Ehhez épp az kellett, hogy a bázisvektorokat ne az első, hanem az utolsó sorba vagy oszlopba írjuk.

6.55. Az előző feladat szerint a kért vektort a következőképp kaphatjuk meg:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 3\\ \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4\end{vmatrix} = \mathbf{e}_4 - \mathbf{e}_3$$

azaz a negyedik vektor $(0, 0, -1, 1)$.

7
Mátrixleképezések és geometriájuk

E fejezetet a lineáris leképezések mátrixműveletekből való származtatását, majd általános fogalmának főként szemléletes, geometriai indíttatású megalapozását tárgyalja. Merőlegesség, távolság, vetítés, forgatás, és ezek általánosításai lesznek az alapfogalmak.

Mátrixleképezés, lineáris leképezés

Minden $\mathbf{A}$ *mátrixhoz tartozik egy* $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ *leképezés. E leképezések épp egybeesnek a lineáris kombinációt megtartó leképezésekkel, melyeket lineáris leképezéseknek nevezünk. A lineáris leképezés nem csak a lineáris algebrának, de az egész matematikának egyik legfontosabb fogalma.*

A mátrixleképezés fogalma *Mátrixhoz tartozó leképezésen*, vagy egyszerűen *mátrixleképezésen* az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezést értjük, ahol $\mathbf{A}$ egy mátrix. Egy $m \times n$-es $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixhoz így egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés tartozik, ugyanis ha $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$, akkor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$.

A mátrixok jelölésére félkövér betűket használunk, a leképezésekére dőlt (kurzív) betűket. A továbbiakban azt a konvenciót követjük, hogy egy mátrixhoz tartozó mátrixleképezést ugyanannak a betűnek a dőlt változatával jelöljük, például az $\mathbf{A}$ mátrixhoz tartozó mátrixleképezést A jelöli, azaz

$$A : \mathbf{x} \mapsto A(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}.$$

Az $A(\mathbf{x})$ mellett az $A\mathbf{x}$ jelölés is használatos.

Az A leképezés értékkészletét $\operatorname{Im}(A)$ jelöli, mely az $\mathbb{R}^m$ altere (gondoljuk meg, miért?). Ezt szokás *képtérnek* is nevezni, minthogy ez az $\mathbb{R}^n$ tér képe. Ez megegyezik az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopterével, azaz $\mathcal{O}(\mathbf{A})$-val. Azoknak a vektoroknak az alterét, melyet A a nullvektorba visz, az A leképezés *magterének* nevezzük. Magtérre a *kernel* szó is használatos. $\operatorname{Ker}(A)$-val jelöljük. Ez megegyezik a hozzá tartozó $\mathbf{A}$ mátrix nullterével. Tehát

$$\mathrm{Im}(A) = \mathcal{O}(\mathbf{A}), \qquad \mathrm{Ker}(A) = \mathcal{N}(\mathbf{A}).$$

Az Im rövidítés a kép jelentésű *image*, a Ker a mag jelentésű *kernel* szóból származik.

7.1. PÉLDA (VEKTORI SZORZÁSSAL DEFINIÁLT MÁTRIXLEKÉPEZÉS). *Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ egy adott $\mathbb{R}^3$-beli vektor. Legyen A az a transzformáció, mely a tér tetszőleges $\mathbf{x}$ vektorához az $\mathbf{a} \times \mathbf{x}$ vektort rendeli. Tehát*

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{x}.$$

Mutassuk meg, hogy az A függvény egy mátrixleképezés, azaz létezik egy olyan $\mathbf{A}$ mátrix, hogy $A(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{a} \times \mathbf{x}$ vektori szorzat koordinátás alakban:

$$\mathbf{y} = \mathbf{a} \times \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{bmatrix}.$$

Az eredményből azonnal látszik, hogy e transzformáció mátrixleképezés, hisz $\mathbf{y}$ minden koordinátája $\mathbf{x}$ koordinátáinak lineáris kifejezése. A szorzatot $\mathbf{x}$ koordinátái szerint rendezzük, ahonnan azonnal leolvasható a transzformáció mátrixa, amit a továbbiakban $[\mathbf{a}]_\times$ jelöl. Segítségével fölírható a transzformáció mátrixszorzatos alakja:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \begin{bmatrix} & -a_3x_2 & +a_2x_3 \\ a_3x_1 & & -a_1x_3 \\ -a_2x_1 & +a_1x_2 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Tehát

$$[\mathbf{a}]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7.1}$$

E feladat eredménye különösen fontos a 3-dimenziós tér transzformációinak vizsgálatánál, így pl. az anyagtranszformációk fizikai/mérnöki vizsgálatában. □

Műveletek mátrixleképezések között A következőkben megvizsgáljuk, hogy mi a kapcsolat a mátrixműveletek, és a mátrixokhoz tartozó mátrixleképezések közti műveletek között.

7.2. TÉTEL (MÁTRIXLEKÉPEZÉSEK ALAPMŰVELETEI). *Legyen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ három $m \times n$-es mátrix, legyen A, B és C a hozzájuk tartozó három mátrixleképezés és legyen c egy skalár. Ekkor*

a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$ *pontosan akkor igaz, ha* $A + B = C$, *és*

b) $c\mathbf{A} = \mathbf{C}$ *pontosan akkor igaz, ha* $cA = C$.

Ha $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ *és* $\mathbf{Z}$ *típusa rendre* $m \times k$, $k \times n$, *illetve* $m \times n$, *és* X, Y *és* Z *a hozzájuk tartozó három mátrixleképezés, akkor*

c) $\mathbf{XY} = \mathbf{Z}$ *pontosan akkor igaz, ha* $X \circ Y = Z$, *azaz mátrixok szorzásának a függvények kompozíciója felel meg.*

Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvénynek a $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény inverze, ha minden $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ helyen $(f(g(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ és $(g(f(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$, azaz ha kompozícióik az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvények megegyeznek az identikus leképezéssel.

7.3. TÉTEL (INVERZ MÁTRIXLEKÉPEZÉSEK). *Legyenek* A *és* B *az* $n \times n$*-es* $\mathbf{A}$ *és* $\mathbf{B}$ *mátrixokhoz tartozó mátrixleképezések. Ekkor az* $\mathbf{A}$ *mátrix inverze pontosan akkor a* $\mathbf{B}$ *mátrix, ha az* A *leképezés inverze a* B *leképezés.*

A fenti két tétel bizonyítását az Olvasóra hagyjuk (ld. 7.11. és 7.12. feladatok)!

Mátrixleképezések tulajdonságai A mátrixleképezések megőrzik a lineáris kombinációt, a nullvektort nullvektorba, alteret altérbe visznek.

7.4. TÉTEL (MÁTRIXLEKÉPEZÉSEK ALAPTULAJDONSÁGAI). *Legyen* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *egy tetszőleges mátrixleképezés,* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $c, d \in \mathbb{R}$.

a) $A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + dA(\mathbf{y})$, *azaz* A *megőrzi a lineáris kombinációt.*

b) Az A *homogén és additív leképezés, azaz*

$$\begin{aligned} A(c\mathbf{x}) &= cA(\mathbf{x}), && \textit{(a leképezés homogén), és} \\ A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y}), && \textit{(a leképezés additív).} \end{aligned}$$

c) $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

d) Tetszőleges altér képe altér.

e) Tetszőleges affin altér képe affin altér.

BIZONYÍTÁS. *a)* Bármely $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ vektorra és $c, d \in \mathbb{R}$ valósra

$$A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = \mathbf{A}(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = c\mathbf{Ax} + d\mathbf{Ay} = cA(\mathbf{x}) + dA(\mathbf{y}).$$

b) Az előző egyenlőség $d = 0$ esetén a homogenitást, $c = d = 1$ esetén az additivitást bizonyítja. *c)* igaz, mert bármely $\mathbf{x}$ vektorra $A\mathbf{0} = A(0\mathbf{x}) = 0A(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. *d)* abból következik, hogy ha $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$ egy $\mathcal{U}$ altér bázisa, akkor ezek összes lineáris kombinációjának, vagyis az altér vektorainak képe

$$A(c_1\mathbf{b}_1 + \ldots + c_k\mathbf{b}_k) = c_1A(\mathbf{b}_1) + \ldots + c_kA(\mathbf{b}_k).$$

Világos, hogy e vektorok kiadják az $A\mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{b}_k$ vektorok által kifeszített altér minden vektorát, tehát $A(\mathcal{U})$ altér. Hasonlóan *e)*-ben, ha

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ egy tetszőleges vektor és $\mathcal{U}$ a fenti altér, akkor

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}+\mathcal{U}) &= A(u + c_1\mathbf{b}_1 + \ldots + c_k\mathbf{b}_k) \\ &= A(\mathbf{u}) + c_1A(\mathbf{b}_1) + \ldots + c_kA(\mathbf{b}_k) \\ &= A(\mathbf{u}) + A(\mathcal{U}), \end{aligned}$$

ami egy altér eltoltja, azaz affin altér. □

Lineáris leképezés A mátrixleképezések alaptulajdonságai a lineáris leképezés fogalmához vezetnek.

7.5. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS LEKÉPEZÉS). *Legyen H_1 és H_2 mindegyike olyan halmaz, melynek elemein értelmezve van egy asszociatív összeadás és egy „skalárral való szorzás" művelet. Azt mondjuk, hogy egy $A : H_1 \to H_2$ leképezés* lineáris, *ha homogén és additív, azaz ha tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H_1$ elemre és c skalárra*

$$\begin{aligned} A(c\mathbf{x}) &= cA(\mathbf{x}) && (A \text{ homogén,}) \\ A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= A\mathbf{x} + A\mathbf{y} && (A \text{ additív.}) \end{aligned}$$

$H_1 = H_2$ esetén a lineáris leképezéseket lineáris transzformációknak *is nevezzük.*

Azt a későbbiekben fogjuk részletezni, hogy milyen algebrai tulajdonságokat érdemes a skalárokról, valamint H_1 és H_2 elemeiről föltenni. Most csak néhány pédát mutatunk lineáris leképezésekre.

7.6. PÉLDA (A DERIVÁLÁS ÉS AZ INTEGRÁLÁS LINEÁRIS LEKÉPEZÉS). *Legyen H_1 az egyváltozós valós, és minden valós helyen differenciálható függvények halmaza, H_2 pedig az egyváltozós valós függvények halmaza. Világos, hogy H_1 és H_2 is olyan halmaz, melynek elemei közt értelmezve van az összeadás és a skalárral való szorzás művelete. A deriválás, azaz a $D : H_1 \to H_2 : f \mapsto D(f) = f'$ leképezés lineáris. Fogalmazzunk meg hasonló állítást az integrálra is.*

MEGOLDÁS. Tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ skalárra és $f, g \in H_1$ függvényre

$$\begin{aligned} D(cf) &= (cf)' = cf' = cD(f), \text{ és} \\ D(f+g) &= (f+g)' = f' + g' = D(f) + D(g). \end{aligned}$$

Hasonló összefüggések állnak fönn az integrálokra is, például legyen H_1 a $[0,1]$ intervallumon Riemann-integrálható függvények halmaza, és legyen $H_2 = \mathbb{R}$. Ekkor az $f \mapsto \int_0^1 f$ leképezés lineáris, ugyanis tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ skalárra és tetszőleges $f, g \in H_1$ függvényre

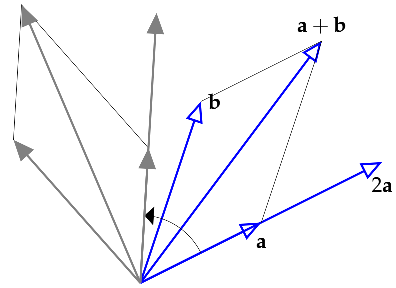
$$\int_0^1 cf = c\int_0^1 f, \text{ és } \int_0^1 (f+g) = \int_0^1 f + \int_0^1 g.$$ □

7.7. állítás (Síkbeli forgatás, tükrözés, vetítés). *A síkbeli vektorok egy rögzített O pont körüli forgatása, egy egyenesre való tükrözése és merőleges vetítése lineáris leképezés.*

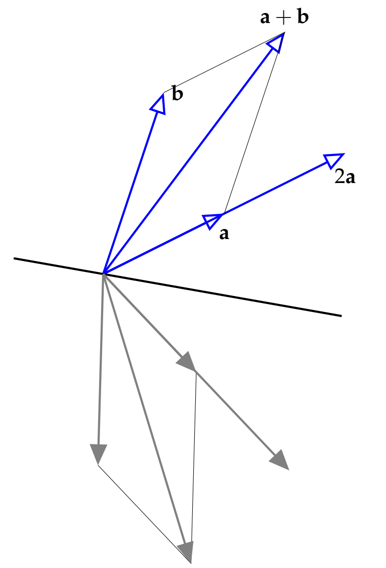
Bizonyítás. A precíz bizonyításokat mellőzük, csak a tényt szemléltetjük. A síkbeli vektorok pont körüli forgatása lineáris leképezés, ugyanis könnyen látható, hogy egy vektor c-szeresének ($c \in \mathbb{R}$) elforgatottja megegyezik a vektor elforgatottjának c-szeresével, valamint hogy két vektor összegének elforgatottja megegyezik a vektorok elforgatottjainak összegével (ld. 7.1. ábra).

Hasonlóan egyszerűen látszik, hogy egy egyenesre való tükrözés egy vektor c-szeresét a vektor tükörképének c-szeresébe viszi, és két vektor összegét a két vektor tükörképének összegébe (ld. 7.2 ábra).

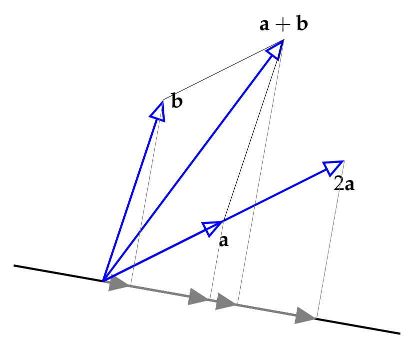
Végül ugyanígy megmutatható, hogy egy egyenesre való merőleges vetítés egy vektor c-szeresét vetületének c-szeresébe viszi, és két vektor összegét a két vektor vetületének összegébe (ld. 7.3 ábra). □



7.1. ábra: A pont körüli elforgatás lineáris leképezés



7.2. ábra: Az egyenesre való tükrözés lineáris leképezés



7.3. ábra: Az egyenesre való merőleges vetítés lineáris leképezés

$\mathbb{R}^n$-ből $\mathbb{R}^m$-be képző lineáris leképezések E fejezet további részében csak lineáris $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezésekkel foglalkozunk, ahol a skalárok a valós számok. Megmutatjuk, hogy ezek mátrixleképezések.

7.8. tétel (Lineáris leképezés ekvivalens definíciói). *Egy tetszőleges $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezésre az alábbi állítások ekvivalensek:*

1. *A lineáris, azaz homogén és additív.*
2. *Tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ és $c, d \in \mathbb{R}$ esetén*
$$A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + dA(\mathbf{y})$$
3. *Tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ és $c \in \mathbb{R}$ esetén*
$$A(c\mathbf{x} + \mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$$
4. *„Megőrzi” a lineáris kombinációt, azaz tetszőleges $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorokra és $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ skalárra*
$$A(c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k) = c_1 A\mathbf{x}_1 + \cdots + c_k A\mathbf{x}_k.$$

A bizonyítást az Olvasóra hagyjuk (ld. 7.13. feladat).

7.9. tétel (Az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezések mátrixleképezések). *Legyen $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ egy tetszőleges függvény. Az A pontosan akkor lineáris leképezés, ha létezik egy olyan $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix, hogy az A függvény megegyezik az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ leképezéssel. Ekkor*

$$\mathbf{A} = [A\mathbf{e}_1 | A\mathbf{e}_2 | \ldots | A\mathbf{e}_n],$$

ahol $\mathbf{e}_i$ az i-edik standard egységvektor ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Bizonyítás. Minden mátrixleképezés lineáris, ez bizonyítja az állítás egyik felét. A állítás másik felének bizonyításához tekintsük $\mathbb{R}^n$ standard bázisát és az $A\mathbf{e}_i$ vektorokból képzett

$$\mathbf{A} = [A\mathbf{e}_1|A\mathbf{e}_2|\ldots|A\mathbf{e}_n] \tag{7.2}$$

mátrixot, valamint legyen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ egy tetszőleges vektor. Ha A lineáris leképezés, azaz megőrzi a lineáris kombinációt, akkor

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= A(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) \\ &= x_1A\mathbf{e}_1 + x_2A\mathbf{e}_2 + \ldots + x_nA\mathbf{e}_n \\ &= \begin{bmatrix} A\mathbf{e}_1 & A\mathbf{e}_2 & \ldots & A\mathbf{e}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{Ax} \end{aligned}$$

Tehát valóban létezik olyan $\mathbf{A}$ mátrix, hogy $A\mathbf{x} = \mathbf{Ax}$. Ráadásul ilyen mátrix csak ez az egy van, mert bármely $\mathbf{e}_i$ bázisvektorra és bármely $\mathbf{A}$ mátrixra $\mathbf{Ae}_i = \mathbf{A}_{*i}$, tehát az $\mathbf{A}_{*i}$ oszlopvektor csak $A\mathbf{e}_i$ lehet. □

7.10. példa. *Mutassuk meg, hogy az*

$$\begin{aligned} A &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; (x,y) \mapsto (x-y, 2x+y, -x+1) \text{ és} \\ L &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3; (x,y) \mapsto (x-y, 2x+y, -x) \end{aligned}$$

leképezések közül az A nem lineáris leképezés, de az L igen. Utóbbinak írjuk föl a mátrixát!

Megoldás. Az A leképezés nem lineáris, mert a 7.4. tétel következtében $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ kellene, de $A : (0,0) \mapsto (0,0,1)$.

Alakítsuk át a függvényértékéül kapott vektort:

$$L\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ 2x+y \\ -x \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

ami igazolja, hogy L mátrixleképezés, és mátrixa

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A mátrixleképezések pedig lineáris leképezések, tehát L is. □

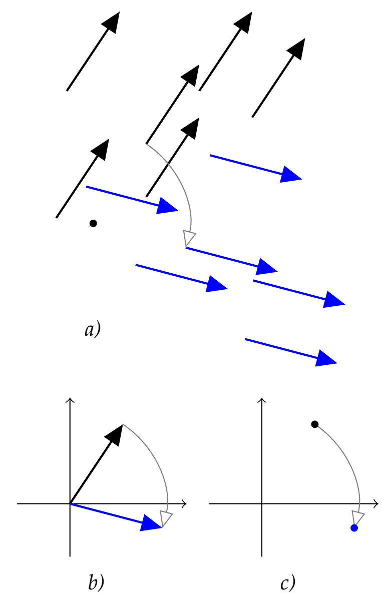
► Mint azt a 7.6. példa mutatja, lineáris leképezésekről olyan esetben is beszélhetünk, amikor a leképezésnek nincs mátrixa, azaz a lineáris leképezés általánosabb fogalom.

► Különbség van a lineáris leképezés és a mátrixleképezés közt $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvények esetén is. A lineáris leképezés független a bázistól, az csak maga a függvény, mely megadja, hogy melyik vektornak melyik vektor a képe. A mátrixleképezés mindig valamely bázisra vonatkozik. Egy lineáris leképezéshez minden bázisban tartozik egy mátrixleképezés, melynek mátrixa függ a bázistól.

► Keressük meg a lineáris $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ transzformációkat. Itt $\mathbb{R}$ elemei az 1-dimenziós vektorok (azonosíthatók a számokkal). E térben az $e = 1$ vektor (szám) a bázis. Az előző tétel szerint egy lineáris $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ transzformáció mátrixa $[Le] = [L(1)]$, ami egy szám, jelölje ezt $c := L(1)$. Így $L(x) = L(1x) = L(x1) = xc = cx$, azaz a lineáris $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ transzformációk azonosak az $x \mapsto cx$ függvényekkel, ahol c egy tetszőleges konstans. Az ilyen leképezések grafikonja egy origón átmenő (függőlegestől különböző) egyenes. (Az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezések tehát nem azonosak a lineáris $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekkel, melyek általános alakja $f(x) = cx + d$, ahol $c, d \in \mathbb{R}$.)

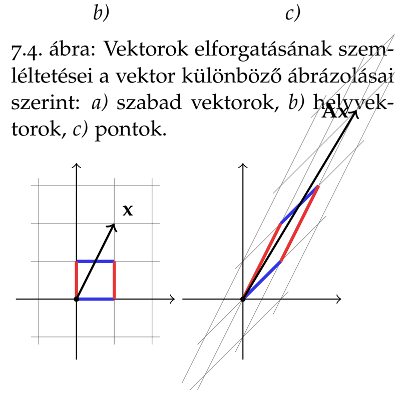
A mátrixleképezés hatásának szemléltetései Egy mátrixszal való szorzás hatásának megértését még egy adott konkrét alkalmazásban is segítheti, ha vizuálisan is megjeleníthető képünk van róla.

Egy vektor és egy mátrixleképezés általi képe – akár szabad vektorokkal, akár helyvektorokkal, akár a helyvektorok végpontjával – egyszerűen ábrázolható. A 7.4. ábra például a forgatómátrix hatását szemlélteti e három módon. (Szabad vektorok esetén a szabad vektorok mellett a forgatás középpontja is szabadon megválasztható, helyvektorok esetén a forgatás középpontja az origó!)



7.4. ábra: Vektorok elforgatásának szemléltetései a vektor különböző ábrázolásai szerint: *a)* szabad vektorok, *b)* helyvektorok, *c)* pontok.

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leképezések esetén a legegyszerűbb szemléltetéshez elég csak az egységnégyzet képét megrajzolni, amint azt a 7.5. ábra mutatja. A kép mindig egy paralelogramma (esetleg elfajuló), melynek körüljárását is jelölni kell valahogy. Ezt az ábrán az oldalak különböző színezése megteszi. A paralelogramma területe és körüljárása a mátrix determinánsból olvasható ki. Az egységnézetrács képe paralelogrammarács. Ennek segítségével egy tetszőleges vektor képének megszerkesztése egyszerű, hisz a lineáris leképezés megtartja a lineáris kombinációt (ld. 7.5. ábra).

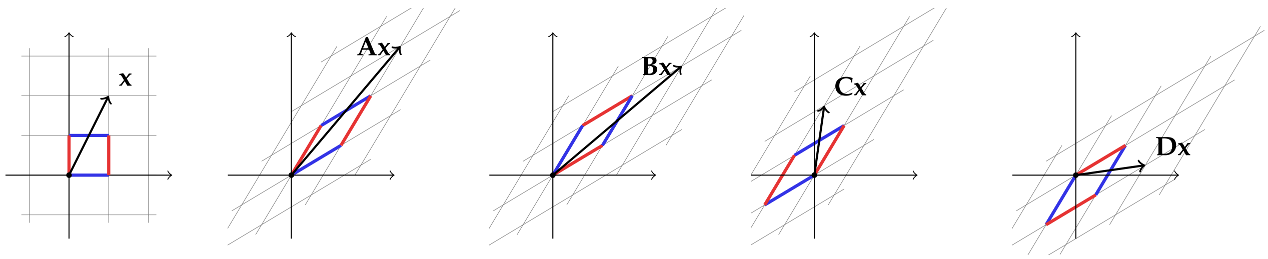


7.5. ábra: Az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix}1&1\\1&2\end{smallmatrix}\right]$ mátrix hatása az egységnégyzetrácson, és az $\mathbf{x} = (1, 2)$ vektoron. Az $\mathbf{Ax}$ vektor végpontja a paralelogrammarácson 1 lépés az x-tengely képének irányába, és 2 lépés az y-tengely képének irányába.

7.11. példa (Mátrixleképezés ábrázolása az egységnégyzetrács képével). *Ábrázoljuk az egységnégyzet és az egységnégyzetrács, valamint az* $(1, 2)$ *vektor képét az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

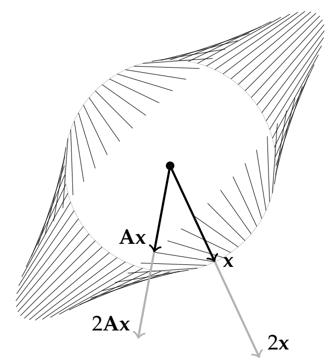
mátrixokkal megadott leképezések esetén.



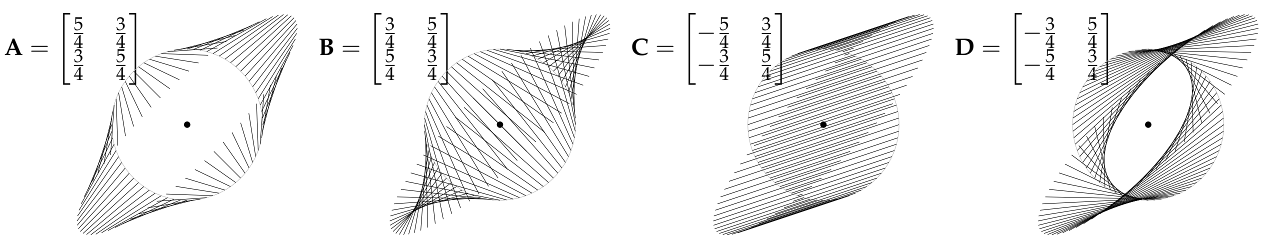
7.6. ábra: Az egységnégyzet és az egységnégyzetrács képe a megadott négy mátrix esetén, és az $(1,2)$ vektor képe.

Egy másik ábrázolási lehetőséget kapunk az egységvektorok képének megszerkesztésével. Mivel a mátrixleképezés homogén, azaz egy vektor c-szereséhez a vektor képének c-szeresét rendeli, ezért elég minden irányból egyetlen vektor – például az egységvektor – képének megszerkesztése. Hogy a kép áttekinthető legyen, helyvektorok helyett csak az őket reprezentáló pontokat tekintjük, és az egységkör összes pontja helyett csak néhányat (pl. 50–100-at). Mivel a kör lineáris leképezés általi képe mindig egy ellipszis (esetleg elfajuló), ezért a leképezés szemléltetéséhez elég összekötni az egységkörön kiválasztott pontot a képével ahhoz, hogy nagyjából a sík bármelyik vektorának „lássuk”, hogy mi a képe. Az így kialakuló ábra sokat elmond a leképezésről. Ezt mutatja a 7.7 ábra, ahol a $-65°$-os irányhoz tartozó $\mathbf{x}$ egységvektort és $\mathbf{Ax}$ képét külön berajzoltuk, és azt is megmutattuk, hogy pl. hogyan kapható meg $2\mathbf{x}$ képe.

A 7.8 ábra az előző példabeli mátrixleképezések egységkör-ábráját mutatja.

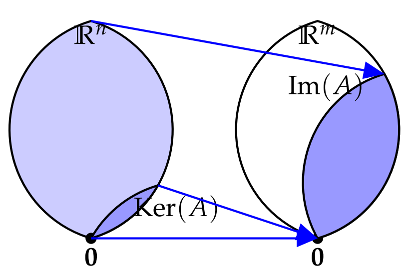


7.7. ábra: Az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 3/4 & 5/4 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix hatását szemlélteti oly módon, hogy az egységkör néhány pontját összeköti a képükkel. Az ábrán egy egységnyi $\mathbf{x}$ vektort és $\mathbf{Ax}$ képét, valamint a $2\mathbf{x}$ vektort és képét a $\mathbf{A}(2\mathbf{x}) = 2\mathbf{Ax}$ vektort kiemeltük.



7.8. ábra: Négy leképezés egységkör-ábrája.

Egy általános $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés megjelenítéséhez a levéldiagramot hívjuk segítségül. Itt elsőként a képteret és a magteret tudjuk szemléltetni, amint azt a 7.9. ábra mutatja.



7.9. ábra: Egy $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ mátrixleképezés levéldiagrammja. Az ábrán három altér színezéssel ki van emelve – az értelmezési tartomány ($\mathbb{R}^n$), az értékkészlet ($\mathrm{Im}(A) = \mathcal{O}(\mathbf{A})$) és a magtér ($\mathrm{Ker}(A) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$).

*Mátrix nyoma** A négyzetes mátrixok vektorterén értelmezett lineáris leképezések egyik legfontosabbika a mátrix nyoma.

7.12. DEFINÍCIÓ (MÁTRIX NYOMA). *Egy négyzetes mátrix főátlójában lévő elemek összegét a* mátrix nyomának *nevezzük. Az* $\mathbf{A}$ *mátrix nyomát* $\operatorname{trace}\mathbf{A}$ *vagy* $\operatorname{tr}\mathbf{A}$ *jelöli.*

Például

$$\operatorname{trace}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} = 5, \quad \operatorname{trace}(\mathbf{I}_n) = n, \quad \operatorname{trace}([\mathbf{a}]_\times) = 0.$$

7.13. ÁLLÍTÁS (A NYOM LINEÁRIS LEKÉPEZÉS). *A nyom additív és homogén, azaz tetszőleges* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mátrixokra és* $c \in \mathbb{R}$ *skalárra*

$$\operatorname{trace}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \operatorname{trace}\mathbf{A} + \operatorname{trace}\mathbf{B}, \quad \operatorname{trace}(c\mathbf{A}) = c\operatorname{trace}\mathbf{A}.$$

► A bizonyítás magától értetődő. Egyúttal igazolja azt is, hogy tetszőleges $c, d \in \mathbb{R}$ konstansok esetén

$$\operatorname{trace}(c\mathbf{A}+d\mathbf{B}) = c\operatorname{trace}\mathbf{A} + d\operatorname{trace}\mathbf{B}.$$

► Hasonlóképp nilvánvaló, hogy $\operatorname{trace}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \operatorname{trace}\mathbf{A}$.

7.14. ÁLLÍTÁS (A NYOM TULAJDONSÁGAI). *Legyen* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *és* $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$*. Ekkor*

$$\operatorname{trace}(\mathbf{AB}) = \operatorname{trace}(\mathbf{BA}), \tag{7.3}$$

$$\operatorname{trace}(\mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2. \tag{7.4}$$

BIZONYÍTÁS. Mivel

$$\begin{aligned}\operatorname{trace}(\mathbf{AB}) &= \sum_{i=1}^{n}\mathbf{A}_{i*}\mathbf{B}_{*i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\mathbf{B}_{j*}\mathbf{A}_{*j}\\ &= \operatorname{trace}(\mathbf{BA}).\end{aligned}$$

A második egyenlőség hasonlóan bizonyítható. □

► A fenti összefüggésekből következik, hogy bármely két négyzetes mátrixra $\operatorname{trace}(\mathbf{AB}-\mathbf{BA}) = 0$.

► Az $\mathbf{x}$ vektor hosszának négyzete $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} = \sum_i x_i^2$. Ennek általánosításaként tekinthetünk a (7.4) képletre. Valóban, e kifejezést fogjuk használni a hosszúság és a skaláris szorzat fogalmának általánosításakor.

► A 7.3 képlet nem általánosítható tetszőleges többtagú szorzatokra, csak a ciklikus átrendezéssel kapottakra. Ugyan $\operatorname{trace}(\mathbf{ABC}) = \operatorname{trace}(\mathbf{BCA}) = \operatorname{trace}(\mathbf{CAB})$, de $\operatorname{trace}(\mathbf{ABC}) \neq \operatorname{trace}(\mathbf{BAC})$ (ld. 7.1. feladat).

Feladatok

7.1. Adjunk példát olyan mátrixokra, melyekre $\operatorname{trace}(\mathbf{ABC}) \neq \operatorname{trace}(\mathbf{BAC})$.

2- és 3-dimenziós geometriai transzformációk mátrixa

E fejezetben néhány geometriailag jól leírható $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixát fogjuk megkonstruálni.

Forgatás a síkban A 7.9. tétel bizonyításában megmutattuk, hogy az $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezéshez tartozó mátrixleképezés mátrixa

$$\mathbf{A} = [A\mathbf{e}_1 | A\mathbf{e}_2 | \dots | A\mathbf{e}_n] .$$

Ezt fogjuk használni a következőkben.

7.15. ÁLLÍTÁS (A FORGATÁS MÁTRIXA). *A sík vektorait egy pont körül α szöggel elforgató leképezés mátrixa*

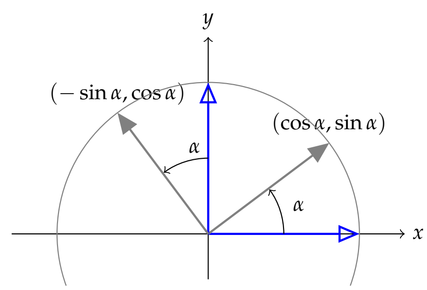
$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} .$$

BIZONYÍTÁS. A 7.7. állítás szerint a forgatás lineáris leképezés, így van mátrixa, melynek alakja $[A\mathbf{i}\ A\mathbf{j}]$, ahol $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ jelöli az $\mathbb{R}^2$ standard bázisának elemeit. E vektorokat szemlélteti a 7.10 ábra.

Az $A\mathbf{i}$ vektor megegyezik $\mathbf{i}$ elforgatottjával, amelynek ismerjük koordinátáit: $A\mathbf{i} = \left[\begin{smallmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{smallmatrix}\right]$. A $\mathbf{j}$ vektor α szöggel való elforgatottja megegyezik az $A\mathbf{i}$ vektor $\pi/2$ szöggel való elforgatottjával, azaz $A\mathbf{j} = \left[\begin{smallmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{smallmatrix}\right]$. Így az A-hoz tartozó mátrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A\mathbf{i} & A\mathbf{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Tehát egy $\mathbf{x}$ vektor α szöggel való elforgatottja $\mathbf{A}\mathbf{x} = \left[\begin{smallmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{smallmatrix}\right]\mathbf{x}$. □



7.10. ábra: Az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ vektorok α szöggel való elforgatottjai

7.16. PÉLDA (FORGATÁS EGY TETSZŐLEGES PONT KÖRÜL). *Határozzuk meg a koordinátáit a $(4,3)$ pont $(2,1)$ körül $\pi/3$ radiánnal való elforgatásával kapott pontnak!*

MEGOLDÁS. A forgatás középpontját toljuk az origóba, így a $(4,3)$ pont a $(4,3) - (2,1) = (2,2)$ pontba kerül. E pontot, illetve az oda mutató helyvektort forgassuk el $\pi/3$ radiánnal, azaz $60°$-kal. Ez a forgatás mátrixával való beszorzással megkapható:

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

E pontot a $(2,1)$ vektorral eltoljuk, hogy ne az origó, hanem a $(2,1)$

pont körüli elforgatottat kapjuk meg:

$$\begin{bmatrix}1-\sqrt{3}\\1+\sqrt{3}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-\sqrt{3}\\2+\sqrt{3}\end{bmatrix}$$ □

7.17. példa (Koordinátatengely körüli forgatás a térben). *Írjuk fel a koordinátatengelyek körüli α szöggel való forgatás mátrixát.*

Megoldás. Tekintsük először a z-tengely körüli forgatást. Ekkor az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ vektorok úgy transzformálódnak, mint a sík elforgatásánál, míg a $\mathbf{k}$ vektor helyben marad, tehát a bázisvektorok így transzformálódnak:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\\0\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}-\sin\alpha\\\cos\alpha\\0\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Így a z-tengely körüli forgatás mátrixa:

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Hasonlóképp kapjuk az x- és az y-tengely körüli forgatás mátrixát is:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}\cos\alpha & 0 & \sin\alpha\\0 & 1 & 0\\-\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{bmatrix}.$$

Ez utóbbi mátrix előjelhibásnak tűnhet, de nem az, ha itt is a forgatás tengelyiránya felől nézve pozitív a forgásirány, azaz $\mathbf{k}$-t forgatjuk $\mathbf{i}$-be, és nem fordítva. □

7.18. példa (A forgatás mátrixának inverze). *Határozzuk meg a síkot α szöggel elforgató mátrix inverzét!*

Megoldás. Először megállapítjuk, hogy a forgatás mátrixa invertálható, ugyanis determinánsa nem 0, hiszen $\begin{vmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\\sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$. Az egyik lehetséges megoldás, hogy egyszerűen a 2×2-es mátrixok 5.13. tételben megadott képletét használjuk:

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\-\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}.$$

Egy másik megoldás: a **??** állítás szerint két mátrix pontosan akkor inverze egymásnak, ha a hozzájuk tartozó lineáris leképezések is inverzei egymásnak. Az α szöggel való elforgatásnak, mint leképezésnek az inverze a $-\alpha$ szöggel való elforgatás, tehát mátrixaik is egymás inverzei. Eszerint

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha)\\\sin(-\alpha) & \cos(-\alpha)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\-\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}.$$ □

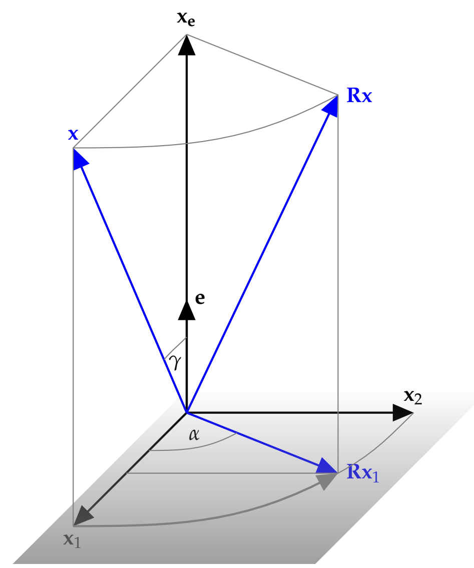
*Egyenes körüli forgatás a térben** A tér egy egyenese körüli forgatás mátrixa megadható a vektori szorzással definiált mátrixleképezés (7.1. példa) segítségével.

7.19. TÉTEL (EGYENES KÖRÜLI FORGATÁS – RODRIGUES-FORMULA). *Ha* $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^3$ *egységvektor, akkor az* $\mathbf{e}$ *egyenese körüli* α *szögű forgatás tetszőleges* $\mathbf{x}$ *vektort az*

$$\mathbf{x}\cos\alpha + (\mathbf{e}\times\mathbf{x})\sin\alpha + \mathbf{e}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{x})(1-\cos\alpha) \tag{7.5}$$

vektorba visz. E leképezés mátrixa

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \mathbf{I} + \sin\alpha[\mathbf{e}]_\times + (1-\cos\alpha)[\mathbf{e}]_\times^2 \\ &= \mathbf{I} + \sin\alpha[\mathbf{e}]_\times + (1-\cos\alpha)(\mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T} - \mathbf{I})\end{aligned} \tag{7.6}$$



BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{x}$ párhuzamos $\mathbf{e}$-vel, akkor elforgatottja önmaga, és valóban, ekkor $(\mathbf{e}\times\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ és $\mathbf{e}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, így a (7.5) képlet $\mathbf{x}$-et ad eredményül.

A továbbiakban legyen tehát $\mathbf{x}$ az $\mathbf{e}$-vel nem párhuzamos vektor. Jelölje $\mathbf{x}$-nek az $\mathbf{e}$-re eső merőleges vetületét $\mathbf{x_e}$, azaz legyen

$$\mathbf{x_e} = (\mathbf{e}\cdot\mathbf{x})\mathbf{e}.$$

Jelölje továbbá az $\mathbf{x}$ vektornak az $\mathbf{e}$-re merőleges síkra eső merőleges vetületét $\mathbf{x}_1$, azaz

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} - (\mathbf{e}\cdot\mathbf{x})\mathbf{e}.$$

Végül legyen $\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}\times\mathbf{x}$. Világos, hogy $\mathbf{x}_1 \perp \mathbf{x}_2$. E két vektor hossza:

$$\begin{aligned}|\mathbf{x}_1| &= |\mathbf{x}|\sin\gamma,\\ |\mathbf{x}_2| &= |\mathbf{e}||\mathbf{x}|\sin\gamma = |\mathbf{x}|\sin\gamma,\end{aligned}$$

tehát $|\mathbf{x}_1| = |\mathbf{x}_2|$. Ha R jelöli a forgató leképezést, akkor

$$\begin{aligned}R\mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_1\cos\alpha + \mathbf{x}_2\sin\alpha\\ &= (\mathbf{x} - (\mathbf{e}\cdot\mathbf{x})\mathbf{e})\cos\alpha + (\mathbf{e}\times\mathbf{x})\sin\alpha.\end{aligned}$$

Mivel $R\mathbf{x_e} = \mathbf{x_e}$, és $\mathbf{x} = \mathbf{x_e} + \mathbf{x}_1$, ezért

$$\begin{aligned}R\mathbf{x} &= R\mathbf{x_e} + R\mathbf{x}_1\\ &= (\mathbf{e}\cdot\mathbf{x})\mathbf{e} + (\mathbf{x} - (\mathbf{e}\cdot\mathbf{x})\mathbf{e})\cos\alpha + (\mathbf{e}\times\mathbf{x})\sin\alpha\\ &= \mathbf{x}\cos\alpha + (\mathbf{e}\times\mathbf{x})\sin\alpha + \mathbf{e}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{x})(1-\cos\alpha).\end{aligned}$$

Ezzel igazoltuk a (7.5) formulát. A leképezés könnyen átírható mátrix-szorzat alakba:

$$\cos\alpha\mathbf{I}\mathbf{x} + [\mathbf{e}]_\times\mathbf{x}\sin\alpha + (1-\cos\alpha)(\mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T})\mathbf{x},$$

így a forgatás $\mathbf{R}$ mátrixa

$$\mathbf{R} = \cos\alpha\mathbf{I} + \sin\alpha[\mathbf{e}]_\times + (1-\cos\alpha)(\mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T}).$$

Egyszerű számolással igazolható, hogy $\mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T} - \mathbf{I} = [\mathbf{e}]_\times^2$ (ld. **??** feladat), amiből azonnal adódnak a (7.6) képletei. □

7.20. PÉLDA (FORGATÁS MÁTRIXA). *Írjuk fel annak a leképezésnek a mátrixát, mely az $(2,0,1)$ vektor egyenese körül α szöggel forgat, ahol $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. Határozzuk meg a $(3,2,-1)$ vektor elforgatottját! Más eredményt kapnánk-e, ha a $(-2,0,-1)$ vektor egyenese körül kéne forgatnunk α szöggel?*

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1)$ egységvektorral

$$[\mathbf{e}]_\times = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{e}]_\times^2 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Így rövid számolás után a forgatás mátrixa

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{I} + \sin\alpha[\mathbf{e}]_\times + (1-\cos\alpha)[\mathbf{e}]_\times^2 \\ &= \begin{bmatrix} 14/15 & -1/3 & 2/15 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/15 & 2/3 & 11/15 \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 14 & -5 & 2 \\ 5 & 10 & -10 \\ 2 & 10 & 11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

és $\mathbf{R} \cdot (3,2,-1) = (2,3,1)$.

A $(-2,0,-1)$ vektor körüli forgatással más eredményt kapnánk, hisz a forgatás iránya a vektor irányától is függ, és mivel az az ellenkezőjére változott, így a forgásirány is ellenkező irányú lesz. □

► Az térbeli egyenes körüli forgatás kvaterniókkal (ld. **??** oldal) is számolható. Egy másik lehetőség, hogy visszavezetjük az egyenes körüli forgatást koordinátatengely körüli forgatásra (ld. a **??** feladatot).

Merőleges vetítés A merőlegesség mind az elméleti matematika, mind az alkalmazások fontos fogalma.

7.21. ÁLLÍTÁS (EGYENESRE VALÓ MERŐLEGES VETÍTÉS MÁTRIXA). *A sík vagy a tér vektorait egy $\mathbf{b}$ irányvektorú egyenesre merőlegesen vetítő leképezés mátrixa*

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b}}\mathbf{b}\mathbf{b}^\mathsf{T}. \tag{7.7}$$

Speciálisan e mátrix alakja

$$\mathbf{P} = \mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T}, \tag{7.8}$$

ha az egyenes irányvektora az $\mathbf{e}$ egységvektor.

BIZONYÍTÁS. A 7.7. állítás szerint a merőleges vetítés lineáris leképezés, van tehát mátrixa. Az 1.23. tétel szerint ha $\mathbf{x}$ egy tetszőleges vektor és $\mathbf{e}$ egy egységvektor, akkor $\mathbf{x}$-nek a $\mathbf{e}$ egyenesére eső merőleges vetülete

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{e}} \mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}) \cdot \mathbf{e}.$$

Ennek mátrixszorzással való átírása:

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} = \mathbf{e}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{e}(\mathbf{e}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}) = (\mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathsf{T}})\mathbf{x},$$

tehát

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{e}} \mathbf{x} = (\mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathsf{T}})\mathbf{x}.$$

Ebből kiolvasható, hogy az $\mathbf{e}$ egységvektor-irányú egyenesre való merőleges vetítés mátrixa

$$\mathbf{P} = \mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathsf{T}}.$$

Ha $\mathbf{b}$ egy tetszőleges zérustól különböző vektor, akkor az $\mathbf{e} = \mathbf{b}/|\mathbf{b}|$ jelölés mellett $\mathbf{P} = \mathbf{e}\mathbf{e}^{\mathsf{T}} = \mathbf{b}\mathbf{b}^{\mathsf{T}}/|\mathbf{b}|^2$, ami $|\mathbf{b}|^2 = \mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{b}$ behelyettesítésével bizonyítja a tételt. □

► A tételből következik, hogy a sík vektorait az x-tengellyel α szöget bezáró egyenesre merőlegesen vetítő lineáris leképezés mátrixa

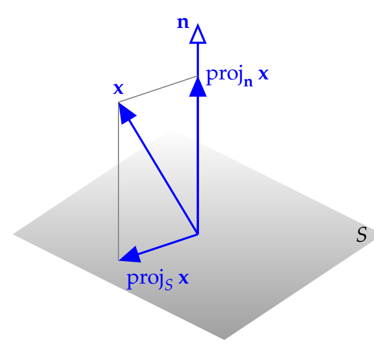
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}, \tag{7.9}$$

mivel ekkor $\mathbf{e} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.

7.22. ÁLLÍTÁS (SÍKRA VALÓ MERŐLEGES VETÍTÉS MÁTRIXA). *A tér vektorait az $\mathbf{n}$ normálvektorú síkra merőlegesen vetítő leképezés mátrixa*

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}.$$

BIZONYÍTÁS. Egy tetszőleges $\mathbf{x}$ vektornak a normálvektor egyenesére eső merőleges vetülete a 7.21. állítás szerint $\operatorname{proj}_{\mathbf{n}} \mathbf{x} = (\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}})\mathbf{x}$. Az $\mathbf{n}$ normálvektorú S síkra eső merőleges vetületre $\operatorname{proj}_S \mathbf{x} = \mathbf{x} - \operatorname{proj}_{\mathbf{n}} \mathbf{x} = \mathbf{x} - (\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}})\mathbf{x}$ (lásd a 7.11. ábrát). Ebből következik, hogy a síkra való merőleges vetítés mátrixa $\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}$.



7.11. ábra: Vektor vetülete egy síkra

7.23. PÉLDA (SÍKRA ESŐ MERŐLEGES VETÜLET KISZÁMÍTÁSA). *Határozzuk meg a $(-2, 1, 3)$ vektornak a $2x + y - 2z = 0$ egyenletű síkra eső merőleges vetületét! (ld. később a 7.45. példát)*

MEGOLDÁS. A sík egy normálvektora $(2, 1, -2)$, így az egységnyi hosszú normálvektor $\mathbf{n} = (2/3, 1/3, -2/3)$. A $\mathbf{P}$ vetítő mátrix

$$\mathbf{P} = \mathbf{I}_3 - \mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Így a $(-2,1,3)$ vektor merőleges vetülete

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

□

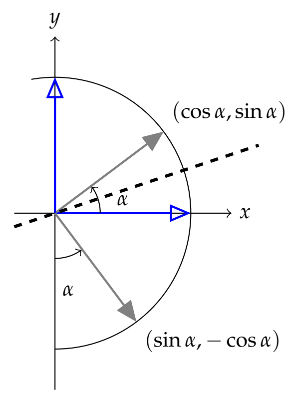
Tükrözés Vizsgáljuk meg síkban az egyenesre való és térben a síkra való tükrözés mátrixát!

7.24. ÁLLÍTÁS (SÍKBELI TÜKRÖZÉS MÁTRIXA). *A sík vektorait az x-tengellyel $\alpha/2$ szöget bezáró egyenesre tükröző lineáris leképezés mátrixa*

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}.$$

BIZONYÍTÁS. a 7.7. állítás szerint a tükrözés lineáris leképezés. A vektorok tükörképe csak a tükrözés tengelyének állásától függ, ami most $\alpha/2$. Helyvektorokban gondolkodva a tükrözés tengelyének át kell mennie az origón.

A mellékelt ábráról leolvasható, hogy $\mathbf{i}$ tükörképe $A\mathbf{i} = \left[\begin{smallmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{smallmatrix}\right]$, míg a $\mathbf{j}$ vektoré $A\mathbf{j} = \left[\begin{smallmatrix}\sin\alpha \\ -\cos\alpha\end{smallmatrix}\right]$. Így a sík vektorait az első tengellyel $\alpha/2$ szöget bezáró egyenesre tükröző leképezés mátrixa $\left[\begin{smallmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{smallmatrix}\right]$. □



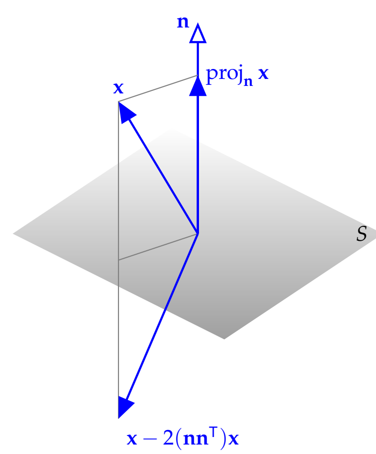
7.12. ábra: Az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ vektorok egy egyenesre való tükörképe

A térben egy síkra való tükrözés feladata a síkra való vetítéshez hasonlóan adódik:

7.25. ÁLLÍTÁS (SÍKRA VALÓ TÜKRÖZÉS MÁTRIXA). *Igazoljuk, hogy a tér vektorait az $\mathbf{n}$ normálvektorú síkra tükröző leképezés mátrixa*

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^\mathsf{T}.$$

BIZONYÍTÁS. A 7.22. állításhoz hasonlóan minden leolvasható a mellékelt 7.13. ábráról: ha $\mathbf{x}$-ből kivonjuk a $\mathrm{proj}_\mathbf{n}\,\mathbf{x}$ vektort, akkor a síkra eső vetületet kapjuk, így ha a kétszeresét vonjuk ki, a tükörképhez jutunk. E leképezés mátrixa az $\mathbf{x} - 2(\mathbf{n}\mathbf{n}^\mathsf{T})\mathbf{x} = (\mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^\mathsf{T})\mathbf{x}$ összefüggésből adódik.



7.13. ábra: Vektor tükörképe egy síkra

Vetítés Tárgyaltuk a merőleges vetítést. Vetíteni azonban másként is lehet.

7.26. PÉLDA (VETÍTÉS SÍKRA). *Határozzuk meg annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, mely a tér összes pontját az $(1,-2,1)$ vektorral párhuzamos irányban az $x + y + 2z = 0$ egyenletű síkra vetíti.*

MEGOLDÁS. Elemi geometriai eszközökkel könnyen látható, hogy e leképezés valóban lineáris. Világos, hogy a képtér az $x + y + 2z = 0$

egyenletű sík összes vektora lesz. E teret megkapjuk a sík egyenletéből, ha azt mint egyenletrendszert megoldjuk. A megoldás $(-s-2t, s, t)$, azaz e tér egy bázisa a $(-1,1,0)$, és a $(-2,0,1)$ vektorokból áll. Könnyen látható az is, hogy a nulltérbe pontosan azok a vektorok tartoznak, amelyek párhuzamosak a vetítő vektorral, azaz az $(1,-2,1)$ vektorral. A vetítés $\mathbf{P}$ mátrixa tehát eleget kell hogy tegyen az alábbi feltételeknek:

$$\mathbf{P}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \mathbf{P}\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{P}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

E három feltétel egyetlen mátrixszorzásba foglalható:

$$\mathbf{P}\begin{bmatrix}-1&-2&1\\1&0&-2\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-2&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\text{ ahonnan }\mathbf{P}=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\2&3&4\\-1&-1&-1\end{bmatrix}\square$$

► Az előző feladatban kapott $\mathbf{P}$ mátrix eleget tesz a $\mathbf{P}^2=\mathbf{P}$ összefüggésnek. Ez szemléletesen világos is, hisz ha P jelöli a lineáris transzformációt, akkor arra is igaz, hogy $P^2=P$. Ez abból következik, hogy a P vetítés az $x+y+2z=0$ egyenletű sík minden vektorát helyben hagyja, másrész bármely $\mathbf{x}$ vektor esetén $P\mathbf{x}$ ebben a síkban van, így a második vetítés már minden vektort helyben hagy.

Eltolás Az eltolás nem lineáris leképezés, hisz minden vektorhoz egy konstans vektort ad, tehát a nullvektort nem a nullvektorba képzi. Egy szellemes ötlettel mégis megvalósítható lineáris leképezéssel.

El szeretnénk tolni a síkot egy (a,b) vektorral. Az ötlet az, hogy beágyazzuk a síkot a térbe, és ott keresünk egy olyan térbeli lineáris leképezést, amely ezt a síkot eltolja (hogy másutt meg mit csinál, nem is érdekes). Legyen tehát a vizsgált sík a $z=1$ egyenletű sík, és keressük azt a lineáris T leképezést, melyre

$$T\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+a\\y+b\\1\end{bmatrix}.$$

Ez ugyan még mindig nem tűnik lineárisnak, de mivel $z=1$, ezért a

$$T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+az\\y+bz\\z\end{bmatrix}$$

leképezés már minden tekintetben megfelel. E leképezés mátrixa

$$\mathbf{T}=T\begin{bmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&a\\0&1&b\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Hasonló ötlettel a tér eltolása is megvalósítható. A tér tetszőleges $(x, y, z) \mapsto (x+a, y+b, z+c)$ eltolása megvalósítható a következő mátrixleképezéssel:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ z+c \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Feladatok

Forgatás

7.2. Adjunk új megoldást a 7.20. példabeli kérdésre: írjuk fel annak a leképezésnek a mátrixát, mely az $(2,0,1)$ vektor egyenese körül α szöggel forgat, ahol $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. (Először forgassuk a $(2,0,1)$ vektor egyenesét az x-tengelybe, majd e körül forgassuk el a tér vektorait!)

Bizonyítások

7.3. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $H \subseteq \mathbb{R}^n$ vektorhalmazra a következő két állítás ekvivalens:

1. bármely véges sok H-beli vektor bármely lineáris kombinációja H-ban van;

2. bármely H-beli vektor tetszőleges skalárszorosa, és bármely két H-beli vektor összege H-ban van.

7.4. **Lineáris függetlenség egy szükséges és elégséges feltétele** A V vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha $\operatorname{span}(V)$ bármely vektora csak egyféleképp áll elő V lineáris kombinációjaként.

7.5. **Sortér és nulltér** A 2.35. példában megoldottuk a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. A megoldása

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Ezt fölhasználva fejben számolva adjunk meg egy olyan vektorrendszert, amely kifeszíti az

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 \phantom{{}- x_3 + 2x_4 + x_5} &= 0 \\ -3x_1 \phantom{{}+ x_2} - x_3 + 2x_4 \phantom{{}+ x_5} &= 0 \\ -x_1 \phantom{{}+ x_2 - x_3 + 2x_4} + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alterét.

7.6. Általánosítsuk az előző feladat eredményét tetszőleges homogén lineáris egyenletrendszerre!

Hasonlóság

Mátrixok hasonlósága kulcsfogalom: látni fogjuk, hogy két mátrix pontosan akkor hasonló, ha ugyanannak a lineáris leképezésnek a mátrixai egy-egy megfelelő bázisban.

Lineáris transzformáció mátrixa különböző bázisokban Tegyük fel, hogy az L lineáris transzformáció mátrixa az $\mathcal{A}$ bázisban $\mathbf{L}_{\mathcal{A}}$, a $\mathcal{B}$ bázisban $\mathbf{L}_{\mathcal{B}}$, és az $\mathcal{A}$ bázisról a $\mathcal{B}$-re való áttérés mátrixa $\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$. Kérdés, hogy mi a kapcsolat e három mátrix között.

A válasz egyszerűen megadható, ha megvizsgáljuk egy tetszőleges $\mathbf{x}$ vektornak és $L\mathbf{x}$ képének koordinátás alakját. Ezeket jelölje $[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}$, $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$, $[L\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}$, $[L\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$. Az áttérés mátrixa köztük a következő kapcsolatokat létesíti:

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}, \quad [L\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}[L\mathbf{x}]_{\mathcal{A}},$$

az $\mathbf{L}_{\mathcal{A}}$ és $\mathbf{L}_{\mathcal{B}}$ mátrixok pedig a következőket:

$$\mathbf{L}_{\mathcal{A}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}} = [L\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}, \quad \mathbf{L}_{\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [L\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}.$$

Ezeket összevetve kapjuk, hogy

$$\mathbf{L}_{\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = [L\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}[L\mathbf{x}]_{\mathcal{A}} = \mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathbf{L}_{\mathcal{A}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}},$$

azaz

$$\mathbf{L}_{\mathcal{B}}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}} = \mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathbf{L}_{\mathcal{A}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}$$

vagyis csak mátrixokra fölírva:

$$\mathbf{L}_{\mathcal{B}}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} = \mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathbf{L}_{\mathcal{A}} \text{ vagy átrendezve } \mathbf{L}_{\mathcal{A}} = \mathbf{C}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathbf{L}_{\mathcal{B}}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}.$$

A bizonyítás – és általában e mátrixok közti összefüggés – egy diagrammon is szemléltethető. A diagramm csúcsaiban az $\mathbf{x}$ és az $L\mathbf{x}$ vektorok szerepelnek. A függőleges nyilak az $\mathcal{A}$ bázisról a $\mathcal{B}$-re való áttérés irányát mutatják. Ebbe az irányba lépve az eredmény a $\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ mátrixszal való szorzással kapható meg. A vízszintes nyilak az L transzformáció hatását mutatják. Ezirányba lépve az $\mathbf{L}_{\mathcal{A}}$, illetve $\mathbf{L}_{\mathcal{B}}$ mátrixszal való szorzás adja meg az eredményt. A bal alsó sarokban lévő $[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}$ vektorból a jobb felsőben lévő $[L\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ vektorba kétféleképp juthatunk: vagy először hat az L transzformáció, aztán áttérünk a $\mathcal{B}$ bázisra, vagy előbb áttérünk a $\mathcal{B}$ bázisra, és azután hat L. Tehát

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathbf{L}_{\mathcal{A}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathbf{L}_{\mathcal{A}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}},$$
$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathbf{L}_{\mathcal{B}}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}.$$

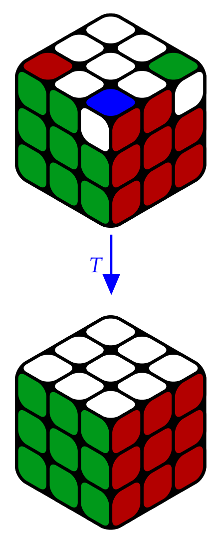
A két végeredménynek meg kell egyeznie. Így ugyanazt kaptuk, amit behelyettesítésekkel. Összefoglalva tehát bizonyítottuk az alábbi tételt:

$$\begin{tikzcd}
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "\mathbf{L}_{\mathcal{B}}"] & {[L\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \\
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}} \arrow[u, "\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"] \arrow[r, "\mathbf{L}_{\mathcal{A}}"'] & {[L\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}} \arrow[u, "\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"']
\end{tikzcd}$$

7.14. ábra: A vízszintes nyilak az L transzformáció hatását mutatják. E hatás elérhető az $\mathbf{L}_{\mathcal{A}}$, illetve az $\mathbf{L}_{\mathcal{B}}$ mátrixszal való szorzással. A függőleges nyilak a báziscsere irányát mutatják, ami a $\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ mátrixszal való szorzással valósítható meg. Az ábráról leolvasható a $\mathbf{L}_{\mathcal{B}}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} = \mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathbf{L}_{\mathcal{A}}$ összefüggés.

$$\begin{tikzcd}
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "\mathbf{L}_{\mathcal{B}}"] & {[L\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[d, "\mathbf{C}_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}} ="', "\mathbf{C}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"] \\
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}} \arrow[u, "\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"] \arrow[r, "\mathbf{L}_{\mathcal{A}}"'] & {[L\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}}
\end{tikzcd}$$

7.15. ábra: Ezt az ábrát az előzőből egyetlen nyil és felirata megváltoztatásával kaptuk. Erről közvetlenül leolvasható az $\mathbf{L}_{\mathcal{A}} = \mathbf{C}_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{L}_{\mathcal{B}}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$, illetve az $\mathbf{L}_{\mathcal{A}} = \mathbf{C}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathbf{L}_{\mathcal{B}}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ összefüggés. Ehhez az $[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}$-ból az $[L\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}$-ba vezető két utat kell bejárnunk, és közben a megfelelő mátrixokat összeszoroznunk.



7.16. ábra: A T transzformáció a bűvös kocka egy lapon lévő 3 csúcsát ciklikusan fölcseréli egymással (a jobb felső sarokban lévőt a bal sarokba, azt a középsőbe viszi), az összes többit helyben hagyja.

7.27. tétel (Lineáris transzformáció mátrixai közti kapcsolat). *Legyen az L lineáris transzformáció mátrixa az $\mathcal{A}$ bázisban $\mathbf{L}_\mathcal{A}$, a $\mathcal{B}$ bázisban $\mathbf{L}_\mathcal{B}$, és az $\mathcal{A}$ bázisról a $\mathcal{B}$-re való áttérés mátrixa $\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$. Ekkor*

$$\mathbf{L}_\mathcal{A} = \mathbf{C}_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{L}_\mathcal{B}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}. \text{ azaz } \mathbf{L}_\mathcal{A} = \mathbf{C}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathbf{L}_\mathcal{B}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}.$$

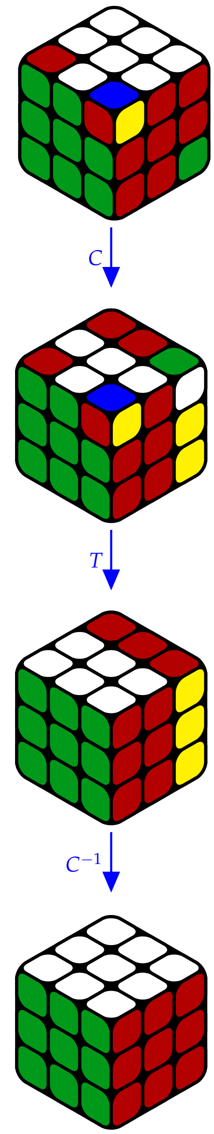
7.28. példa (Lineáris transzformáció mátrixa másik bázisban). *Az L lineáris transzformáció mátrixa $\mathbf{L} = \left[\begin{smallmatrix}-1 & 6\\ -2 & 6\end{smallmatrix}\right]$. Írjuk fel mátrixát az $\mathcal{B} = \{(-2,-1),(3,2)\}$ bázisban!*

Megoldás. A megadott $\mathcal{B}$ bázisról a standard $\mathcal{E}$ bázisra való áttérés mátrixa a bázisvektorokból, mint oszlopvektorokból áll, azaz

$$\mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}.$$

Ekkor az $\mathbf{L} = \mathbf{L}_\mathcal{E}$ jelölést használva

$$\mathbf{L}_\mathcal{B} = \mathbf{C}^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{L}_\mathcal{E}\mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1 & 6\\ -2 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}. \quad \square$$



7.17. ábra: A fölső kockán látható három csúcskockát kell kicserélni. Először a három csúcsot egy síkba mozgatjuk (C transzformáció), majd az előző ábrán látható T transzformációval kicseréljük őket, végül C inverzének alkalmazása után minden kocka a helyére kerül. Így a transzformációk egymás utáni elvégzését szorzásnak tekintve a megoldást a CTC^{-1} transzformáció adja.

Mátrixok hasonlósága Tudjuk, hogy ha egy L lineáris transzformációnak egy $\mathcal{A}$ bázisban $\mathbf{A}$ a mátrixa, egy $\mathcal{B}$ bázisban $\mathbf{B}$, akkor a két mátrix kapcsolata

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathbf{A}\mathbf{C}_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}},$$

ahol $\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} = \mathbf{C}^{-1}_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}$ az áttérés mátrixa. E tény motiválja a következő definíciót:

7.29. definíció (Hasonlóság). *Azt mondjuk, hogy az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix* hasonló *a $\mathbf{B}$ mátrixhoz, ha létezik olyan invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy*

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}. \tag{7.10}$$

Jelölés: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

► Ha $\mathbf{A}$ hasonló $\mathbf{B}$-hez, akkor $\mathbf{B}$ is hasonló $\mathbf{A}$-hoz. Legyen ugyanis $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^{-1}$. Akkor

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1} = (\mathbf{C}^{-1})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1} = \hat{\mathbf{C}}^{-1}\mathbf{B}\hat{\mathbf{C}}.$$

Így tehát mondható az, hogy $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ hasonlóak, mivel a hasonlóság szimmetrikus reláció.

► Például $\left[\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right] \sim \left[\begin{smallmatrix}-6 & 4\\ -9 & 6\end{smallmatrix}\right]$, ugyanis

$$\begin{bmatrix}-6 & 4\\ -9 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & -1\\ -3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix}, \qquad \left(\mathbf{C} = \begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix}\right).$$

► A $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$ összefüggés ekvivalens a $\mathbf{CB} = \mathbf{AC}$ összefüggéssel (invertálható $\mathbf{C}$ esetén), és ezt az összefüggést egyszerűbb lehet ellenőrizni. Példánk esetében

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \left(= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right).$$

► A $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$ alakú kifejezést az $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{C}$-vel való *konjugáltjának* nevezik. A konjugált más algebrai struktúrákban is fontos szerepet kap. Példaként véges halmazok permutációinak struktúráját említjük, ahol permutációk szorzatán egymás után való elvégzésüket értjük, aminek eredménye a halmaz egy permutációja. Konkrétan a Rubik kockán mutatjuk meg a konjugált szerepét a 7.16. és a 7.17. ábrák segítségével.

7.30. tétel (Hasonló mátrixok hatása). *Két mátrix pontosan akkor hasonló, ha van két olyan bázis, melyekben e két mátrix ugyanannak a lineáris transzformációnak a mátrixa.*

Bizonyítás. Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ hasonlóak, azaz $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$, akkor $\mathbf{C}$-t, mint a $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ bázisról az $\mathcal{E}$ standard bázisra való áttérés mátrixát tekintve azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}.$$

Eszerint ha L az $\mathbf{A}$ mátrixhoz tartozó mátrixleképezés, azaz $\mathbf{A}$ az L mátrixa a standard bázisban, akkor $\mathbf{B}$ az L mátrixa a $\mathcal{C}$ bázisban. A fordított állítást a bevezetőben igazoltuk. □

7.31. tétel (Hasonlóságra invariáns tulajdonságok). *Ha* $\mathbf{A}$ *és* $\mathbf{B}$ *hasonló mátrixok, azaz* $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, *akkor*

a) $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{B})$,

b) $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = \dim(\mathcal{N}(\mathbf{B}))$,

c) $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$,

d) $\operatorname{trace}(\mathbf{A}) = \operatorname{trace}(\mathbf{B})$.

A latin eredetű *invariáns* szó jelentése: *átalakulás közben változatlanul maradó*. Matematikában valamilyen művelet, átalakítás, leképezés során változatlanul maradó kifejezés, mennyiség, érték. Esetünkben a bázis megváltoztatása után is változatlanul maradó mennyiségeket jelenti.

Bizonyítás. A tétel első két állítása azonnal látszik abból, hogy a hasonló mátrixokhoz az előző tétel szerint létező lineáris transzformáció képtere (nulltere) az egyik bázisban az egyik, a másik bázisban a másik mátrix oszlopterével (nullterével) egyezik meg. Mindennek ellenére mindegyik állítást bizonyítjuk arra építva, hogy valamely invertálható $\mathbf{C}$ mátrixszal $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{BC}$ és átrendezve $\mathbf{B} = \mathbf{CAC}^{-1}$.

a) A szorzatmátrix rangjára vonatkozó 4.33. állítás szerint $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{BC}) \leqslant \mathrm{r}(\mathbf{B})$ és $\mathrm{r}(\mathbf{B}) = \mathrm{r}(\mathbf{CAC}^{-1}) \leqslant \mathrm{r}(\mathbf{A})$. Innen $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{B})$.

b) $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = n - \mathrm{r}(\mathbf{A}) = n - \mathrm{r}(\mathbf{B}) = \dim(\mathcal{N}(\mathbf{B}))$.

c) $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{BC}) = \det(\mathbf{C}^{-1})\det(\mathbf{B})\det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{B})$, mivel $\det(\mathbf{C})\det(\mathbf{C}^{-1}) = 1$.

d) $\operatorname{trace}(\mathbf{A}) = \operatorname{trace}(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}) = \operatorname{trace}(\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}) = \operatorname{trace}(\mathbf{B})$, és itt kihasználtuk, hogy két mátrix szorzatának nyoma nem változik, ha a tényezők sorrendjét felcseréljük. □

Lineáris leképezés mátrixa különböző bázispárokban Legyen a $\mathcal{U}$ vektortér két bázisa $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$, a $\mathcal{V}$ vektortér két bázisa $\mathcal{A}'$ és $\mathcal{B}'$. Tegyük fel, hogy az $L : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ lineáris leképezés mátrixa az $\{\mathcal{A}, \mathcal{A}'\}$ bázispárban $\mathbf{L}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{A}}$, a $\{\mathcal{B}, \mathcal{B}'\}$ bázispárban $\mathbf{L}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}$, és a bázisok közti áttérések mátrixai $\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$, illetve $\mathbf{D}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{A}'}$. Mi a kapcsolat e mátrixok között?

$$\begin{tikzcd}
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "\mathbf{L}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}"] & {[L\mathbf{x}]_{\mathcal{B}'}} \arrow[d, "\mathbf{D}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{B}'} = \mathbf{D}^{-1}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{A}'}"] \\
{[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}} \arrow[u, "\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"] \arrow[r, "\mathbf{L}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{A}}"'] & {[L\mathbf{x}]_{\mathcal{A}'}}
\end{tikzcd}$$

7.18. ábra: Az ábráról leolvasható az $\mathbf{L}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{A}} = \mathbf{D}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{B}'}\mathbf{L}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$, illetve az $\mathbf{L}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{A}} = \mathbf{D}^{-1}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{A}'}\mathbf{L}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ összefüggés. Ehhez az $[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}$-ból az $[L\mathbf{x}]_{\mathcal{A}'}$-be vezető két utat kell bejárnunk, és közben a megfelelő mátrixokat összeszoroznunk.

Jelölje az $\mathbf{x}$ és $L\mathbf{x}$ vektorok koordinátás alakját $[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}$, $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$, $[L\mathbf{x}]_{\mathcal{A}'}$, $[L\mathbf{x}]_{\mathcal{B}'}$. Az áttérés mátrixa köztük a következő kapcsolatokat létesíti:

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}, \quad [L\mathbf{x}]_{\mathcal{B}'} = \mathbf{D}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{A}'}[L\mathbf{x}]_{\mathcal{A}'},$$

az $\mathbf{L}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{A}}$ és $\mathbf{L}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}$ mátrixok pedig a következőket:

$$[L\mathbf{x}]_{\mathcal{A}'} = \mathbf{L}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{A}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}, \quad [L\mathbf{x}]_{\mathcal{B}'} = \mathbf{L}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}.$$

A megfelelő behyelyettesítésekkel kapjuk, hogy

$$\mathbf{L}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}} = \mathbf{D}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{A}'}\mathbf{L}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{A}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{A}}.$$

Ezzel bizonyítottuk a következő tételt:

7.32. TÉTEL (LINEÁRIS LEKÉPEZÉS MÁTRIXAI KÖZTI KAPCSOLAT). *Legyen az L lineáris leképezés mátrixa az $\{\mathcal{A}, \mathcal{A}'\}$ bázispárban $\mathbf{L}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{A}}$, a $\{\mathcal{B}, \mathcal{B}'\}$ bázispárban $\mathbf{L}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}$, és legyenek a bázisok közti áttérések mátrixai $\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$, illetve $\mathbf{D}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{A}'}$. Ekkor*

$$\mathbf{D}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{A}'}\mathbf{L}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{A}} = \mathbf{L}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}, \text{ azaz } \mathbf{L}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{A}} = \mathbf{D}^{-1}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{A}'}\mathbf{L}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}.$$

7.33. KÖVETKEZMÉNY (LINEÁRIS LEKÉPEZÉSEK MÁTRIXAI). *Ha* $\mathbf{A}$ *és* $\mathbf{B}$ *ugyanannak az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezésnek két mátrixa különböző bázispárokban, akkor*

a) a két mátrix rangja megegyezik,

b) a két mátrix nullitása megegyezik.

BIZONYÍTÁS. A 7.31. tétel bizonyításához hasonlóan: ha valamely invertálható $\mathbf{C}$ és $\mathbf{D}$ mátrixszal $\mathbf{A} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}$ és átrendezve $\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}$, akkor a szorzatmátrix rangjára vonatkozó 4.33. állítás szerint $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}) \leqslant r(\mathbf{B})$ és $r(\mathbf{B}) = r(\mathbf{D}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}) \leqslant r(\mathbf{A})$. Így $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$.

Innen $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = n - r(\mathbf{A}) = n - r(\mathbf{B}) = \dim(\mathcal{N}(\mathbf{B}))$. □

7.34. PÉLDA (LINEÁRIS LEKÉPEZÉS MÁTRIXA MÁSIK BÁZISBAN). *Az L lineáris transzformáció mátrixa $\mathbf{L} = \left[\begin{smallmatrix} -1 & 6 & 2 \\ -2 & 6 & 3 \end{smallmatrix}\right]$. Írjuk fel mátrixát az $\mathcal{B} = \{(1,0,0), (1,1,0), (2,1,1)\}$ és a $\mathcal{B}' = \{(-2,-1), (3,2)\}$ bázisok alkotta bázispárban!*

Megoldás. A megadott két bázisról a standard bázisra való áttérések mátrixai

$$\mathbf{C}_{\mathcal{E}_3\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{\mathcal{E}_2\leftarrow\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}.$$

Ekkor az $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{\mathcal{E}_2\leftarrow\mathcal{E}_3}$ jelölést használva

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}} &= \mathbf{D}^{-1}_{\mathcal{E}_2\leftarrow\mathcal{B}'}\mathbf{L}_{\mathcal{E}_2\leftarrow\mathcal{E}_3}\mathbf{C}_{\mathcal{E}_3\leftarrow\mathcal{B}}\\ &= \begin{bmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1 & 6 & 2\\ -2 & 6 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4 & 2 & 3\\ -3 & 3 & 4\end{bmatrix}. \qquad \square\end{aligned}$$

Lineáris leképezés rangja, nullitása, lineáris transzformáció determinánsa és nyoma Fontos következménye a hasonlóságra invariáns tulajdonságokról szóló tételnek, hogy a rang, a determináns és a nyom fogalma természetes módon átvihető mátrixokról véges dimenziós terek közötti lineáris leképezésekre.

7.35. definíció (Lineáris leképezés rangja és nullitása). *A lineáris $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés* rangján *képterének dimenzióját értjük, azaz* $\mathrm{r}(L) = \dim(\mathrm{Im}(L))$. *A magtér dimenzióját, azaz a* $\dim(\mathrm{Ker}(L))$ *számot a lineáris leképezés* nullitásának *nevezzük.*

7.36. definíció (Lineáris transzformáció determinánsa és nyoma). *A lineáris $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ transzformáció* $\det L$*-lel jelölt* determinánsán *(illetve* $\operatorname{trace} L$*-lel jelölt* nyomán*) az L leképezés bármely bázisban fölírt mátrixának determinánsát (illetve nyomát) értjük. A definíció értelmes, hisz e két érték mindegyike független a bázis választásától.*

7.37. példa (Rang, nullitás, determináns, nyom). *Igazoljuk az alábbi transzformációkra vonatkozó értékeket:*

Síkbeli	*rang*	*nullitás*	*determináns*	*nyom*
α-szögű forgatás	2	0	1	$2\cos\alpha$
egyenesre való tükrözés	2	0	-1	0
egyenesre való merőleges vetítés	1	1	0	1
Térbeli				
egyenes körüli α-szögű forgatás	3	0	1	$2\cos\alpha$
síkra való tükrözés	3	0	-1	1
egyenesre való merőleges vetítés	1	2	0	1
síkra való merőleges vetítés	2	1	0	2

Az állítások mindegyike kiszámolható a korábban levezetett mátrixokból, vagy egy megfelelően választott bázisban felírt mátrixából. Ezt az Olvasóra hagyjuk.

7.38. TÉTEL (DIMENZIÓTÉTEL LINEÁRIS LEKÉPEZÉSEKRE). *Legyen* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *egy lineáris leképezés. Ekkor*

$$\mathrm{r}(L) + \dim(\mathrm{Ker}(L)) = n.$$

BIZONYÍTÁS. A tétel a mátrixokra vonatkozó dimenziótétel átvitele lineáris leképezésekre. Ha $\mathbf{L}$ az L leképezés egy mátrixa, akkor $\mathrm{r}(L) = \mathrm{r}(\mathbf{L})$, $\dim(\mathrm{Ker}(L)) = \dim(\mathcal{N}(\mathbf{L}))$ és a mátrixokra vonatkozó dimenziótétel szerint $\mathrm{r}(\mathbf{L}) + \dim(\mathcal{N}(\mathbf{L})) = n$, ezért $\mathrm{r}(L) + \dim(\mathrm{Ker}(L)) = n$. □

► A tételt rang-nullitási tételnek is szokás nevezni, mivel a leképezés rangjának és nullitásának összegéről szól.

7.39. TÉTEL (LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓ DETERMINÁNSA ÉS A TÉRFOGAT). *Ha* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *egy lineáris transzformáció és az* $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ *vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata* V*, akkor az* $\{L\mathbf{a}_1, \dots, L\mathbf{a}_n\}$ *vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata* $\det(L)V$.

BIZONYÍTÁS. Legyen $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1|\mathbf{a}_2|\dots|\mathbf{a}_n]$, tehát $V = \det(\mathbf{A})$ és legyen $\mathbf{L}$ az L transzformáció standard mátrixa. Ekkor

$$\begin{aligned}\det[L\mathbf{a}_1|L\mathbf{a}_2|\dots|L\mathbf{a}_n] &= \det[\mathbf{L}\mathbf{a}_1|\mathbf{L}\mathbf{a}_2|\dots|\mathbf{L}\mathbf{a}_n] = \det(\mathbf{L}\mathbf{A})\\ &= \det(\mathbf{L})\det(\mathbf{A}) = \det(L)V.\end{aligned}$$ □

Feladatok

Mátrixleképezések

Döntsük el, hogy az alábbi leképezések mátrixleképezések-e! Amelyik igen, annak írjuk fel a mátrixát! Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ egy tetszőleges vektor.

7.7. $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$,

7.8. $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} + \mathbf{x}$,

7.9. $A : \mathbf{x} \mapsto \frac{1}{2}(\mathbf{a} \times \mathbf{x})$,

7.10. $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})$.

7.11. Mátrixleképezések közti műveletek Bizonyítsuk be a 7.2. tétel állításait!

7.12. Inverz mátrixleképezések Bizonyítsuk be a 7.3. tételt!

Lineáris leképezések

7.13. Lineáris leképezés ekvivalens definíciói Igazoljuk a 7.8. tétel állításainak ekvivalenciáját!

Döntsük el, hogy az alábbi leképezések lineáris leképezések-e!

7.14. $A : (x, y) \mapsto (x + 2y, x - y)$.

7.15. Legyen $\mathcal{P}_3$ a legföljebb 3-adfokú polinomok halmaza, és legyen $D : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3 : p(x) \mapsto p'(x)$.

7.16. Legyen $\mathcal{D}_{[0,1]}$ a $[0, 1]$ intervallumon differenciálható függvények halmaza, és $\mathcal{F}_{[0,1]}$ a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett függvények halmaza. Legyen továbbá $A : \mathcal{D}_{[0,1]} \to \mathcal{F}_{[0,1]}; f(x) \mapsto xf'(x)$.

Lineáris leképezés mátrixa

Hasonló mátrixok

7.17. A nyom invariáns a hasonlóságra nézve Igazoljuk, hogy hasonló mátrixok nyoma azonos!

Merőleges vetítés és a legjobb közelítés

A legjobb közelítés, a legkisebb négyzetek elve, vagy a lineáris regresszió az alkalmazásokban igen gyakran előforduló fontos fogalmak. Lényegük az $\mathbb{R}^n$ egy alterére való merőleges vetítésének fogalmával jól megvilágítható.

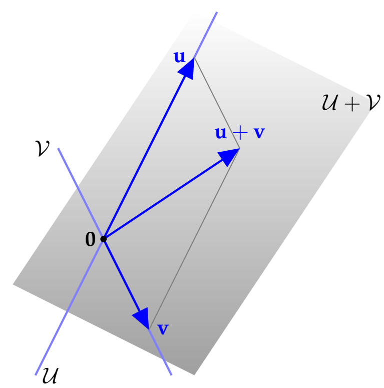
Alterek összege és direkt összege A koordinátázás általánosításaként tekinthetünk arra a gondolatra, hogy a tér minden vektorát különböző alterekbe eső vektorok összegeként állítsuk elő, és egyértelműen. Ez vezet az alterek direkt összegének fogalmához.

Ha $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ ugyanannak a vektortérnek az alterei, akkor az egyesítésük által generált alteret $\mathcal{U}+\mathcal{V}$-vel jelöljük, és a két altér összegének nevezzük.

7.40. ÁLLÍTÁS (ALTEREK ÖSSZEGE). *Ha $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ altér két altere, akkor az egyesítésük által generált $\mathcal{U}+\mathcal{V}$ altér pontosan azokból a vektorokból áll, melyek egy $\mathcal{U}$- és egy $\mathcal{V}$-beli vektor összegeként előállnak.*

BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{x}$ egy $\mathcal{U}+\mathcal{V}$-beli vektor, akkor előáll néhány $\mathcal{U}$- és $\mathcal{V}$-beli vektor lineáris kombinációjaként. De a lineáris kombináció $\mathcal{U}$-beli vektorokat tartalmazó része egy $\mathcal{U}$-beli $\mathbf{u}$ vektort ad, míg a többi egy $\mathcal{V}$-beli $\mathbf{v}$ vektort, így $\mathbf{x}=\mathbf{u}+\mathbf{v}$. Fordítva, minden $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ alakú vektor $\mathcal{U}$- és $\mathcal{V}$-beli vektorok lineáris kombinációja, így benne van $\mathcal{U}+\mathcal{V}$-ben. □

Szemléltetésül: ha például $\mathcal{W}=\mathbb{R}^3$, és $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ egy-egy egymástól különböző 1-dimenziós altere, akkor az egyesítésük által generált 2-dimenziós altérbe pontosan azok a vektorok tartoznak, melyek egy $\mathcal{U}$-beli $\mathbf{u}$ és egy $\mathcal{V}$-beli $\mathbf{v}$ vektor összegei (ld. 7.19. ábra).



7.19. ábra: $\mathcal{U}+\mathcal{V}$ bármely vektora előáll $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ alakban

Legyen $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ az $\mathcal{U}$ vektortér két tetszőleges altere. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{W}$ a $\mathcal{V}$ *kiegészítő altere*, vagy *komplementer altere* vagy hogy $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ egymás kiegészítő (komplementer) alterei, ha

$$\mathcal{V}\cap\mathcal{W}=\{\mathbf{0}\},\quad \mathcal{V}+\mathcal{W}=\mathcal{U},$$

azaz a két altérnek a zérusvektoron kívül nincs közös eleme, és $\mathcal{U}$ minden vektora előáll $\mathcal{V}$- és $\mathcal{W}$-beli elemek összegeként!

E fogalom a sík koordinátázására emlékeztető dolog: a síkban az origón átmenő két koordinátatengely vektorai a két alteret adják, melyekben csak a zérusvektor közös, és a sík minden vektora (egyértelműen) előáll az egyikből és a másikból vett vektor összegeként.

7.41. TÉTEL (KIEGÉSZÍTŐ ALTEREK TULAJDONSÁGAI). *Legyen $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ az $\mathcal{U}$ vektortér két altere és legyen $\mathcal{V}$ egy bázisa $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\dots,\mathbf{v}_r\}$, $\mathcal{W}$ egy bázisa $\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\dots,\mathbf{w}_k\}$. Az alábbi állítások ekvivalensek:*

a) $\mathcal{V}\cap\mathcal{W}=\{\mathbf{0}\}$ *és* $\mathcal{V}+\mathcal{W}=\mathcal{U}$*, azaz $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ kiegészítő alterek,* *b)* *$\mathcal{U}$ minden vektora egyértelműen előáll egy $\mathcal{V}$- és egy $\mathcal{W}$-beli vektor összegeként,*

c) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\} \cup \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ *az $\mathcal{U}$ vektortér egy bázisa,*

d) $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$ *és* $\dim \mathcal{V} + \dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{U}$.

BIZONYÍTÁS. *a)* $\Rightarrow$ *b)* : Meg kell mutatnunk, hogy minden vektor egyértelműen áll elő egy $\mathcal{V}$- és egy $\mathcal{W}$-beli vektor összegeként. Legyen $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ olyan vektor, hogy $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2$, ahol $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}$ és $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in \mathcal{W}$. Átrendezés után $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1$. Ennek bal oldalán $\mathcal{V}$-beli, jobb oldalán $\mathcal{W}$-beli vektor áll, amik csak a nullvektor esetén lehetnek azonosak, mivel $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$. Így $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ és $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2$.

b) $\Rightarrow$ *c)* : Mivel bármely $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ vektor előáll $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ alakban, ahol $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ és $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$, e két vektor pedig előáll a bázisvektorok lineáris kombinációjaként, ezért a két bázis egyesítésével kapott vektorrendszer kifeszíti $\mathcal{U}$-t. Másrészt megmutatjuk, hogy a vektorrendszer független vektorokból áll. Tegyük fel, hogy

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_r\mathbf{v}_r + d_1\mathbf{w}_1 + \cdots + d_k\mathbf{w}_k = \mathbf{0}.$$

Mivel a $\mathbf{0}$ vektor *egyértelműen áll elő* $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ alakban, és egy előállítása a $\mathbf{0} + \mathbf{0}$, ezért

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}, \quad \text{és} \quad d_1\mathbf{w}_1 + \cdots + d_k\mathbf{w}_k = \mathbf{0}.$$

Innen pedig a bázisvektorok lineáris függetlenségéből következik, hogy minden együttható 0. Tehát a két altér bázisának egyesítése lineárisan független vektorokból áll, így $\mathcal{U}$ egy bázisát adja.

c) $\Rightarrow$ *d)* : $\mathcal{U}$ egy bázisa $r + k$ elemű, így $\dim \mathcal{U} = r + k = \dim \mathcal{V} + \dim \mathcal{W}$. $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$ az előzőekben látottakhoz hasonlóan igazolható.

d) $\Rightarrow$ *a)* : Csak azt kell megmutatni, hogy ha $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$ és $\dim \mathcal{V} + \dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{U}$, akkor $\mathcal{U} = \mathcal{V} + \mathcal{W}$. Ehhez legyen $\mathcal{V}$ egy bázisa $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$, $\mathcal{W}$ egy bázisa $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k\}$. Ha egyesítésük bázis $\mathcal{U}$-ban, akkor kész vagyunk, hisz minden vektor e bázis vektorainak lineáris kombinációja, mely felbomlik $\mathcal{V}$-beli és $\mathcal{W}$-beli részre. Ezért tegyük fel, hogy e vektorok lineárisan összefüggők, azaz a nullvektor megkapható valamely nemtriviális lineáris kombinációjukkal:

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_r\mathbf{v}_r + d_1\mathbf{w}_1 + \cdots + d_k\mathbf{w}_k = \mathbf{0}.$$

Átrendezve

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_r\mathbf{v}_r = -d_1\mathbf{w}_1 - \cdots - d_k\mathbf{w}_k,$$

ami ellentmond a $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$ feltételnek, mivel indirekt feltevésünk szerint nem minden együttható 0. □

7.42. DEFINÍCIÓ (DIREKT ÖSSZEG). *Ha a $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ alterek $\mathcal{U}$ kiegészítő alterei, akkor azt mondjuk, hogy $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ alterek* direkt összege, *amit az alterek egyszerű összegétől megkülönböztetendő $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$ jelöl.*

Már láttunk példát kiegészítő alterekre, hisz a sortér és a nulltér dimenziójának összege n, és a két altérnek a nullvektoron kívül nincs közös eleme, így $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ és $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ kiegészítő alterek, azaz $\mathbb{R}^n = \mathcal{S}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A})$ bármely valós $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra.

Egy $\mathcal{W}$ altér esetén $\mathcal{W}^\perp$ jelölte a $\mathcal{W}$-re merőleges vektorok alterét. Ezt merőleges kiegészítő altérnek neveztük, de azt, hogy ez valóban kiegészítő altér-e, még nem mutattuk meg.

7.43. TÉTEL (A MERŐLEGES KIEGÉSZÍTŐ ALTÉR TULAJDONSÁGAI). *Legyen $\mathcal{W}$ az n-dimenziós valós vagy komplex $\mathcal{U}$ vektortér egy altere. Ekkor*
a) $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp = \{\mathbf{0}\}$,
b) $\mathcal{W} + \mathcal{W}^\perp = \mathcal{U}$,
c) $\mathcal{U}$ minden vektora egyértelműen előáll egy $\mathcal{W}$- és egy $\mathcal{W}^\perp$-beli vektor összegeként,
d) $(\mathcal{W}^\perp)^\perp = \mathcal{W}$.

BIZONYÍTÁS. *a)* igaz, hisz ha $\mathbf{x} \in \mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp$, akkor $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$, ami csak a $\mathbf{0}$ vektorra áll fönn.

b) abból adódik, hogy az előző, a kiegészítő alterekről szóló tétel szerint, ha két altér dimenzióinak összege n, és a két altér metszete csak a zérusvektorból áll, akkor a két altér összege $\mathbb{R}^n$. Esetünkben a két altér $\mathcal{W}$ és $\mathcal{W}^\perp$. Ha $\mathcal{W}$ egy bázisának vektoraiból, mint sorvektorokból mátrixot képzünk, annak sortere épp $\mathcal{W}$, nulltere $\mathcal{W}^\perp$ lesz, és a sortér és nulltér dimenzióinak összege valóban n a dimenziótétel szerint.

Ugyancsak az előző tétel és az *a)* és *b)* állítások következménye, hogy a „merőleges kiegészítő alterek" valóban kiegészítő alterek, ami bizonyítja *c)*-t.

d) bizonyításához megmutatjuk, hogy $\mathcal{W} \subseteq (\mathcal{W}^\perp)^\perp$ és $\mathcal{W} \supseteq (\mathcal{W}^\perp)^\perp$, ami bizonyítja, hogy $\mathcal{W} = (\mathcal{W}^\perp)^\perp$.

Legyen $\mathbf{w}$ a $\mathcal{W}$ tér egy tetszőleges vektora. Mivel $\mathcal{W}^\perp$ épp azokból a vektorokból áll, melyek merőlegesek $\mathcal{W}$ minden vektorára, ezért $\mathbf{w}$ merőleges $\mathcal{W}^\perp$ minden vektorára. Ez viszont épp azt jelenti, hogy $\mathbf{w}$ benne van a $(\mathcal{W}^\perp)^\perp$ altérben, tehát $\mathcal{W} \subseteq (\mathcal{W}^\perp)^\perp$.

A fordított tartalmazás bizonyításához legyen $\mathbf{w} \in (\mathcal{W}^\perp)^\perp$. A *b)* pont szerint e vektor előáll $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{v}^\perp$ alakban, ahol $\mathbf{v} \in \mathcal{W}$ és $\mathbf{v}^\perp \in \mathcal{W}^\perp$. Elég lenne megmutatnunk, hogy $\mathbf{v}^\perp = \mathbf{0}$. A $(\mathcal{W}^\perp)^\perp$ és $\mathcal{W}^\perp$ merőlegessége miatt $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}^\perp = 0$, így

$$0 = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}^\perp = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}^\perp) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^\perp + \mathbf{v}^\perp \cdot \mathbf{v}^\perp = \mathbf{v}^\perp \cdot \mathbf{v}^\perp,$$

hisz $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^\perp = 0$. A $\mathbf{v}^\perp \cdot \mathbf{v}^\perp = 0$ egyenlőség viszont csak $\mathbf{v}^\perp = \mathbf{0}$ esetén áll fönn. Így tehát $\mathbf{w} = \mathbf{v}$, azaz $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$, ami bizonyítja az állítást. □

Merőleges vetítés $\mathbb{R}^n$ egy altérére Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{V}$ vektortér egy $\mathbf{v}$ vektorának a $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$ altérre eső *merőleges vetülete* a $\mathbf{w}$ vektor, ha $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$, és $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ merőleges a $\mathcal{W}$ altérre, azaz $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in \mathcal{W}^\perp$. A $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ vektort a $\mathbf{v}$ vektor $\mathcal{W}$ altérre *merőleges összetevőjének* nevezzük.

Kérdés, hogy létezik-e minden vektornak egy altérre eső merőleges vetülete, és hogy egyértelmű-e. A 7.43. tétel *c)* pontja szerint ha $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$, akkor minden $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektor egyértelműen felbomlik egy $\mathcal{W}$-beli $\mathbf{w}$ és egy $\mathcal{W}^\perp$-beli $\mathbf{w}^\perp$ vektor összegére. Ez azt jelenti, hogy e $\mathbf{w}$ vektor épp a $\mathbf{v}$ vektor $\mathcal{W}$ altérre eső merőleges vetülete. Ezt az egyértelműen létező vektort – összhangban korábbi jelölésünkkel – jelölje $\operatorname{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{v}$.

Egy mátrix *teljes oszloprangú*, ha oszlopai lineárisan függetlenek, azaz rangja megegyezik oszlopainak számával, azaz ha oszlopai az oszlopterének bázisát alkotják. Hasonlóan definiálható a *teljes sorrangú* mátrix fogalma.

7.44. TÉTEL (ALTÉRRE VALÓ VETÍTÉS MÁTRIXA). *Ha $\mathcal{W}$ az $\mathbb{R}^n$ egy altere, és az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorai a $\mathcal{W}$ egy bázisát alkotják (tehát $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú), akkor a $\mathcal{W}$ altérre való merőleges vetítés, azaz a $\operatorname{proj}_{\mathcal{W}}$ leképezés mátrixa*

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}.$$

BIZONYÍTÁS. Legyen a $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektor $\mathcal{W}$-re eső merőleges vetülete $\mathbf{w}$. Mivel $\mathbf{A}$ definíciója szerint $\mathbf{A}$ oszloptere $\mathcal{W}$, ezért létezik olyan $\mathbf{x}$ vektor, hogy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{w}$. Másrészt $\mathcal{W} = \mathcal{O}(\mathbf{A})$ miatt $\mathcal{W}^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, így $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ benne van $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ nullterében, mivel a merőleges vetület definíciója szerint $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ merőleges $\mathcal{W}$-re. Eszerint $\mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{0}$, azaz $\mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{v} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Átrendezve kapjuk, hogy

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{v}.$$

Az $\mathbf{A}$ mátrix teljes oszloprangú, így a **??** tétel szerint $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ invertálható, azaz $\mathbf{x} = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{v}$, amiből kapjuk, hogy $\operatorname{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{v}$, ami bizonyítja az állítást. □

► A tételbeli képlet könnyen megjegyezhető, hisz összhangban van az egyenesre való merőleges vetítés (7.7) képletével. Ha ugyanis az $\mathbf{A}$ mátrix egyetlen oszlopból áll, $(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}$ egyetlen szám, ami kiemelhető, azaz az $\mathbf{A} = \mathbf{b}$ jelöléssel $\mathbf{b}(\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b})^{-1}\mathbf{b}^\mathsf{T} = \frac{1}{\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b}}\mathbf{b}\mathbf{b}^\mathsf{T}$.

7.45. PÉLDA (MERŐLEGES VETÜLET KISZÁMÍTÁSA). *Határozzuk meg a $(-2,1,3)$ vektornak az $(1,0,1)$ és a $(-1,2,0)$ vektorok által kifeszített síkra eső merőleges vetületét! (ld. még a 7.23. példát)*

MEGOLDÁS. Az altér bázisvektoraiból képzett mátrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ amiből } \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Így a $(-2, 1, 3)$ vektor merőleges vetülete

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ez a feladat megegyezik a 7.23. példabelivel, mivel ennek a síknak is $2x + y - 2z = 0$ az egyenlete, ugyanis $(1, 0, 1) \times (-1, 2, 0) = (-2, -1, 2)$. □

Melyik mátrix merőleges vetítés mátrixa? Olyan – könnyen ellenőrizhető – feltételeket keresünk egy lineáris leképezés mátrixára, melyek segítségével azonnal megállapítható, hogy a mátrixleképezés merőleges vetítés-e.

7.46. TÉTEL (MERŐLEGES VETÍTÉS MÁTRIXAI). *Egy* $\mathbf{P}$ *mátrix pontosan akkor merőleges vetítés mátrixa, ha* $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\mathsf{T} = \mathbf{P}^2$.

BIZONYÍTÁS. A $\mathbf{P} = \mathbf{P}^2$ feltétel szükségessége szemléletesen világos, hisz minden P lineáris leképezés, mely az egész $\mathbb{R}^n$ teret egy altérre – nevezetesen $\operatorname{Im} P$-re – vetíti, az altér vektorait helyben hagyja. Tehát $P^2\mathbf{x} = P\mathbf{x}$ minden $\mathbf{x}$-re fennáll, így ennek az összefüggésnek P minden mátrixára is igaznak kell lennie.

($\Longrightarrow$) Tegyük fel, hogy $\mathbf{P}$ egy P merőleges vetítés mátrixa $\mathbb{R}^n$ standard bázisában. Tekintsük $\operatorname{Im}(P) = \mathcal{O}(\mathbf{P})$ egy tetszőleges bázisát, és legyen $\mathbf{A}$ az a mátrix, melynek e bázis elemei az oszlopai. A 7.44. tétel szerint ekkor $\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}$. Erre viszont könnyen ellenőrizhető, a tételbeli feltétel.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^2 &= \left(\mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^2 = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{P}, \end{aligned}$$

másrészt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^\mathsf{T} &= \left(\mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T} = \mathbf{A}\left((\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\right)^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T} \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{P}. \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Tegyük fel, hogy $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\mathsf{T} = \mathbf{P}^2$. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{P}$ az $\mathcal{O}(\mathbf{P})$-re való merőleges vetítés mátrixa. Ehhez elég megmutatnunk, hogy az $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x}$ vektor merőleges $\mathcal{O}(\mathbf{P})$-re bármely $\mathbf{x}$ vektor esetén. A $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ feltétel miatt $\mathbf{P}(\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x}) = \mathbf{P}\mathbf{x} - \mathbf{P}^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tehát $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{P})$, de $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\mathsf{T}$, így $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{P}^\mathsf{T})$. Ez épp azt jelenti, hogy $\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{x}$ merőleges $\mathcal{O}(\mathbf{P})$-re, és ezt akartuk belátni. □

▶ A $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\mathsf{T}$ összefüggés azt jelenti, hogy $\mathbf{P}$ szimmetrikus. A $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ tulajdonságnak eleget tevő mátrixokat *idempotensnek* nevezzük. A tétel tehát úgy is fogalmazható, hogy egy mátrix pontosan akkor egy merőleges vetítés mátrixa, ha idempotens és szimmetrikus.
▶ Később látni fogjuk, hogy a – később definiálandó – nem feltétlenül merőleges vetítés mátrixai egybe esnek az idempotens mátrixokkal, tehát a vetítő lineáris leképezések az idempotens lineáris leképezésekkel.
▶ Azt, hogy egy vetítés hány dimenziós térre vetít, annak rangja mondja meg, hisz az megegyezik a képtér dimenziójával.

7.47. PÉLDA. *Igazoljuk, hogy az*

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}, \quad \frac{1}{4}\begin{bmatrix}3&-1&-1&-1\\-1&3&-1&-1\\-1&-1&3&-1\\-1&-1&-1&3\end{bmatrix}$$

mátrixok merőleges vetítés mátrixai! Hány dimenziós térre vetítenek?

MEGOLDÁS. Könnyen ellenőrizhető, hogy mindegyik mátrix szimmetrikus és idempotens, azaz kielégíti a $\mathbf{P}^\mathsf{T} = \mathbf{P}$ és a $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ egyenlőségeket. Az első két mátrixról átalakítás nélkül is leolvasható, hogy rangjuk 2. A harmadik mátrix rangja 3, ugyanis egyrészt legalább 3, hisz ha kivonjuk az utolsó sort az első háromból, egy 3×3-as egységmátrixot kapunk benne, másrészt nem lehet 4, mert a négy sorvektor összege a zérusvektor, azaz lineárisan összefüggők. □

Altértől való távolság Adva van az $\mathbb{R}^n$ tér egy $\mathbf{x}$ vektora és egy $\mathcal{W}$ altere. $\mathbf{x}$-nek a $\mathcal{W}$ *altértől való távolságán* a $\mathcal{W}$ altér $\mathbf{x}$-hez legközelebbi $\mathbf{w}$ vektorának tőle való távolságát értjük. Kérdés azonban, hogy létezik-e ilyen vektor egyáltalán! Meg fogjuk mutatni, hogy ilyen $\mathbf{w}$ vektor létezik és egyértelmű. E vektort az $\mathbf{x}$ vektor $\mathcal{W}$-beli *legjobb közelítésének* nevezzük.

7.48. TÉTEL (LEGJOBB KÖZELÍTÉS TÉTELE). *Adva van az $\mathbb{R}^n$ tér egy $\mathbf{x}$ vektora és egy $\mathcal{W}$ altere. Az $\mathbf{x}$ vektornak egyetlen $\mathcal{W}$-beli legjobb $\hat{\mathbf{x}}$ közelítése van, nevezetesen $\hat{\mathbf{x}} = \operatorname{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}$.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $\mathbf{w}$ a $\mathcal{W}$ egy tetszőleges vektora. Ekkor

$$\mathbf{x} - \mathbf{w} = (\mathbf{x} - \operatorname{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}) + (\operatorname{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x} - \mathbf{w}).$$

A merőleges vetítés definíciója miatt az egyenlőség jobb oldalán álló első kifejezés $\mathcal{W}^\perp$ eleme, míg a második $\mathcal{W}$ eleme. Tehát az $\mathbf{x} - \operatorname{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}$ és a $\operatorname{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x} - \mathbf{w}$ vektorok merőlegesek egymásra, így alkalmazható rájuk Pithagorász tétele:

$$|\mathbf{x} - \mathbf{w}|^2 = |\mathbf{x} - \operatorname{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x}|^2 + |\operatorname{proj}_{\mathcal{W}} \mathbf{x} - \mathbf{w}|^2.$$

Ebből világos, hogy

$$|\mathbf{x}-\mathbf{w}|^2 \geq |\mathbf{x}-\operatorname{proj}_{\mathcal{W}}\mathbf{x}|^2,$$

és egyenlőség csak akkor állhat fönn, ha $\mathbf{w} = \hat{\mathbf{x}} = \operatorname{proj}_{\mathcal{W}}\mathbf{x}$, ami egyúttal a legjobb közelítés egyértelműségét is bizonyítja. □

► E tétel egyik következménye, hogy $\mathbb{R}^n$ minden vektora felbontható egy $\mathcal{W}$-beli és egy rá merőleges vektor összegére, ugyanis

$$\mathbf{x} = \operatorname{proj}_{\mathcal{W}}\mathbf{x} + \mathbf{w}^{\perp}, \quad \text{ahol} \quad \mathbf{w}^{\perp} = \mathbf{x} - \operatorname{proj}_{\mathcal{W}}\mathbf{x}.$$

Ennél azonban több is igaz, nevezetesen az, hogy e felbontás egyértelmű.

7.49. TÉTEL (VEKTOR FELBONTÁSA ÖSSZETEVŐKRE). *Adva van az $\mathbb{R}^n$ tér egy $\mathbf{x}$ vektora és egy $\mathcal{W}$ altere. Az $\mathbf{x}$ vektor egyértelműen felbomlik egy $\mathcal{W}$-beli $\mathbf{w}$ és egy $\mathcal{W}$-re merőleges $\mathbf{w}^{\perp}$ vektor összegére, nevezetesen $\mathbf{w} = \operatorname{proj}_{\mathcal{W}}\mathbf{x}$ és $\mathbf{w}^{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{w}$.*

BIZONYÍTÁS. Tegyük fel, hogy létezik $\mathbf{x}$-nek egy másik ilyen tulajdonságú felbontása is, tehát $\mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{w}^{\perp}$ és $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{v}^{\perp}$. A második egyenletet az elsőből kivonva, majd átrendezve kapjuk, hogy

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{w}^{\perp} - \mathbf{v}^{\perp}.$$

A bal oldal eleme $\mathcal{W}$-nek a jobb oldali vektor viszont merőleges rá, hisz mindkét vektor eleme a $\mathcal{W}^{\perp}$ altérnek. Ez viszont csak akkor állhat fenn, ha mindkét oldal egyenlő a zérusvektorral, tehát $\mathbf{v} = \mathbf{w}$. □

7.50. PÉLDA. *Tekintsük az $\mathbb{R}^4$ tér $(1,-1,1,0)$ és $(0,1,-1,0)$ vektorai által kifeszített $\mathcal{W}$ alterét és legyen $\mathbf{x} = (8,4,2,1)$. Bontsuk fel az $\mathbf{x}$ vektort $\mathcal{W}$-be eső és $\mathcal{W}$-re merőleges vektorok összegére.*

MEGOLDÁS. A $\mathcal{W}$-re való merőleges vetítés mátrixa $\mathbf{P} = \mathbf{W}(\mathbf{W}^{\mathsf{T}}\mathbf{W})^{-1}\mathbf{W}^{\mathsf{T}}$, ahol $\mathbf{W}$ két oszlopa a megadott két bázisvektor, tehát

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{amiből} \quad \mathbf{P}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Így $\operatorname{proj}_{\mathcal{W}}\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x} = (8,1,-1,0)$ és $\mathbf{x} - \operatorname{proj}_{\mathcal{W}}\mathbf{x} = (0,3,3,1)$. Egyszerű számítással ellenőrizhető, hogy a $(8,1,-1,0) \in \mathcal{W}$ és hogy $(0,3,3,1) \perp \mathcal{W}^{\perp}$, azaz merőleges a $\mathcal{W}$-t kifeszítő bázisvektorok mindegyikére. □

Egyenletrendszer optimális megoldása Az altérre való merőleges vetítés és a legjobb közelítés fogalmával olyan eszközhöz jutottunk, amellyel a lineáris egyenletrendszerek elmélete e szinten teljessé tehető. A gyakorlatban rendkívül gyakran előfordul, hogy az ismeretlen mennyiségek meghatározására méréseket végzünk, de az elkerülhetetlen mérési hibák ellenmondó egyenletrendszerre vezetnek. Hogyan határozható meg ekkor a valóságban bizonyosan létező megoldás, egy ellentmondásos, tehát nem megoldható egyenletrendszerből?

Tudjuk, hogy az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathbf{b}$ benne van az oszloptérben, azaz $\mathcal{O}(\mathbf{A})$-ban. Természetes ötlet, hogy $\mathbf{b}$ helyett az azt legjobban közelítő oszloptérbeli $\hat{\mathbf{b}} = \operatorname{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})} \mathbf{b}$ vektorral oldjuk meg az egyenletrendszert. Ez már biztosan megoldható lesz, és olyan megoldásokat szolgáltat, melyekre $\mathbf{Ax}$ ugyan nem lesz egyenlő $\mathbf{b}$-vel, de attól a lehető legkisebb távolságra van. Az ilyen megoldásokat az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer *optimális megoldásainak* vagy a *legkisebb négyzetek elve szerinti megoldásainak* nevezzük. Világos, hogy ha egy egyenletrendszer konzisztens, akkor optimális megoldásai megegyeznek a megoldásaival. E definícióból azt is látjuk, mit tegyünk, ha egy egyenletrendszer ellentmondásos (azaz inkonzisztens): határozzuk meg a $\hat{\mathbf{b}} = \operatorname{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})} \mathbf{b}$ vektort, és az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer helyett oldjuk meg az $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}}$ egyenletrendszert. Ez kiindulásul jó, de adódik egy egyszerűbb módszer is.

Az természetes ötlet, hogy $\mathbf{b}$ helyett $\hat{\mathbf{b}}$-vel oldjuk meg az egyenletrendszert, de vajon nincs-e jobb ötlet, végülis miért épp e merőleges vetület adja számunkra a „legjobb megoldást” és mit is jelent itt a „legjobb”. A teljes választ a valószínűségszámítási előismeretet igénylő Gauss–Markov-tétel adja meg.

7.51. tétel (Egyenletrendszer optimális megoldása). *Az* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *egyenletrendszer optimális megoldásai megegyeznek az*

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{b} \tag{7.11}$$

egyenletrendszer megoldásaival. Ezek közül egyetlen egy esik az $\mathbf{A}$ *mátrix sorterébe, a legkisebb abszolút értékű.*

► A (7.11) egyenletrendszert az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszerhez tartozó *normálegyenlet-rendszernek* nevezzük. (A *normálegyenlet* kifejezés is helyes, ha a (7.11) kifejezésre, mint mátrixegyenletre gondolunk.)

Bizonyítás. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer optimális megoldásai megegyeznek az $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \operatorname{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})} \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldásaival. Ezeket fogjuk tehát keresni.

Először megmutatjuk, hogy ha $\hat{\mathbf{x}}$ egy optimális megoldás, akkor $\hat{\mathbf{x}}$ kielégíti a (7.11) egyenletet. Mivel $\mathbf{b} - \operatorname{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})} \mathbf{b}$ a vetítés definíciója miatt merőleges $\mathcal{O}(\mathbf{A})$-ra, ezért $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ nullterében van, tehát

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}}(\mathbf{b} - \operatorname{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})} \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

Másrészt felhasználva, hogy $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \operatorname{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})} \mathbf{b}$, kapjuk, hogy

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0},$$

azaz átrendezés után

$$\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{b}.$$

Ezután megmutatjuk, hogy a (7.11) egyenletet kielégítő minden $\hat{\mathbf{x}}$ vektor optimális megoldás. Ha (7.11) teljesül, akkor

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0},$$

tehát $\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$ benne van $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ nullterében, így merőleges $\mathbf{A}$ oszlopterére. Ezért a

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + (\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})$$

felbontás két merőleges kiegészítő altérbe eső vektor, hisz $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}$ az $\mathbf{A}$ oszlopterébe esik. Így a merőleges vetület definíciója szerint

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \operatorname{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})} \mathbf{b},$$

azaz $\hat{\mathbf{x}}$ optimális megoldás.

Végül meg kell mutatnunk, hogy a megoldások közt egyetlen van, mely $\mathbf{A}$ sorterébe esik. Ez azonnal következik abból, hogy a normálegyenlet megoldásai közt egyetlen egy van, mely $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ sorterébe esik, az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}$ sorterei pedig megegyeznek. □

7.52. PÉLDA (EGYENLETRENDSZER OPTIMÁLIS MEGOLDÁSAI). *Határozzuk meg az*

$$\begin{aligned} y + z &= 3 \\ x + y + 2z &= 2 \\ x \phantom{{}+y} + z &= 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert optimális megoldásait, és válasszuk ki közülük a minimális abszolút értékűt!

MEGOLDÁS. Az egyenletrendszer nem oldható meg, ami bővített mátrixának redukált lépcsős alakjából leolvasható:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Az együtthatómátrix transzponáltjával balról szorozva az egyenletet megkapjuk a normálegyenletet:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Ennek összes megoldása a bővített mátrix redukált lépcsős alakjából

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{így} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

A sortérbe eső megoldás megkereséséhez a 3.40. példában látott módszert alkalmazzuk az eredeti egyenletrendszer kiegészítésével:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A sortérbe eső megoldás $(0,1,1)$, azaz az összes megoldás ezzel fölírva:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

□

Lineáris és polinomiális regresszió Az egyenletrendszerek optimális megoldásainak egyik fontos alkalmazása a lineáris regresszió. Tegyük fel, hogy két változó mennyiség, az x és az y között fennáll az $y = a + bx$ kapcsolat. Méréseket végzünk, melyek eredménye az (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots n)$ párok sorozata. Keressük az a és b értékét, mely kielégíti az $y_i = a + bx_i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ egyenletek mindegyikét! Ez egy kétismeretlenes lineáris egyenletrendszer, melynek mátrixalakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

A hozzá tartozó normálegyenlet-rendszer

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

amely a mátrixműveletek elvégzése után a következő alakra vezet:

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

Ennek $\hat{a}$ és $\hat{b}$ megoldása adja az eredeti egyenletrendszer optimális megoldását! Az ilyen módon kapott $y = \hat{a} + \hat{b}x$ egyenest *regressziós egyenesnek* nevezzük, mely a megadott adatokra a legkisebb négyzetek elve szerinti legjobban illeszkedő egyenes.

Összefoglalva:

7.53. ÁLLÍTÁS (LINEÁRIS REGRESSZIÓ). *Az (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots n)$ párokhoz tartozó, $y = \hat{a} + \hat{b}x$ egyenletű regressziós egyenes paraméterei kielégítik az*

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

egyenletet. Ez egyértelműen megoldható, ha van legalább két különböző x_i érték.

BIZONYÍTÁS. Az összefüggést már fent igazoltuk, csak a egyértelmű megoldhatóság igazolása maradt hátra. A számtani és négyzetes közép közti összefüggés szerint bármely x_i $(i = 1, 2 \ldots, n)$ valósokra

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}},$$

és egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $x_1 = \cdots = x_n$. Mivel az együtthatómátrix determinánsa $n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2$, ezért a számtani és négyzetes közép közti összefüggés miatt ez csak akkor lehet 0, ha az x_i értékek mind azonosak. □

A lineáris regresszió gyakran egyéb függvénykapcsolat esetén is alkalmazható:

7.54. ÁLLÍTÁS (LINEARIZÁLHATÓ REGRESSZIÓS MODELLEK). *Ha az x és y mennyiségek között az alábbi táblázat szerinti függvénykapcsolatok valamelyike áll, akkor a táblázatban megadott helyettesítéssel a kapcsolat $Y = a + bX$ alakúvá, azaz lineárissá válik, így lineáris regresszió végezhető.*

Modell	*Függvénykapcsolat*	*Helyettesítés*		
hatványfüggvény	$y = cx^b$	$X = \ln x$	$Y = \ln y$	$a = \ln c$
exponenciális	$y = ce^{bx}$	$X = x$	$Y = \ln y$	$a = \ln c$
logaritmikus	$y = a + b \ln x$	$X = \ln x$	$Y = y$	

BIZONYÍTÁS. Az $y = cx^b$ egyenlőség mindkét oldalának logaritmusát véve az $\ln y = \ln c + b \ln x$ egyenlőséget kapjuk, ami a megadott helyettesítésekkel az $Y = a + bX$ kifejezést adja. Ugyanígy, az $y = ce^{bx}$ egyenlet logaritmusát véve az $\ln y = \ln c + bx$ egyenletet kapjuk. A szükséges helyettesítés a harmadik esetben még nyilvánvalóbb. □

A regresszió hasonló módon más függvényekkel is végezhető, ezek közül a polinomiálist emeljük ki:

7.55. PÉLDA. *Keressünk az $a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$ polinom együtthatóira optimális becslést a legkisebb négyzetek módszerével, ha az (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots n)$ párok sorozatát ismerjük.*

MEGOLDÁS. Keresendő az n egyenletből álló $k+1$-ismeretlenes

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_1 + \ldots + a_kx_1^k &= y_1 \\ a_0 + a_1x_2 + \ldots + a_kx_2^k &= y_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_0 + a_1x_n + \ldots + a_kx_n^k &= y_n \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása az a_0, a_1,..., a_k ismeretlenekre. Mátrix-alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^k \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Ha az együtthatómátrixot $\mathbf{X}$ jelöli, az ismeretlenek vektorát $\mathbf{a}$, az y_i értékek vektorát $\mathbf{y}$, akkor az egyenletrendszer az $\mathbf{Xa} = \mathbf{y}$ alakba írható. Ez biztosan megoldható, mégpedig egyértelműen, ha az x_i értékek különbözőek, és $n = k+1$, ekkor ugyanis az együtthatómátrix négyzetes, determinánsa Vandermonde-determináns, melynek értéke nem 0. Egyéb esetekben a normálegyenlet-rendszert kell felírni, melynek mátrixszorzatos alakja

$$\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{Xa} = \mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{y}.$$

Ez egyértelműen megoldható, ha $\mathbf{X}$ teljes oszloprangú, mert akkor $\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{X}$ invertálható, így a megoldás

$$\mathbf{a} = (\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{y}.$$

Ez pontosan akkor áll fenn, ha van legalább $k+1$ különböző x_i érték, ekkor ugyanis $\mathbf{X}$-ben van egy $(k+1) \times (k+1)$-es nemnulla determinánsú részmátrix, nevezetesen a különböző x_i értékekhez tartozó sorokból álló Vandermonde-mátrix. □

Vetítés Ha $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ kiegészítő alterek, akkor természetes módon értelmezhető a $\mathcal{V}$ altérre való és a $\mathcal{W}$ altérrel párhuzamos vetítés fogalma. E transzformációk halmaza egybeesik a $P^2 = P$ feltételt kielégítő lineáris transzformációk halmazával.

7.56. DEFINÍCIÓ (VETÍTÉS ALTÉRRE). *Tudjuk, hogy ha $\mathbb{R}^n = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, azaz $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ kiegészítő alterek, akkor a tér bármely $\mathbf{u}$ vektora egyértelműen előáll $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ alakban, ahol $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v}$ vektor az $\mathbf{u}$ vektornak a $\mathcal{V}$ altérre $\mathcal{W}$ mentén való vetülete, vagy $\mathcal{W}$-vel párhuzamosan vett, $\mathcal{V}$-re való* vetülete.

► Természetesen ugyanígy a $\mathbf{w}$ vektor az $\mathbf{u}$ vektor $\mathcal{V}$-val párhuzamosan vett, $\mathcal{W}$-re való vetülete. Könnyen látható, hogy a $P : \mathbf{u} \mapsto \mathbf{v}$

leképezés lineáris transzformáció (ellenőrizzük!). E lineáris transzformációt *vetítésnek* vagy *projekciónak* nevezzük.

► Minden P vetítés az $\operatorname{Im} P$-re $\operatorname{Ker} P$ mentén való vetítés.

Határozzuk meg e transzformáció mátrixát! A 7.41. tétel utáni megjegyzés szerint $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ dimenzióinak összege n, és ha $\mathcal{V}$ egy bázisa $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$, $\mathcal{W}$ egy bázisa $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_{n-r}\}$, akkor a két bázis diszjunkt (metszetük üres) és egyesítésük az egész tér egy bázisa. E vektorokból képezzük az alábbi mátrixot:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \ldots\ \mathbf{v}_r | \mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2\ \ldots\ \mathbf{w}_{n-r}] = [\mathbf{V}|\mathbf{W}].$$

Mivel $P\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ és $P\mathbf{w}_j = \mathbf{0}$ $(j = 1, 2, \ldots, n-r)$, ezért a P leképezés $\mathbf{P}$ mátrixára

$$\mathbf{PU} = \mathbf{P}[\mathbf{V}|\mathbf{W}] = [\mathbf{PV}|\mathbf{PW}] = [\mathbf{V}|\mathbf{O}].$$

Mivel pedig $\mathbf{U}$ invertálható, ezért a vetítés mátrixa

$$\mathbf{P} = [\mathbf{V}|\mathbf{O}]\mathbf{U}^{-1} = [\mathbf{V}|\mathbf{O}][\mathbf{V}|\mathbf{W}]^{-1}.$$

7.57. TÉTEL (A PROJEKCIÓ TULAJDONSÁGAI). *Legyen $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ egy projekció. Ekkor*

a) $\mathbb{R}^n$*-nek van olyan bázisa, melyben a mátrixa*

$$\mathbf{P} = \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0).$$

b) $I - P$ *is projekció, mégpedig* $\operatorname{Ker}(I-P) = \operatorname{Im} P$, $\operatorname{Im}(I-P) = \operatorname{Ker} P$,

c) $\operatorname{r}(P) = \operatorname{trace}(P)$.

BIZONYÍTÁS. *a)* A fenti jelölésekkel a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_{n-r}\}$ bázisban nyilván $\operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ a mátrix. Ez a

$$\begin{aligned}[]
[\mathbf{V}|\mathbf{O}][\mathbf{V}|\mathbf{W}]^{-1} &= [\mathbf{V}|\mathbf{W}] \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} [\mathbf{V}|\mathbf{W}]^{-1} \\
&= [\mathbf{V}|\mathbf{W}] \operatorname{diag}(1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) [\mathbf{V}|\mathbf{W}]^{-1} \qquad \square
\end{aligned}$$

átalakításból is látható.

b) Ha $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, és $P : \mathbf{u} \mapsto \mathbf{v}$ a $\mathcal{W}$ mentén $\mathcal{V}$-re való vetítés, akkor $I - P = \mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{w}$ a $\mathcal{V}$ mentén $\mathcal{W}$-re való vetítés. Világos, hogy $\operatorname{Im} P = \mathcal{V}$, $\operatorname{Ker} P = \mathcal{W}$, és így $\operatorname{Im}(I-P) = \mathcal{W}$, $\operatorname{Ker}(I-P) = \mathcal{V}$.

c) $\operatorname{r}(\mathbf{P}) = \operatorname{trace}(\mathbf{P})$, így $\operatorname{r}(P) = \operatorname{trace}(P)$.

7.58. PÉLDA (PROJEKCIÓ MÁTRIXA). *Határozzuk meg az $\mathbb{R}^3$ tér $\mathcal{W} = \operatorname{span}((1,-2,1))$ altérrel párhuzamos, $\mathcal{V} = \operatorname{span}((0,2,-1),(2,0,-1))$ altérre való vetítésének és a $\mathcal{V}$-vel párhuzamos $\mathcal{W}$-re való vetítés mátrixát! (ld. még a 7.26. példát!)*

MEGOLDÁS. Miután

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

a transzformáció mátrixa egyszerű behelyettesítés után:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{V}|\mathbf{O}][\mathbf{V}|\mathbf{W}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

A 7.26. példában ugyanezt a kérdést tettük fel, másként megfogalmazva. Ráadásul a megoldás is lényegében ugyanaz, csak a $\mathcal{V}$ altérnek most más bázist kerestünk. A másik vetítés mátrixa

$$\mathbf{I} - \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

7.59. TÉTEL (A VETÍTÉS EKVIVALENS DEFINÍCIÓJA). *A $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció pontosan akkor vetítés, ha $P^2 = P$, azaz ha P idempotens.*

BIZONYÍTÁS. A vetítés definíciója szerinti $P\mathbf{u} = \mathbf{v}$, ahol $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ és $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$. Mivel $\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0}$ a $\mathbf{v}$ felbontása, ezért $P\mathbf{u} = \mathbf{v}$, tehát $P^2\mathbf{u} = P\mathbf{v} = \mathbf{v}$, azaz minden $\mathbf{u}$ vektorra $P^2\mathbf{u} = P\mathbf{u}$, tehát $P^2 = P$.

Minden $\mathbf{u}$ vektor felbontható a következőképp: $\mathbf{u} = P\mathbf{u} + (\mathbf{u} - P\mathbf{u})$. Itt $P\mathbf{u} \in \operatorname{Im} P$, $\mathbf{u} - P\mathbf{u} \in \operatorname{Ker} P$, ugyanis $P(\mathbf{u} - P\mathbf{u}) = P\mathbf{u} - P^2\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Tehát $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} P + \operatorname{Ker} P$. $\operatorname{Im} P \cap \operatorname{Ker} P = \{\mathbf{0}\}$, ugyanis ha $\mathbf{u} \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Ker} P$, akkor $\mathbf{u} \in \operatorname{Im} P$ miatt van olyan $\mathbf{x}$, hogy $P\mathbf{x} = \mathbf{u}$, így $P^2\mathbf{x} = P\mathbf{u} = \mathbf{0}$, másrészt $P^2 = P$ miatt $P^2\mathbf{x} = P\mathbf{x} = \mathbf{u}$. Tehát $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, vagyis $\operatorname{Im} P \cap \operatorname{Ker} P = \{\mathbf{0}\}$. Eszerint $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Ker} P$. Legyen tehát $\mathcal{V} = \operatorname{Im} P$, $\mathcal{W} = \operatorname{Ker} P$. Minden $\mathbf{u}$ vektor egyértelműen felírható $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ alakban, ahol $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, és $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$. Mivel $\mathcal{V} = \operatorname{Im} P$, van olyan $\mathbf{x}$, hogy $\mathbf{v} = P\mathbf{x}$. Ezért $\mathbf{u} = P\mathbf{x} + \mathbf{w}$, így $P\mathbf{u} = P^2\mathbf{x} + P\mathbf{w} = P\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$. Tehát P vetítés. $\square$

A 7.46. tételben láttuk, hogy egy $\mathbf{P}$ mátrix pontosan akkor mátrixa egy merőleges vetítésnek, ha $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ és $\mathbf{P}^\mathsf{T} = \mathbf{P}$, azaz ha $\mathbf{P}$ idempotens és szimmetrikus. Így nyilvánvaló az alábbi állítás:

7.60. KÖVETKEZMÉNY (MIKOR MERŐLEGES EGY VETÍTÉS?). *Legyen $\mathbf{P}$ egy vetítés mátrixa. $\mathbf{P}$ pontosan akkor egy merőleges vetítés mátrixa, ha $\mathbf{P}$ szimmetrikus.*

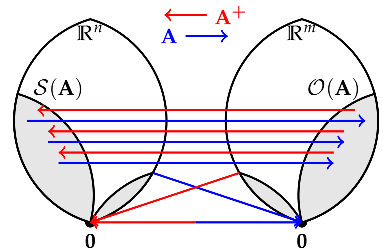
Feladatok

7.18. Igazoljuk a síkbeli egyenesre merőlegesen vetítő mátrix (7.9) képletét az **i** és **j** vektorok vetületének meghatározásával! Kétféleképp is számolhatunk, *a)* legyen az egyenes hajlásszöge az x-tengellyel α, *b)* legyen az egyenes irányvektora (b_1, b_2). Vessük össze a két eredményt, és igazoljuk azonosságukat.

7.19. MIKOR MERŐLEGES EGY VETÍTÉS? Legyen $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ egy vetítés. Mutassuk meg, hogy P pontosan akkor merőleges vetítés, ha minden $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $|P\mathbf{v}| \leq |\mathbf{v}|$.

Pszeudoinverz*

A mátrix inverzének olyan – pszeudoinverznek nevezett – általánosítását keressük, mely képes lesz bármely $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *(konzisztens vagy inkonzisztens) egyenletrendszerből a minimális abszolút értékű* $\hat{\mathbf{x}}$ *optimális megoldást a mátrix inverzéhez hasonló módon megadni.*



7.20. ábra: Az $\mathbf{A}$ mátrix sortere és oszloptere közti kölcsönösen egyértelmű leképezés a pszeudoinverz fogalmának alapja.

A pszeudoinverz fogalma Tetszőleges valós $\mathbf{A}$ mátrixhoz olyan $\mathbf{A}^+$-szal jelölt mátrixot keresünk, mely megadja az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenlet minimális abszolút értékű optimális megoldását az $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$ képlettel.

Tudjuk, hogy az $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ mátrixleképezés a sorteret kölcsönösen egyértelmű módon viszi az oszloptérbe. Tehát ha $\mathbf{A}^+$ a sortér és oszloptér közt invertálja a fenti leképezést, akkor konzisztens $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenlet sortérbe eső $\hat{\mathbf{x}}$ megoldására $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$. Ha viszont $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ inkonzisztens, akkor a $\hat{\mathbf{b}} = \operatorname{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})} \mathbf{b}$ jelöléssel $\mathbf{Ax} = \hat{\mathbf{b}}$ konzisztens, így fenn kell álljon az $\mathbf{A}^+\mathbf{b} = \mathbf{A}^+\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{x}}$ egyenlőség. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{A}^+(\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}) = \mathbf{0}$, vagyis az $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ minden $\mathbf{z}$ vektorára $\mathbf{A}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Mindez a következő definícióhoz vezet.

A mátrixinverz fogalmának több más általánosítása is létezik, melyeket itt nem tárgyalunk. A továbbiakban pszeudoinverzen az itt definiálandó Moore–Penrose-féle pszeudoinverzet fogjuk érteni.

7.61. DEFINÍCIÓ (A MOORE–PENROSE-FÉLE PSZEUDOINVERZ). *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy* $m \times n$*-es valós mátrix.* Pszeudoinverzén *vagy* Moore–Penrose-féle pszeudoinverzén *azt az* $\mathbf{A}^+$*-szal jelölt mátrixot értjük, amellyel*

a) a sortér minden $\mathbf{x}$ *vektorára* $\mathbf{A}^+(\mathbf{Ax}) = \mathbf{x}$*, továbbá*
b) az oszloptérre merőleges minden $\mathbf{z}$ *vektorra* $\mathbf{A}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

► Azonnal látható, hogy $m \times n$-es mátrix pszeudoinverze $n \times m$-es.

► Mivel $\mathbf{Ax} \in \mathcal{O}(\mathbf{A})$, és a definícióban szereplő $\mathbf{z}$ vektor eleme $\mathcal{O}(\mathbf{A})^\perp$-nek, ezért az $\mathbf{A}^+$-hoz tartozó mátrixleképezés hatását ismerjük az $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ altéren és merőleges kiegészítő alterén. E leképezés a megadott altereken lineáris, hisz az egyiken egy lineáris leképezés inverze, a másikon a zérusleképezés. Ebből következik, hogy a definícióban megadott leképezés a lineáritás megtartásával egyértelműen kiterjeszthető az egész térre, hisz a tér minden vektora egyértelműen áll elő egy $\mathcal{O}(\mathbf{A})$-beli és egy rá merőleges vektor összegeként. Ebből következik, hogy a definícióbeli leképezés létezik, egyértelmű és lineáris, így van mátrixa.

► A definícióból azonnal adódik az is, hogy $\mathcal{N}(\mathbf{A}^+) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, és $\mathcal{S}(\mathbf{A}^+) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^+)^\perp$, így $\mathcal{S}(\mathbf{A}^+) = \mathcal{S}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = \mathcal{O}(\mathbf{A})$.

7.62. PÉLDA (NÉHÁNY PSZEUDOINVERZ). *A definíció alapján igazoljuk az alábbi összefüggéseket!*

a) $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$*, ha* $\mathbf{A}$ *invertálható,*
b) $\mathbf{O}^+_{m\times n} = \mathbf{O}_{n\times m}$*,*

c) $[a]^+ = [1/a]$, *ha* $a \neq 0$, *és* $[0]^+ = [0]$,

d) $(\mathbf{A}^+)^+ = \mathbf{A}$,

e) *ha* $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, *akkor*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & 0 & \ldots & 0 & \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \mathbf{O} \\ 0 & 0 & \ldots & a_{rr} & \\ \hline & & \mathbf{O} & & \mathbf{O} \end{array}\right]^+_{m\times n} = \left[\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \ldots & 0 & \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \ldots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \mathbf{O} \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{a_{rr}} & \\ \hline & & \mathbf{O} & & \mathbf{O} \end{array}\right]_{n\times m} \tag{7.12}$$

E példa *a)* pontja mutatja, hogy a pszeudoinverz név nem igazán jó, hisz itt nem *álinverzről*, nem *hamis inverzről* van szó, hanem az inverz általánosításáról, tehát az *általánosított inverz* helyesebb kifejezés. Szokás ezt is használni, de a Moore–Penrose pszeudoinverz kifejezés sokkal elterjedtebb (angol nyelvű művekben is leginkább a 'pseudoinverse' szót használják).

MEGOLDÁS. *a)* Ha $\mathbf{A}$ egy $n \times n$-es méretű invertálható mátrix, akkor sortere és oszloptere is a teljes n-dimenziós tér, és tetszőleges $\mathbf{x}$ vektorra $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}$, tehát $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$.

b) Zérusmátrix oszloptere a zérusvektorból áll, így pszeudoinverze annak merőleges kiegészítő alterét, vagyis az egész teret a nullvektorba viszi, tehát $\mathbf{O}^+_{m\times n} = \mathbf{O}_{n\times m}$.

c) Az előző két eredményből azonnal következik.

d) Ha $\mathbf{x} \in \mathcal{S}(\mathbf{A})$ és $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, akkor $\mathbf{A}^+\mathbf{y} = \mathbf{x}$, és mivel $\mathbf{y} \in \mathcal{O}(\mathbf{A}) = \mathcal{S}(\mathbf{A}^+)$, ezért $(\mathbf{A}^+)^+\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Ha pedig $\mathbf{z} \perp \mathcal{O}(\mathbf{A}^+) = \mathcal{S}(\mathbf{A})$, akkor $(\mathbf{A}^+)^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$, azaz az $\mathbf{A}$ és az $(\mathbf{A}^+)^+$ mátrixokhoz tartozó leképezések megegyeznek az $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ és az $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ altereken, így az általuk kifeszített téren, azaz $\mathbb{R}^n$-en is. Tehát $\mathbf{A} = (\mathbf{A}^+)^+$.

e) Jelölje $\mathbb{R}^n$ standard bázisának elemeit $\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $\mathbb{R}^m$ standard bázisának elemeit $\mathbf{f}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Ha $a_{ii} \neq 0$, akkor $\mathbf{A}\mathbf{e}_i = a_{ii}\mathbf{f}_i$, és $\mathbf{e}_i$ a sortérben, $\mathbf{f}_i$ az oszloptérben van. Ha $a_{ii} = 0$, akkor $\mathbf{A}\mathbf{e}_i = \mathbf{0}$. Így $\mathbf{A}^+\mathbf{f}_i = 1/a_{ii}\mathbf{e}_i$ ha $a_{ii} \neq 0$ és $\mathbf{A}^+\mathbf{f}_i = \mathbf{0}$ egyébként. $\mathbf{A}^+$ mátrixának ezek az oszlopvektorai, így a főátlójában $1/a_{ii}$ áll, ha $a_{ii} \neq 0$, egyebütt 0. Gondoljuk meg, miért elég megadni $\mathbf{A}^+$ hatását csak a báziselemeken? □

A pszeudoinverz létezése és egyértelműsége a definíció közvetlen következménye. Most megkonstruáljuk mátrixát.

7.63. TÉTEL (A PSZEUDOINVERZ MÁTRIXA). *Ha a valós* $\mathbf{A}$ *mátrix teljes oszloprangú, akkor*

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}, \tag{7.13}$$

ha teljes sorrangú, akkor

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T})^{-1}. \tag{7.14}$$

Legyen $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}$, *ahol* $\mathbf{B}$ *egy teljes oszloprangú,* $\mathbf{C}$ *egy teljes sorrangú mátrix* *(ilyen felbontás mindig létezik, pl. ilyen a bázisfelbontás). Ekkor*

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{C}^+\mathbf{B}^+ = \mathbf{C}^\mathsf{T}(\mathbf{C}\mathbf{C}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T} \tag{7.15}$$

$$= \mathbf{C}^\mathsf{T}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{C}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}. \tag{7.16}$$

Bizonyítás. Ha $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú, akkor értelmezési tartományának minden vektora a sortérben van, így minden $\mathbf{x}$ vektorra az $\mathbf{A}\mathbf{x}$ vektorból vissza kell kapnunk $\mathbf{x}$-et egy megfelelő mátrixszal való szorzással. Mivel teljes oszloprangú $\mathbf{A}$ mátrixra $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ invertálható, ezért a (7.13)-beli mátrix megfelelő, hisz

$$(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Meg kell még mutatnunk, hogy ha $\mathbf{z}$ merőleges az oszloptérre, azaz ha $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, vagyis ha $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{z} = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{A}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$, de ez valóban igaz, hisz ekkor $(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{z} = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Ha $\mathbf{A}$ teljes sorrangú, akkor az oszloptér megegyezik az egész térrel, így a tér bármely $\mathbf{y}$ vektora esetén az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$ egyenletrendszer konzisztens. Ha $\hat{\mathbf{x}}$ jelöli az egyetlen sortérbe eső megoldást, akkor minden más $\mathbf{x}$ megoldás esetén $\operatorname{proj}_{\mathcal{S}(\mathbf{A})} \mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$. Így $\mathbf{A}^+$-ra fenn kell állnia az $\mathbf{A}^+\mathbf{y} = \hat{\mathbf{x}}$ összefüggésnek. Ez pedig fönnáll, hisz

$$\operatorname{proj}_{\mathcal{S}(\mathbf{A})} \mathbf{x} = \mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T})^{-1}\right)(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{A}^+\mathbf{y}.$$

Végül az általános esetben legyen $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}$, továbbá $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{w} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ és $\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{w}$. Mivel $\mathbf{B}$ teljes oszloprangú, $\mathbf{C}$ teljes sorrangú, ezért $\mathbf{C}^+\mathbf{B}^+\mathbf{y} = \mathbf{C}^+\mathbf{w} = \mathbf{x}$, vagyis a $\mathbf{C}^+\mathbf{B}^+$ teljesíti a definíció *a)* feltételét. A *b)* is teljesül, hisz $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ oszloptere megegyezik, így $\mathbf{B}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$, tehát $\mathbf{C}^+\mathbf{B}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$ is fennáll. A (7.15) és a (7.16) képletek behelyettesítéssel, majd az $(\mathbf{C}\mathbf{C}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1} = (\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{C}^\mathsf{T})^{-1} = (\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{C}^\mathsf{T})^{-1}$ átalakítással azonnal adódnak. □

► A (7.13) képlet tökéletes összhangban van az egyenletrendszer optimális megoldásáról szóló 7.51. tétel állításával. Ott arra jutottunk, hogy az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer optimális megoldásai megegyeznek az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldásaival. Ha pedig $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú, akkor $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ invertálható, így az optimális megoldás $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$, azaz a (7.13) képlet szerint $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$, ahogy azt célul tűztük ki e paragrafus elején.

► Általában nem igaz a pszeudoinverzre az $(\mathbf{X}\mathbf{Y})^+ = \mathbf{Y}^+\mathbf{X}^+$ összefüggés. Csak azt bizonyítottuk, hogy fennáll, ha $\mathbf{X}$ teljes oszloprangú, és $\mathbf{Y}$ teljes sorrangú. Pl. $\left(\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix}0&1\\0&1\end{smallmatrix}\right]\right)^+ \neq \left[\begin{smallmatrix}0&1\\0&1\end{smallmatrix}\right]^+\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right]^+$ (ld. 7.23. feladat).

► A (7.15) képlettel bizonyítható (ld. 7.27. feladat), hogy transzponált pszeudoinverze megegyezik pszeudoinverzének transzponáltjával, azaz

$$\left(\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)^+ = \left(\mathbf{A}^+\right)^\mathsf{T}. \tag{7.17}$$

7.64. PÉLDA (A PSZEUDOINVERZ KISZÁMÍTÁSA). *Számítsuk ki a*

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \textit{és} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixok pszeudoinverzét!

MEGOLDÁS. Mivel $\mathbf{B}$ teljes oszloprangú, ezért a (7.13) képlet szerint

$$\begin{aligned}\mathbf{B}^+ = (\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

A $\mathbf{C}$ mátrix teljes sorrangú, így a (7.14) képlet szerint

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^+ = \mathbf{C}^\mathsf{T}(\mathbf{C}\mathbf{C}^\mathsf{T})^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Az $\mathbf{M}^+$ kiszámításához első lépésként meghatározzuk $\mathbf{M}$ bázisfelbontását. Mivel $\operatorname{rref}(\mathbf{M}) = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, és $\mathbf{M}$ első két oszlopa bázisoszlop, ezért

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A feladat első felében használt jelölésekkel $\mathbf{M} = \mathbf{B}\mathbf{C}$, így a (7.15) képlettel számolva – és fölhasználva az előbb kiszámolt pszeudoinverzeket

$$\mathbf{M}^+ = \mathbf{C}^+\mathbf{B}^+ = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Számolhatunk közvetlenül a (7.16) képlettel is:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^+ &= \mathbf{C}^\mathsf{T}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{M}\mathbf{C}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

□

A pszeudoinverz tulajdonságai Az $\mathbf{A}$ mátrix inverzét az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ egyenlőséggel definiáltuk. Hasonló egyenlőségeket keresünk a pszeudoinverzhez is. Közben azt a fontos tényt is fölfedezzük, hogy $\mathbf{A}^+\mathbf{A}$ és $\mathbf{AA}^+$ is egy-egy merőleges vetítés mátrixa.

Azt nem tudjuk garantálni, hogy az $\mathbf{AA}^+$ és az $\mathbf{A}^+\mathbf{A}$ mátrixok az egységmátrixszal legyenek egyenlők, de legalább szimmetrikusak, és az $\mathbf{A}$-val, illetve az $\mathbf{A}^+$-szal való szorzásra nézve egységmátrixként viselkednek, azaz $\mathbf{AA}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^+\mathbf{AA}^+ = \mathbf{A}^+$. E feltételek már elegendők lesznek a pszeudoinverz algebrai leírásához.

7.65. TÉTEL (MOORE–PENROSE-TÉTEL). *A valós $\mathbf{A}$ mátrixnak $\mathbf{X}$ pontosan akkor pszeudoinverze, ha az alábbi négy feltétel mindegyike fennáll:*

a) $\mathbf{AXA} = \mathbf{A}$, *b)* $\mathbf{XAX} = \mathbf{X}$, *c)* $(\mathbf{AX})^\mathsf{T} = \mathbf{AX}$, *d)* $(\mathbf{XA})^\mathsf{T} = \mathbf{XA}$.

BIZONYÍTÁS. Azt, hogy $\mathbf{A}$ pszeudoinverze teljesíti e négy feltételt, egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhetjük.

$$\begin{aligned}
\mathbf{AA}^+\mathbf{A} &= \mathbf{AR}^\mathsf{T}(\mathbf{RR}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A} \\
&= \mathbf{BRR}^\mathsf{T}(\mathbf{RR}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{BR} = \mathbf{BR} = \mathbf{A} \\
\mathbf{A}^+\mathbf{AA}^+ &= \mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{RR}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{BRR}^\mathsf{T}(\mathbf{RR}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T} \\
&= \mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{RR}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T} = \mathbf{A}^+
\end{aligned}$$

A *c)* és az *d)* ellenőrzéséhez egyszerűsítsük az $\mathbf{A}^+\mathbf{A}$ és $\mathbf{AA}^+$ kifejezéseket:

$$\mathbf{A}^+\mathbf{A} = (\mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{RR}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T})(\mathbf{BR}) = \mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{RR}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{R}, \tag{7.18}$$
$$\mathbf{AA}^+ = (\mathbf{BR})(\mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{RR}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}) = \mathbf{B}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}. \tag{7.19}$$

Ezeket fölhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^\mathsf{T} &= (\mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{RR}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{R})^\mathsf{T} = \mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{RR}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{R} = \mathbf{A}^+\mathbf{A} \\
(\mathbf{AA}^+)^\mathsf{T} &= (\mathbf{B}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = \mathbf{B}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T} = \mathbf{AA}^+,
\end{aligned}$$

ami bizonyítja az *c)* és az *d)* egyenlőségeket. Már csak azt kell bizonyítani, hogy ezeket az összefüggéseket legföljebb csak egy mátrix teljesíti. Tegyük fel, hogy $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ is teljesíti a négy feltételt. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbf{AY} &\overset{a)}{=} \mathbf{AXAY} \overset{c)}{=} (\mathbf{AX})^\mathsf{T}(\mathbf{AY})^\mathsf{T} = \mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Y}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T} \\ &= \mathbf{X}^\mathsf{T}(\mathbf{AYA})^\mathsf{T} \overset{a)}{=} \mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T} = (\mathbf{AX})^\mathsf{T} \overset{c)}{=} \mathbf{AX} \qquad (7.20)\\ \mathbf{YA} &\overset{a)}{=} \mathbf{YAXA} \overset{d)}{=} (\mathbf{YA})^\mathsf{T}(\mathbf{XA})^\mathsf{T} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Y}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{X}^\mathsf{T} \\ &= (\mathbf{AYA})^\mathsf{T}\mathbf{X}^\mathsf{T} \overset{a)}{=} \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{X}^\mathsf{T} = (\mathbf{XA})^\mathsf{T} \overset{d)}{=} \mathbf{XA} \qquad (7.21)\\ \mathbf{Y} &\overset{b)}{=} \mathbf{YAY} \overset{(7.20)}{=} \mathbf{YAX} \overset{(7.21)}{=} \mathbf{XAX} \overset{b)}{=} \mathbf{X}.\end{aligned}$$

Ezzel bizonyítottuk a tételt. □

7.66. KÖVETKEZMÉNY ($\mathbf{A}^+\mathbf{A}$ ÉS $\mathbf{AA}^+$ MERŐLEGES VETÍTÉS). *Tetszőleges $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix esetén*

$$\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \operatorname{proj}_{\mathcal{S}(\mathbf{A})} \quad \text{és} \quad \mathbf{AA}^+ = \operatorname{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})}.$$

Tehát $\mathbf{A}^+\mathbf{A}$ az $\mathbb{R}^n$ teret merőlegesen vetíti $\mathbf{A}$ sorterére, míg $\mathbf{AA}^+$ az $\mathbb{R}^m$ teret merőlegesen vetíti $\mathbf{A}$ oszlopterére.

BIZONYÍTÁS. A (7.18) egyenlőség szerint $\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{RR}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{R}$, ami az altérre való merőleges vetítés mátrixáról szóló 7.44. tétel szerint az $\mathbf{R}^\mathsf{T}$ oszlopvektorai által kifeszített térre – azaz a sortérre – való merőleges vetítés mátrixa. Hasonlóképp a (7.19) egyenlet szerint $\mathbf{AA}^+ = \mathbf{B}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}$, ami a $\mathbf{B}$ oszlopvektorai által kifeszített térre – azaz az oszloptérre – való merőleges vetítés mátrixa. □

A pszeudoinverz és a minimális abszolút értékű optimális megoldás Megmutatjuk, hogy $\mathbf{A}^+$ úgy használható egy tetszőleges együtthatómátrixú $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer optimális megoldásának meghatározására, ahogy $\mathbf{A}^{-1}$ használható akkor, ha $\mathbf{A}$ invertálható.

7.67. TÉTEL (OPTIMÁLIS MEGOLDÁS PSZEUDOINVERZZEL). *Legyen $\mathbf{A}$ egy valós mátrix. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek az $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$ a minimális abszolút értékű optimális megoldása.*

BIZONYÍTÁS. Először megmutatjuk, hogy $\mathbf{A}^+\mathbf{b}$ optimális megoldás, azaz megoldása az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$ normálegyenlet-rendszernek. Tehát igazolni kell, hogy $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{AA}^+\mathbf{b} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$. Ehhez elég belátni, hogy $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{AA}^+ = \mathbf{A}^\mathsf{T}$. Legyen $\mathbf{A} = \mathbf{BR}$ az $\mathbf{A}$ mátrix bázisfelbontása. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{AA}^+ &= (\mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{B}^\mathsf{T})(\mathbf{B}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}) \\ &= \mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T} = \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{B}^\mathsf{T} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{A}^+\mathbf{b}$ a definícióból következőleg a sortérben van, és a sortérbe csak egyetlen optimális megoldás – a minimális abszolút értékű megoldás – esik, ezért $\mathbf{A}^+\mathbf{b}$ valóban a minimális abszolút értékű optimális megoldás. □

A gyakorlatban gyakran előfordul, hogy mért adatokból kell bizonyos változók értékét meghatározni. Ha az n ismeretlen értékre a mérési hibákat kiküszöbölendő n-nél több mérést végzünk, az egyenletrendszer könnyen ellentmondásossá válhat. Ehhez hasonló esetet mutat a következő példa.

7.68. PÉLDA (EGYENLETRENDSZER OPTIMÁLIS MEGOLDÁSA). *Az alábbi háromismeretlenes egyenletrendszer négy egyenletből áll:*

$$\begin{aligned} x + 3y + 6z &= 8 \\ x - y + 2z &= 2 \\ x + 3y + 2z &= 2 \\ x - y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Bármelyik három egyértelműen megoldható egyenletrendszert ad, de a négy együtt ellentmondásos. Határozzuk meg az optimális megoldását!

MEGOLDÁS. A 7.67. tétel szerint az optimális megoldás $\mathbf{A}^+\mathbf{b}$, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mivel $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú, ezért csak egyetlen optimális megoldása van, másrészt pszeudoinverze a (7.13) képlettel számolható, így

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & -1/4 & 1/4 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & -1/8 & -1/8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^+\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Így az egyenletrendszer optimális megoldása $(1, 0, 1)$. □

A következő példa olyan egyenletrendszert vizsgál, melyben az együtthatómátrix rangja kisebb mind az egyenletek, mind az ismeretlenek számánál.

7.69. PÉLDA (EGYENLETRENDSZER OPTIMÁLIS MEGOLDÁSA). *Adjuk meg az*

$$\begin{aligned} y + z &= 3 \\ x + y + 2z &= 2 \\ x \phantom{{}+y} + z &= 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszer minimális abszolút értékű optimális megoldását!

MEGOLDÁS. Az egyenletrendszer inkonzisztens, ami bővített mátrixának redukált lépcsős alakjából leolvasható. Ezt igazoltuk a 7.52. példában, ahol a minimális abszolút értékű megoldást is meghatároztuk. Most az együtthatómátrix pszeudoinverzét fogjuk használni, melyet meghatároztunk a 10.12. példában. Így a minimális abszolút értékű optimális megoldás

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{b} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

□

Feladatok

Pszeudoinverz

Számítsuk ki az alábbi mátrixok pszeudoinverzét!

7.20• 1-rangú mátrixok:

a) $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$ *e)* $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$ *f)* $\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$

7.21. További 1-rangú mátrixok:

a) $\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix}0 & 2\\0 & 2\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 2\\0 & 0\end{bmatrix}$ *e)* $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ *f)* $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$

7.22. 2-rangú mátrixok:

a) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 2 & 1\end{bmatrix}$ *d)* $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\2 & 4 & 2\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

7.23. Legyen $\mathbf{X} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$, $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$. Ellenőrizzük, hogy $(\mathbf{XY})^+ \neq \mathbf{Y}^+\mathbf{X}^+$.

Az alábbi feladatokban határozzuk meg a felbontásaikkal megadott mátrixok pszeudoinverzét!

7.24. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

7.25. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 1\\1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

7.26. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\1 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{bmatrix}$

7.27. Igazoljuk az $(\mathbf{A}^\mathsf{T})^+ = (\mathbf{A}^+)^\mathsf{T}$ összefüggést!

7.28. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ egy merőleges vetítés mátrixa, azaz $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A} = \mathbf{A}^2$, akkor $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}$. Igaz-e az állítás megfordítása?

7.29• Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ és $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú, akkor $\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{I}_m$, ha pedig $\mathbf{A}$ teljes sorrangú, akkor $\mathbf{AA}^+ = \mathbf{I}_n$.

7.30. 1-RANGÚ MÁTRIXOK PSZEUDOINVERZE Mutassuk meg, hogy ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 1$, akkor

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{\operatorname{trace}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})}\mathbf{A}^\mathsf{T},$$

ahol $\operatorname{trace}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ elemeinek négyzetösszege. Eszerint ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, akkor

$$\mathbf{a}^+ = \frac{1}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}}\mathbf{a}^\mathsf{T} = \frac{1}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}^\mathsf{T}.$$

E feladat eredményét fölhasználva ellenőrizzük a 7.20. és a 7.21. feladatok eredményeit!

7.31. BLOKKDIAGONÁLIS MÁTRIX PSZEUDOINVERZE Igazoljuk, hogy blokkdiagonális mátrix esetén

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2 & \dots & \mathbf{O}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{A}_k\end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix}\mathbf{A}_1^+ & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_2^+ & \dots & \mathbf{O}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{A}_k^+\end{bmatrix}.$$

7.32. Számítsuk ki a

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

mátrix pszeudoinverzét!

Ortonormált bázis – ortogonális mátrix

Nem kell indokolni a merőlegesség fontosságát bizonyos természeti jelenségek leírásában. A lineáris algebrában is nélkülözhetetlen a fogalma. Egy altér ortonormált bázisának megkonstruálása, és azoknak a leképezéseknek az áttekintése, melyek ortonormált bázist ortonormáltba visznek alapvetően fontosak.

Ortogonális mátrixok

Ortogonális és ortonormált bázis Segíti az alterek vizsgálatát, ha a bázisvektorok páronként merőlegesek egymásra, ekkor ugyanis a különböző bázisvektorok skaláris szorzata 0. További könnyítést jelenthet, ha a bázisvektorok egységvektorok, mert ekkor egy vektor velük vett skaláris szorzata a merőleges vetület hosszát adja.

Páronként merőleges vektorok egy rendszerét *ortogonális rendszernek* nevezzük. Ortogonális rendszernek lehetnek 0-vektor tagjai. Páronként merőleges egységvektorok egy rendszerét *ortonormált rendszernek* nevezzük. Ortonormált rendszerben *nincsenek* 0-vektorok. A következő tételből azonnal adódik, hogy zérusvektort nem tartalmazó ortogonális rendszer vagy egy tetszőleges ortonormált rendszer mindig bázisa az általa kifeszített altérnek. Ezt az altér *ortogonális bázisának* (rövidítve OB), illetve *ortonormált bázisának* (rövidítve ONB) nevezzük. Ortogonális bázisból mindig kaphatunk egy ortonormáltat, ha az OB minden bázisvektorát elosztjuk a hosszával. Ezt a vektor *normálásának* nevezzük.

7.70. tétel (Ortogonális vektorok függetlensége). *Ha a nullvektortól különböző $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ vektorok páronként ortogonálisak, akkor függetlenek is.*

Bizonyítás. Tekintsük a $c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ egyenletet. Be kell látnunk, hogy ez csak a $c_1 = \dots = c_k = 0$ esetben áll fönn. Szorozzuk be az egyenlőség mindkét oldalát az $\mathbf{a}_i$ vektorral ($i = 1, 2, \dots, k$). Ekkor a jobb oldal 0, a bal oldalon pedig egy tag kivételével mindegyik 0 lesz:

$$\begin{aligned}(c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_k\mathbf{a}_k) \cdot \mathbf{a}_i &= \mathbf{0} \cdot \mathbf{a}_i \\ c_i\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i &= 0.\end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_i \neq 0$, ezért $c_i = 0$, és ez igaz minden i-re. □

Tudjuk, hogy a háromdimenziós térben bármely $\mathbf{v} = (x, y, z)$ vektor koordinátáira igaz, hogy

$$x = \mathbf{v} \cdot \mathbf{i}, \quad y = \mathbf{v} \cdot \mathbf{j}, \quad z = \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}.$$

Az is igaz, hogy az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ által kifeszített síknak, azaz az xy-síknak a $\mathbf{v}$ vektorhoz legközelebb fekvő pontja, illetve az oda mutató helyvektor $\hat{\mathbf{v}} = (x, y, 0)$, azaz

$$\hat{\mathbf{v}} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j}$$

Azt is tudjuk, hogy a $\mathbf{v}$-hez legközelebbi pont épp $\mathbf{v}$-nek a síkra való merőleges vetülete.

A fenti nyilvánvaló összefüggések tetszőleges ONB esetén is használhatók, így igen értékesek.

7.71. TÉTEL (LEGJOBB KÖZELÍTÉS ONB ESETÉN). *Adva van az $\mathbb{R}^n$ térben egy $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ ortonormált rendszer által kifeszített $\mathcal{A}$ altér, valamint egy $\mathbf{v}$ vektor. Ekkor a*

$$\hat{\mathbf{v}} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_k)\mathbf{e}_k \tag{7.22}$$

vektor az $\mathcal{A}$ altér $\mathbf{v}$-hez legközelebb fekvő pontja, azaz $\hat{\mathbf{v}} = \operatorname{proj}_{\mathcal{A}} \mathbf{v}$.

BIZONYÍTÁS. Először megmutatjuk, hogy a (7.22) képlet szerinti pont van legközelebb $\mathbf{v}$-hez. $\mathbf{v}$ és $\hat{\mathbf{v}}$ távolságának négyzete

$$\begin{aligned}(\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}})^2 &= \left(\mathbf{v} - \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i\right)^2 \\ &= \mathbf{v}^2 - 2\sum_{i=1}^{k} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)^2 + \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)^2 \\ &= \mathbf{v}^2 - \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)^2.\end{aligned}$$

$\mathbf{v}$ és az altér egy tetszőleges $\mathbf{u}$ vektorának távolságnégyzete:

$$\begin{aligned}(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 &= \left(\mathbf{v} - \sum_{i=1}^{k} c_i\mathbf{e}_i\right)^2 \\ &= \mathbf{v}^2 - 2\sum_{i=1}^{k} c_i(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) + \sum_{i=1}^{k} c_i^2.\end{aligned}$$

Ha az utóbbiból kivonva az előbbit pozitív értéket kapunk, ez azt jelenti, hogy valóban $\hat{\mathbf{v}}$ van $\mathbf{v}$-hez legközelebb:

$$\begin{aligned}&(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 - (\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}})^2 \\ &\quad= \left(\mathbf{v}^2 - 2\sum_{i=1}^{k} c_i(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) + \sum_{i=1}^{k} c_i^2\right) - \left(\mathbf{v}^2 - \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)^2\right) \\ &\quad= \sum_{i=1}^{k} c_i^2 - 2\sum_{i=1}^{k} c_i(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) + \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)^2 \\ &\quad= \sum_{i=1}^{k} (c_i - \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Ebből a legjobb közelítés tétele szerint kapjuk, hogy $\hat{\mathbf{v}} = \operatorname{proj}_{\mathcal{A}} \mathbf{v}$. □

7.72. PÉLDA (EGY PONT SÍKRA VALÓ MERŐLEGES VETÜLETE). *Határozzuk meg a* $(3, 1, 2)$ *pontnak az egymásra merőleges* $\mathbf{a} = \frac{1}{7}(2, 3, 6)$ *és* $\mathbf{b} = \frac{1}{7}(3, -6, 2)$ *vektorok által kifeszített síkra való merőleges vetületét!*

MEGOLDÁS. Mivel **a** és **b** ortonormált bázisa az általuk kifeszített altérnek, ezért a $\mathbf{v} = (3, 1, 2)$ vektornak e síkra eső merőleges vetülete

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{v}} &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b} \\ &= \left((3, 1, 2) \cdot \left(\tfrac{2}{7}, \tfrac{3}{7}, \tfrac{6}{7}\right)\right)\left(\tfrac{2}{7}, \tfrac{3}{7}, \tfrac{6}{7}\right)) + \left((3, 1, 2) \cdot \left(\tfrac{3}{7}, \tfrac{-6}{7}, \tfrac{2}{7}\right)\right)\left(\tfrac{3}{7}, \tfrac{-6}{7}, \tfrac{2}{7}\right) \\ &= 3\left(\tfrac{2}{7}, \tfrac{3}{7}, \tfrac{6}{7}\right) + 1\left(\tfrac{3}{7}, \tfrac{-6}{7}, \tfrac{2}{7}\right) \\ &= \left(\tfrac{9}{7}, \tfrac{3}{7}, \tfrac{20}{7}\right).\end{aligned}$$

Összehasonlításul: a standard elemi módszer az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ irányvektorú, $(3, 1, 2)$ ponton átmenő egyenes és a sík metszéspontjának meghatározása lenne. □

Ortogonális mátrixok Egy ortonormált vektorrendszerből képzett mátrixnak gyönyörű algebrai és geometriai tulajdonságai vannak.

7.73. DEFINÍCIÓ (ORTOGONÁLIS ÉS SZEMIORTOGONÁLIS MÁTRIX). *Egy valós négyzetes mátrixot* ortogonálisnak *nevezünk, ha oszlopvektorai vagy sorvektorai ortonormált rendszert alkotnak. Ha nem kötjük ki, hogy a mátrix négyzetes legyen,* szemiortogonális *mátrixról beszélünk.*

▶ Látni fogjuk, hogy az ortogonális mátrixok definíciójában elég csak az oszlopvektorok vagy csak a sorvektorok ortonormalitását kikötni, mert mindegyikből következik a másik. Ha azonban egy mátrix nem négyzetes, akkor vagy csak az oszlopvektorai, vagy csak a sorvektorai alkothatnak ONR-t. Ha például az $n \times k$ méretű **Q** mátrix szemiortogonális, akkor $k \le n$ pontosan akkor áll fenn, ha **Q** oszlopvektorai alkotnak ONR-t. Az ugyanis, hogy valamely vektorok ONR-t alkotnak, maga után vonja lineáris függetlenségüket is.
▶ Nagyon szerencsétlen az ortogonális mátrix elnevezés, de annyira el van terjedve, hogy nem lehet eltérni tőle. Nyilván jobb lenne az ortonormált mátrix elnevezés.
▶ Minden ortogonális mátrix egyúttal szemiortogonális is.

7.74. PÉLDA (ORTOGONÁLIS MÁTRIXOK). *Melyek ortogonálisak és melyek szemiortogonálisak az alábbi mátrixok közül?*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

MEGOLDÁS. Mindhárom mátrix szemiortogonális, hisz oszlopvektorai vagy sorvektorai ortonormált rendszert alkotnak (az $\mathbf{A}$ mátrix sorai $\mathbb{R}^4$ standard egységvektorai közül valók, a $\mathbf{B}$ mátrix oszlopvektorai az $\mathbb{R}^4$ első két standard egységvektorának xy-síkban α szöggel való elforgatásával kaphatók, a $\mathbf{C}$ mátrix esetén az oszlopvektorok skaláris szorzatainak elvégzésével ellenőrizhetjük ortonormalitásukat). A három mátrix közül csak a $\mathbf{C}$ négyzetes, így csak ez ortogonális. □

► Könnyen látható, hogy minden permutáló mátrix, így az egységmátrix is, ortogonális.

7.75. TÉTEL (SZEMIORTOGONÁLIS MÁTRIXOK EKVIVALENS DEFINÍCIÓI). *Legyen $m \geq n$ és $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Az alábbi állítások ekvivalensek:*
a) $\mathbf{Q}$ *szemiortogonális,*
b) $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$.

► Hasonlóképp $m \leq n$ esetén $\mathbf{Q}$ pontosan akkor szemiortogonális, ha $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{I}_m$.
► A *b)* állítás algebrai nyelven azt mondja, hogy $m \geq n$ esetén $\mathbf{Q}$ pontosan akkor szemiortogonális, ha transzponáltja a bal oldali inverze.

BIZONYÍTÁS. *a)* $\Rightarrow$ *b)*: Ha $\mathbf{Q}$ szemiortogonális és $m \geq n$, akkor $\mathbf{Q}$ oszlopai alkotnak ONR-t. Legyen $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1\ \mathbf{q}_2\ \dots\ \mathbf{q}_n]$. Ekkor $[\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q}]_{ij} = \mathbf{q}_i^\mathsf{T}\mathbf{q}_j = \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j$, de mivel a $\{\mathbf{q}_i\}$ vektorrendszer ortonormált, ezért $\mathbf{q}_i^2 = 1$ és $\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j = 0$, ha $i \neq j$. Eszerint $[\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q}]_{ii} = 1$, és $[\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q}]_{ij} = 0$, ha $i \neq j$ és $i, j \leq k$, vagyis $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}_k$.

b) $\Rightarrow$ *a)*: A $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}_k$ összefüggésbeli mátrixszorzást sorvektorszor oszlopvektorként tekintve épp azt kapjuk, hogy $\mathbf{q}_i^2 = 1$ és $\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j = 0$, ha $i \neq j$, azaz a $\{\mathbf{q}_i\}$ vektorrendszer ortonormált. □

7.76. TÉTEL (ORTOGONÁLIS MÁTRIXOK EKVIVALENS DEFINÍCIÓI). *Legyen $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Az alábbi állítások ekvivalensek:*
a) $\mathbf{Q}$ *oszlopvektorai ortonormált rendszert alkotnak.*
b) $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$.
c) $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}$.
d) $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{I}_n$.
e) $\mathbf{Q}$ *sorvektorai ortonormált rendszert alkotnak.*

BIZONYÍTÁS. Az *a)* $\Leftrightarrow$ *b)* ekvivalenciát az előző állításban bizonyítottuk.

b) $\Rightarrow$ *c)*: Mivel $\mathbf{Q}$ négyzetes, ezért a $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ összefüggés egyúttal azt is jelenti, hogy $\mathbf{Q}$ invertálható, tehát $\mathbf{Q}$ és $\mathbf{Q}^\mathsf{T}$ egymás inverzei, azaz $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}$.

c) $\Rightarrow$ *d)*: Mivel $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}$, ezért $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{I}_n$.

d) $\Rightarrow$ *e)*: A $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{I}_n$ egyenletben a mátrixszorzásra sorvektorszor-oszlopvektorként tekintve épp azt kapjuk, hogy $\mathbf{Q}^\mathsf{T}$ oszlopvektorai – és így $\mathbf{Q}$ soravektorai – ONB-t alkotnak.

e) $\Rightarrow$ *a)*: Az előzőekben beláttuk, hogy *a)*-ból következik *e)*, azaz ha $\mathbf{Q}$ oszlopvektorai ONB-t alkotnak, akkor sorvektorai is. Ezt $\mathbf{Q}^\mathsf{T}$-ra alkalmazva azt kapjuk, hogy ha $\mathbf{Q}$ sorvektorai ONB-t alkotnak, akkor oszlopvektorai is. □

7.77. PÉLDA (ORTOGONÁLIS MÁTRIXOK INVERZE). *Számítsuk ki az*

$$\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix},\quad \frac{1}{7}\begin{bmatrix}2&3&6\\6&2&-3\\3&-6&2\end{bmatrix}.$$

mátrixok inverzét!

MEGOLDÁS. Mindhárom mátrix ortogonális (az első permutáló mátrix, a harmadik ortogonalitását a 7.74. példában ellenőriztük), így az előző tétel szerint inverzük megegyezik transzponáltjukkal, tehát az inverzek:

$$\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix},\quad \frac{1}{7}\begin{bmatrix}2&6&3\\3&2&-6\\6&-3&2\end{bmatrix}.$$

□

Ortogonális mátrixok geometriája Ortogonális mátrixhoz tartozó mátrixleképezés ONB-t ONB-ba visz úgy, ahogy a síkban vagy térben a forgatás és a tükrözés.

7.78. TÉTEL (ORTOGONÁLIS MÁTRIXHOZ TARTOZÓ MÁTRIXLEKÉPEZÉS). *Legyen* $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Az alábbi állítások ekvivalensek:*

a) $\mathbf{Q}$ *ortogonális.*

b) $|\mathbf{Qx}| = |\mathbf{x}|$ *minden* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *vektorra.*

c) $\mathbf{Qx}\cdot\mathbf{Qy} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ *minden* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *vektorra.*

BIZONYÍTÁS. *a)* $\Rightarrow$ *b)*: Ha $\mathbf{Q}$ ortogonális, akkor $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, így tetszőleges $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vektorra

$$|\mathbf{Qx}|^2 = \mathbf{Qx}\cdot\mathbf{Qx} = (\mathbf{Qx})^\mathsf{T}(\mathbf{Qx}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Qx} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2.$$

b) $\Rightarrow$ *c)*: A *b)*-ből következik, hogy

$$|\mathbf{Q}(\mathbf{x}+\mathbf{y})| = |\mathbf{x}+\mathbf{y}| \quad \text{és} \quad |\mathbf{Q}(\mathbf{x}-\mathbf{y})| = |\mathbf{x}-\mathbf{y}|.$$

Ezt, és a skalárszorzás és az abszolút érték közti kapcsolatot megadó

(1.9) egyenletet fölhasználva kapjuk, hogy minden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vektorra

$$\begin{aligned}\mathbf{Qx} \cdot \mathbf{Qy} &= \frac{1}{4}\left(|\mathbf{Qx}+\mathbf{Qy}|^2 - |\mathbf{Qx}-\mathbf{Qy}|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(|\mathbf{Q}(\mathbf{x}+\mathbf{y})|^2 - |\mathbf{Q}(\mathbf{x}-\mathbf{y})|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 - |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2\right)\\ &= \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}\end{aligned}$$

c) $\Rightarrow$ *a)*: A $\mathbf{Q}$ mátrix i-edik oszlopát jelölje $\mathbf{q}_i$, azaz $\mathbf{q}_i = \mathbf{Qe}_i$, ahol $\mathbf{e}_i$ a standard bázis i-edik vektora. Ekkor

$$\mathbf{q}_i \cdot \mathbf{q}_j = \mathbf{Qe}_i \cdot \mathbf{Qe}_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j, \\ 1, & \text{ha } i = j. \end{cases}$$

Tehát $\mathbf{Q}$ oszlopvektorai ortonormált rendszert alkotnak, azaz $\mathbf{Q}$ ortogonális. □

▶ Hasonló állítás igaz szemiortogonális mátrixokra is (ld. **??** feladat).
▶ A tétel egyik állítása úgy is kimondható, hogy egy $\mathbf{Q}$ négyzetes mátrix pontosan akkor ortogonális, ha a $Q : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Qx}$ mátrixleképezés távolságtartó. A tétel másik állítása azt mondja, hogy $\mathbf{Q}$ pontosan akkor ortogonális, ha a Q megtartja a skaláris szorzatot.
▶ Fontos megjegyezni, hogy egy ortogonális mátrix által generált lineáris leképezés másik bázisbeli mátrixa nem szükségképpen ortogonális mátrix (ld. **?? ??** feladat).

7.79. TÉTEL (ORTOGONÁLIS MÁTRIXOK TULAJDONSÁGAI).
a) *Ha $\mathbf{Q}$ valós ortogonális mátrix, akkor $|\det(\mathbf{Q})| = 1$.*
b) *Az $n \times n$-es valós ortogonális mátrixok $O(n)$ halmazából nem vezet ki a mátrixszorzás és invertálás művelete.*

BIZONYÍTÁS. *a)* Mivel $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, ezért $\det(\mathbf{Q}^\mathsf{T})\det(\mathbf{Q}) = \det(\mathbf{I}) = 1$, de $\det(\mathbf{Q}^\mathsf{T}) = \det(\mathbf{Q})$, így $\det(\mathbf{Q}) = 1$ vagy $\det(\mathbf{Q}) = -1$.

b) Ortogonális mátrix inverze megegyezik transzponáltjával, ami ugyancsak ortogonális, tehát inverze is az. Be kell még látni, hogy két ortogonális mátrix szorzata is ortogonális. Legyen $\mathbf{Q}_1$ és $\mathbf{Q}_2$ ortogonális. Ekkor

$$(\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2)^\mathsf{T}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_2^\mathsf{T}\mathbf{Q}_1^\mathsf{T}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_2^\mathsf{T}\mathbf{Q}_2 = \mathbf{I},$$

tehát $\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2$ valóban ortogonális. □

▶ Az is azonnal látható, hogy az $n \times n$-es 1 determinánsú valós ortogonális mátrixok halmazából sem vezet ki a mátrixszorzás és invertálás művelete. E mátrixhalmazt $SO(n)$ jelöli.

A valós ortogonális mátrixok $O(n)$ halmaza a mátrixszorzás műveletével *csoportot* alkot. Ezt ortogonális csoportnak nevezik. A csoportokról a függelékben írunk. Az 1 determinánsú ortogonális mátrixok $SO(n)$ csoportját speciális ortogonális csoportnak nevezik. $O(10)$ fontos szerepet játszik a modern fizika húrelméletében, mint a 10-dimenziós tér-idő szimmetriacsoportja.

A 2- és 3-dimenziós tér ortogonális transzformációi Forgatások és tükrözések segítségével leírhatók az ortogonális mátrixok.

7.80. TÉTEL. *Minden $O(2)$-be eső ortogonális mátrix vagy egy forgatás, vagy egy egyenesre való tükrözés mátrixa.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $\mathbf{Q} = \left[\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right]$. Ha e mátrix ortogonális, akkor oszlopvektorai ortonormált rendszert alkotnak, azaz

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1 \\ c^2 + d^2 &= 1 \\ ac + bd &= 0. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenlet szerint $a^2c^2 = b^2d^2$, azaz $a^2(1-d^2) = (1-a^2)d^2$, amiből $a^2 = d^2$, és $b^2 = c^2$ adódik. Végül kapjuk, hogy vagy $d = a$ és $c = -b$, vagy $d = -a$ és $c = b$. Az első esetben $\det(\mathbf{Q}) = ad - bc = 1$, a másodikban $\det(\mathbf{Q}) = -1$. Vegyük észre, hogy bármely megoldáshoz egyértelműen találunk egy olyan $\alpha \in [0, 2\pi)$ valóst, hogy $a = \cos\alpha$ és $b = \sin\alpha$. Vagyis az összes másodrendű ortogonális mátrix

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad \text{vagy} \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

alakba írható. Ha a determinánsa 1, akkor egy α szögű forgatás, ha determinánsa -1, akkor egy $\alpha/2$ szögű egyenesre való tükrözés mátrixa (ld. a 7.20. és a 7.24. pontokat). □

A 3-dimenziós eset kissé bonyolultabb. Számtalan klasszikus műszaki alkalmazásban – mindenek előtt a merev testek mozgásának leírásában – fontos szerepet játszanak $SO(3)$ elemei, azaz az 1 determinánsú ortogonális mátrixok. Ezek itt és nagyobb dimenzió esetén is a forgások mátrixai. A forgás azonban csak a 3-dimenzióban írható le úgy, mint egy tengely körül α szöggel való elfordulás. E tételt csak a sajátvektorok elméletének ismeretében fogjuk tudni bizonyítani (ld. **??** tétel).

7.81. PÉLDA (FORGATÁS TENGELYE ÉS SZÖGE). *Az 1 determinánsú ortogonális*

$$\frac{1}{15}\begin{bmatrix} 14 & -5 & 2 \\ 5 & 10 & -10 \\ 2 & 10 & 11 \end{bmatrix}$$

mátrix milyen tengely körüli és mekkora szöggel való forgatás mátrixa?

MEGOLDÁS. Ha $\mathbf{A}$ egy 0-tól különböző szöggel való forgatás mátrixa, és $\mathbf{v}$ a tengely egy irányvektora, akkor csak $\mathbf{v}$ skalárszorosai fogják kielégíteni az $\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$ egyenletet. Ez ekvivalens a homogén lineáris

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

egyenletrendszerrel, melynek alakja és megoldása esetünkben

$$\frac{1}{15}\begin{bmatrix}-1 & -5 & 2\\ 5 & -5 & -10\\ 2 & 10 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Tehát a forgástengely egy irányvektora a $\mathbf{v}=(2,0,1)$ vektor. A forgásszög, illetve a forgásszög koszinuszának meghatározásához elég egy olyan $\mathbf{w}$ vektort találni, mely a tengelyre merőleges síkban van. Ilyen például a $\mathbf{w}=(0,1,0)$ vektor. Ennek képe a forgatásnál

$$\frac{1}{15}\begin{bmatrix}14 & -5 & 2\\ 5 & 10 & -10\\ 2 & 10 & 11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/3\\ 2/3\\ 2/3\end{bmatrix}.$$

A forgásszög megegyezik e két vektor szögével, tehát

$$\cos\alpha=\frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{Aw}}{|\mathbf{w}||\mathbf{Aw}|}=\frac{2/3}{1\cdot 1}=\frac{2}{3}.$$

Ez összhangban van a 7.20. feladat eredményével, ahol e forgatást a tengely és a szög ismeretében kellett megkonstruálni. □

$O(3)-SO(3)$ elemei, azaz a harmadrendű -1 determinánsú ortogonális mátrixok ugyan nem mind tükrözések, de egy origóra való tükrözés és egy forgatás egymás utáni alkalmazásával megkaphatók (ld. **??** tétel)!

*Givens-forgatás, Householder-tükrözés** Az n-dimenziós tér forgatásai és tükrözései közül kiválaszthatunk olyan egyszerű, ún. primitív ortogonális transzformációkat, melyek mátrixai szorzataként az összes ortogonális mátrix előállítható. E transzformációkat több hatékony numerikus matematikai módszer is használja.

Azt a forgatást, mely egy koordinátasík vektorain kívül minden más vektort helyben hagy, *Givens-forgatásnak* nevezzük. Az i-edik és j-edik koordinátatengely síkját érintő forgatás mátrixa

$$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & \cos\alpha & \dots & -\sin\alpha & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & \sin\alpha & \dots & \cos\alpha & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}$$

amit úgy kapunk meg, hogy az egységmátrix i-edik és j-edik sorának és oszlopának metszetében lévő négy helyre az α szögű forgatás mátrixát tesszük.

E forgatással elérhető például, hogy egy $\mathbf{x}$ vektort egy olyan vektorba forgassunk, melynek j-edik koordinátája 0. Csak az i-edik és j-edik sorokat és oszlopokat kiemelve

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ebből látható, hogy az

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\alpha &= {}^a/_r \\ \sin\alpha &= -{}^b/_r \end{aligned} \tag{7.23}$$

egyenletek segítségével fölírható a forgatómátrix az a és b ismeretében. Ez használható mátrix háromszögalakra hozásában, például a következőkben vizsgált QR-felbontás Givens-forgatások segítségével is elvégezhető (ld. 7.89. példa). Ennek előnyei a ritka mátrixok esetén mutatkoznak, és a számítások párhuzamosíthatóak is.

Egy adott $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektorra, vagy az $\mathbf{e} = {}^{\mathbf{a}}/_{|\mathbf{a}|}$ egységvektorra merőleges hipersíkra való tükrözést *Householder-tükrözésnek* nevezzük. Mátrixa

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^\mathsf{T}$$

Feladatként az Olvasóra hagyjuk annak bizonyítását, hogy e transzformáció valóban helyben hagyja az $\mathbf{e}^\perp$ tér összes vektorát és $-\mathbf{e}$-be viszi az $\mathbf{e}$ vektort (ld. **??** feladat). E tükrözés is használható egy mátrix háromszögalakra hozásához, QR-felbontásának megkonstruálásához. Ehhez szükség lesz az alábbi állításra.

7.82. ÁLLÍTÁS (EGY VEKTOR TÜKRÖZÉSE EGY MÁSIKBA). *Ha* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *két különböző, de azonos hosszúságú vektor* $\mathbb{R}^n$*-ben, akkor az* $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\perp$ *hipersíkra való Householder-tükrözés az* $\mathbf{a}$ *vektort* $\mathbf{b}$*-be viszi és viszont.*

BIZONYÍTÁS. Meg kell mutatnunk, hogy $\mathbf{Ha} = \mathbf{b}$ és $\mathbf{Hb} = \mathbf{a}$, ahol

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{2}{(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\mathsf{T}(\mathbf{a}-\mathbf{b})}(\mathbf{a}-\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\mathsf{T}.$$

Kihasználjuk, hogy $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ azonos hosszúságúak, így $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a} = \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b}$, és hogy a skaláris szorzás felcserélhető, azaz $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{b} = \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{a}$. Így

$$(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\mathsf{T}(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a} - \mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{b} - \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{a} + \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b} = 2(\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a} - \mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{a}) = 2(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\mathsf{T}\mathbf{a}.$$

Eszerint

$$\begin{aligned} \mathbf{Ha} &= \mathbf{a} - \frac{2}{(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\mathsf{T}(\mathbf{a}-\mathbf{b})}(\mathbf{a}-\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\mathsf{T}\mathbf{a} \\ &= \mathbf{a} - \frac{1}{(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\mathsf{T}\mathbf{a}}(\mathbf{a}-\mathbf{b})^\mathsf{T}\mathbf{a}(\mathbf{a}-\mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a} - (\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H}$, ezért $\mathbf{Hb} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{a}$. □

7.83. PÉLDA (HOUSEHOLDER-TÜKRÖZÉS). *Határozzuk meg azt a* $\mathbf{H}$ *mátrixot, mely az* $(1,-1,-1,1)$ *vektort olyan vektorba viszi, melynek az elsőt kivéve minden koordinátája* 0.

MEGOLDÁS. $|(1,-1,-1,1)| = 2$, ezért a képvektor csak a $\pm(2,0,0,0)$ vektorok valamelyike lehet. Válasszuk a pozitív koordinátájút. Az $(1,-1,-1,1)-(2,0,0,0) = (-1,-1,-1,1)$ vektorra merőleges hipersíkra való tükrözés mátrixa

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Fejben számolva is könnyen ellenőrizhetjük, hogy $\mathbf{H}\cdot(1,-1,-1,1) = (2,0,0,0)$. □

Ortogonalizáció

*Gram–Schmidt-ortogonalizáció** Nagy előnyökkel jár, ha egy altérnek nem csak egy bázisát, hanem egy ortogonális bázisát ismerjük. E paragrafusban megmutatjuk, hogy ilyen bázis létezik, és eljárást adunk a megkonstruálására. Ezt az eljárást Gram–Schmidt-ortogonalizációnak nevezzük.

7.84. TÉTEL (GRAM–SCHMIDT-ORTOGONALIZÁCIÓ). *Ha* $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ *egy független vektorrendszer, akkor létezik olyan ortogonális* $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ *vektorrendszer, hogy minden* $i = 1, 2, \dots, k$ *esetén*

$$\operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_i) = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i). \tag{7.24}$$

Az ortogonális $\mathcal{V}$ *rendszerből a vektorok normálásával kapott*

$$\left\{ \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}, \frac{\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|}, \dots, \frac{\mathbf{v}_k}{|\mathbf{v}_k|} \right\}$$

rendszer ortonormált.

BIZONYÍTÁS. A $\operatorname{span}(\mathbf{a}_1) = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1)$ összefüggés teljesül, ha

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1.$$

A $\operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ teljesülése érdekében olyan $\mathbf{v}_2$ vektort kell választani, mely az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ síkjában van, másrészt $\mathbf{v}_2$-nek merőlegesnek kell lennie $\mathbf{v}_1$-re. E feltételeket teljesíti az $\mathbf{a}_2$-nek a $\mathbf{v}_1$ által kifeszített altérre merőleges összetevője, azaz a

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - \left(\mathbf{a}_2 \cdot \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}\right) \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} = \mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1$$

vektor. Látható, hogy e vektor nem lehet a 0-vektor, hisz $\mathbf{v}_2 = 0$ esetén $\mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{a}_1$ lenne, azaz $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ nem lenne független, ami ellentmond annak, hogy $\mathcal{A}$ független. Az előző képletekből látható, hogy $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ előállítható az $\mathbf{a}_1$ és $\mathbf{a}_2$ lineáris kombinációjaként, és viszont, így $\operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ fönnáll. Az eljárás hasonlóképp folytatható. Ha már megkonstruáltuk $\mathbf{v}_i$-t, akkor a 7.71. tétel szerint kiszámoljuk az $\mathbf{a}_{i+1}$ vektornak a $\operatorname{span}(\frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}, \frac{\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|}, \dots, \frac{\mathbf{v}_i}{|\mathbf{v}_i|})$ altérre merőleges összetevőjét, és ezt választjuk $\mathbf{v}_{i+1}$-nek, azaz

$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{a}_{i+1} - \frac{\mathbf{a}_{i+1} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{a}_{i+1} \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 - \dots - \frac{\mathbf{a}_{i+1} \cdot \mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i}\mathbf{v}_i$$

Könnyen látható, hogy $\mathbf{v}_{i+1} \neq \mathbf{0}$, mert ellenkező esetben $\mathcal{A}$ nem volna független. Látható az is, hogy $\mathbf{v}_{i+1}$ kifejezhető az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \dots$, $\mathbf{a}_{i+1}$ vektorok lineáris kombinációjaként, és $\mathbf{a}_{i+1}$ kifejezhető az $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \dots$, $\mathbf{v}_{i+1}$ vektorok lineáris kombinációjaként, tehát a tétel kifeszített alterekre vonatkozó állítása is fennáll. □

7.85. PÉLDA (GRAM–SCHMIDT-ORTOGONALIZÁCIÓ). *Keressünk ortonormált bázist az* $(1,1,1,1)$, $(3,-1,3,-1)$, $(6,2,2,-2)$ *vektorok által kifeszített altérben.*

MEGOLDÁS. Először keressünk egy ortogonális bázist:

$$\mathbf{v}_1 = (1,1,1,1)$$

$$\mathbf{v}_2 = (3,-1,3,-1) - \frac{(3,-1,3,-1)\cdot(1,1,1,1)}{(1,1,1,1)\cdot(1,1,1,1)}(1,1,1,1) = (2,-2,2,-2)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_3 = (6,2,2,-2) &- \frac{(6,2,2,-2)\cdot(1,1,1,1)}{(1,1,1,1)\cdot(1,1,1,1)}(1,1,1,1)\\ &- \frac{(6,2,2,-2)\cdot(2,-2,2,-2)}{(2,-2,2,-2)\cdot(2,-2,2,-2)}(2,-2,2,-2) = (2,2,-2,-2)\end{aligned}$$

Végül az ortonormált bázis:

$$\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right\}$$ □

► Könnyen igazolható, hogy a Gram–Schmidt-ortogonalizáció működik nem független vektorokból álló vektorrendszerre is, annyi változással, hogy pontosan akkor lesz $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, ha $\mathbf{a}_i$ nem független a kisebb indexű vektoroktól, azaz $\mathbf{a}_i$ benne van a $\operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1})$ altérben.

*A QR-felbontás** Ahogyan egy mátrix elemi sorműveletekkel való háromszögalakra hozását tömör formában őrzi az LU-felbontás, ugyanígy a QR-felbontás őrzi az ortogonalizációs eljárás eredményét. E felbontás mind a legkisebb négyzetek módszerében, mind a később tárgyalandó sajátértékprobléma megoldásában fontos szerephez jut.

7.86. DEFINÍCIÓ (QR-FELBONTÁS). *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy teljes oszloprangú valós mátrix. Az* $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ *felbontást* QR-felbontásnak *vagy* redukált QR-felbontásnak *nevezzük, ha* $\mathbf{Q}$ *az* $\mathbf{A}$*-val azonos méretű szemiortogonális mátrix, és* $\mathbf{R}$ *négyzetes felső háromszögmátrix, főátlójában pozitív elemekkel.*

► Ha a $\mathbf{Q}$ mátrixot új oszlopvektorok hozzávételével kiegészítjük egy ortogonális mátrixszá (mindig megtehetjük, miért?), az $\mathbf{R}$ mátrixot pedig zérussorok hozzávételével egy $m \times n$-es felső háromszögmátrixszá, akkor e mátrixok szorzata is $\mathbf{A}$, ugyanis

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \hat{\mathbf{Q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} = \mathbf{QR} + \hat{\mathbf{Q}}\mathbf{O} = \mathbf{QR}$$

Ezt a bővebb felbontást is szokás QR-felbontásnak nevezni. Mi erre inkább a *teljes QR-felbontás* elnevezést használjuk. Ekkor tehát az $\mathbf{A}$ mátrixot egy ortogonális mátrix, és egy $\mathbf{A}$-val azonos méretű felső háromszögmátrix szorzatára bontjuk.

► Vannak művek és programok, amelyek QR-felbontásnak tekinti azt is, ha $\mathbf{Q}$ semiortogonális, $\mathbf{R}$ felső háromszögmátrix, de a főátló elemeiről nincs kikötve, hogy pozitív legyen! (Pl. a mátrixalapú nyelvek is ilyen alakú felbontást adnak.) Ezeket könnyen átkonvertálhatjuk pozitív főátlójú felbontásra. Ha valamely i-re $r_{ii} < 0$ lenne, akkor szorozzuk be az $\mathbf{R}$ mátrix i-edik sorvektorát és a $\mathbf{Q}$ mátrix i-edik oszlopát, azaz a $\mathbf{q}_i$ vektort -1-gyel. Ez a szorzaton nem változtat. Így elérhetjük, hogy $\mathbf{R}$ minden főátlón lévő eleme pozitív legyen.

A Gram–Schmidt-ortogonalizációs eljárásból könnyen előállítható egy mátrix QR-felbontása. Legyen $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \dots\ \mathbf{a}_k] \in \mathbb{R}^{n\times k}$. Mivel $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú, azaz oszlopai függetlenek, ezért $k \leq n$. Az ortogonalizációs eljárás végén kapott egységvektorokat jelölje $\mathbf{q}_i$, azaz $\mathbf{q}_i = \frac{\mathbf{v}_i}{|\mathbf{v}_i|}$ $(i = 1, 2, \dots, k)$. Mivel a Gram–Schmidt-ortogonalizációs tétel szerint $\operatorname{span}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i) = \operatorname{span}(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_i)$ minden $i = 1, 2, \dots, k$ értékre, ezért léteznek olyan r_{ij} skalárok, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= r_{11}\mathbf{q}_1 \\ \mathbf{a}_2 &= r_{12}\mathbf{q}_1 + r_{22}\mathbf{q}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_k &= r_{1k}\mathbf{q}_1 + r_{2k}\mathbf{q}_2 + \dots + r_{kk}\mathbf{q}_k. \end{aligned} \tag{7.25}$$

Ezt mátrixszorzat-alakba írva épp a kívánt felbontást kapjuk:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \dots & \mathbf{q}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1k} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{kk} \end{bmatrix} = \mathbf{QR}.$$

A Gram–Schmidt-eljárásból az is látható, hogy $r_{ii} = |\mathbf{v}_i|$, tehát $r_{ii} > 0$. Ezzel bizonyítottuk a QR-felbontás létezését.

A Gram-Schmidt-eljárásból megkaphatjuk a $\mathbf{Q}$ mátrixot, azonban kérdés, hogy az $\mathbf{R}$ hogyan számítható ki egyszerűen. A 7.75. állítás egyszerű megoldást ad. Ha $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$, akkor az egyenlőség mindkét oldalát $\mathbf{Q}^\mathsf{T}$-tal szorozva kapjuk, hogy $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{QR} = \mathbf{I}_k\mathbf{R} = \mathbf{R}$, tehát

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}.$$

7.87. PÉLDA (QR-FELBONTÁS KISZÁMÍTÁSA). *Határozzuk meg az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását.

MEGOLDÁS. A 7.85. példában épp az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektoraiból álló vektorrendszert ortogonalizáltuk. Mivel a három vektor lineárisan független, ezért $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú. A 7.85. példa megoldása alapján az $\mathbf{A}$ oszlopvektorainak ortogonalizálásával kapott vektorokkal fölírható a $\mathbf{Q}$ mátrix:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Innen

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Valóban,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

□

7.88. TÉTEL (QR-FELBONTÁS LÉTEZÉSE ÉS EGYÉRTELMŰSÉGE). *Bármely valós, teljes oszloprangú* $\mathbf{A}$ *mátrixnak létezik QR-felbontása, azaz létezik egy szemiortogonális* $\mathbf{Q}$ *mátrix és egy* $\mathbf{R}$ *felső háromszögmátrix pozitív főátlóbeli elemekkel, hogy* $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$*. Az így kapott felbontás egyértelmű.*

BIZONYÍTÁS. A felbontás létezését a Gram–Schmidt-ortogonalizációra alapozva az előzőekben megmutattuk.

Tegyük fel, hogy létezik két felbontás is, azaz $\mathbf{A} = \mathbf{QR} = \hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{R}}$, ahol $\mathbf{Q}$ és $\hat{\mathbf{Q}}$ szemiortogonális, azaz $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{Q}}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{I}$. Ekkor $\mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R} = \hat{\mathbf{R}}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{R}}$, ugyanis

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = (\mathbf{QR})^\mathsf{T}\mathbf{QR} = \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{QR} = \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R},$$
$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = (\hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{R}})^\mathsf{T}\hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{Q}}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{R}}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{R}}.$$

Innen $(\hat{\mathbf{R}}^{-1})^\mathsf{T}\mathbf{R}^\mathsf{T} = \hat{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{-1}$. Itt a bal oldalon egy alsó, a jobb oldalon egy felső háromszögmátrix áll. Ez csak úgy lehetséges, ha mindkét szorzat diagonális. Jelölje $\mathbf{R}$, illetve $\hat{\mathbf{R}}$ átlójának elemeit r_i, illetve $\hat{r}_i$ ($i = 1, \dots, n$). A főátló elemei tehát

$$\frac{r_i}{\hat{r}_i} = \frac{\hat{r}_i}{r_i},$$

ahonnan $r_i > 0$ és $\hat{r}_i > 0$ miatt $r_i = \hat{r}_i$ következik. Eszerint $(\hat{\mathbf{R}}^{-1})^\mathsf{T}\mathbf{R}^\mathsf{T} = \hat{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I}$, amiből $\mathbf{R} = \hat{\mathbf{R}}$ adódik, majd abból $\mathbf{A} = \mathbf{QR} = \hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{R}}$ miatt $\mathbf{Q} = \hat{\mathbf{Q}}$. □

*QR-felbontás primitív ortogonális transzformációkkal** A QR-felbontás a Gram–Schmidt-ortogonalizáció helyett más technikákkal, így például a primitív ortogonális transzformációkkal is kiszámolható. Hasonlóan az Gauss-eliminációhoz itt is a háromszögalakra hozást eliminációval valósítjuk meg, de most nem elemi mátrixokkal, hanem ortogonálisokkal.

7.89. PÉLDA (QR-FELBONTÁS GIVENS-FORGATÁSOKKAL). *Határozzuk meg az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 8 \\ 3 & 10 & 6 \\ 0 & 12 & 13 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását Givens-forgatások segítségével!

MEGOLDÁS. Először az első és második sorokat és oszlopokat figyelve elimináljuk a második sor első elemét. Itt a (7.23) egyenletekben is használt jelölésekkel $a = 4$, $b = 3$, tehát $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $\cos\alpha = 4/5$, $\sin\alpha = -3/5$. Így első lépésben a következő mátrixszorzással eliminálhatunk:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 4/5 & 3/5 & 0 \\ -3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 12 & 13 \end{bmatrix}.$$

Következő lépésben a $\mathbf{Q}_1\mathbf{A}$ mátrix harmadik sorának második elemét elimináljuk:

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/13 & 12/13 \\ 0 & -12/13 & 5/13 \end{bmatrix}. \qquad \mathbf{R} = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 0 & 13 & 12 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

és innen

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1)^{-1} = \mathbf{Q}_1^\mathsf{T}\mathbf{Q}_2^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 4/5 & -3/13 & 36/65 \\ 3/5 & 4/13 & -48/65 \\ 0 & 12/13 & 5/13 \end{bmatrix},$$

amely mátrixokkal $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ valóban fennáll. □

A Householder-tükrözést alkalmazva a QR-felbontásra egy további módszert kaphatunk. Az ötlet lényege, hogy a 7.83. példában látott módon először az első oszlopban elimináljuk az első elem alattiakat, majd olyan transzformációt választunk, mely az első sort és oszlopot nem változtatja, de a második sor második eleme alattiakat eliminálja, és így tovább. Egy 4×4-es mátrixon szemléltetjük az eljárást.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \to \mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix} \to \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix} \to \mathbf{Q}_3\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{H}_1 \qquad \mathbf{Q}_2 = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & \mathbf{H}_2 & \\ 0 & & & \end{array}\right] \qquad \mathbf{Q}_3 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\mathbf{H}_3$}} \\ 0 & 0 & & \end{array}\right]$$

Az első lépésben az $\mathbf{A}$ mátrix első oszlopához ($\mathbf{a}_1$) keresünk egy $\mathbf{b}_1$ vektort, mely vele egyenlő hosszú, és csak az első koordinátája nem 0. Ezután az $\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1$ vektorhoz megkonstruáljuk a $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{H}_1$ Householder-mátrixot. Így $\mathbf{Q}_1\mathbf{A}$ első oszlopában kinulláztuk az első sor alatti elemeket. Ezután elhagyjuk az első sort és oszlopot, és az így kapott mátrix első oszlopvektorával ($\mathbf{a}_2$) és a vele egyenlő hosszú, és az első koordinátát kivéve 0 koordinátájú $\mathbf{b}_2$ vektorral megkonstruáljuk a $\mathbf{H}_2$ Householder-mátrixot, melyet kiegészítünk egy sorral és oszloppal úgy, hogy a $\mathbf{Q}_1\mathbf{A}$ mátrixszal szorozva annak első sorát és oszlopát ne változtassa. Ez lesz a $\mathbf{Q}_2$ mátrix. Hasonlóan folytatva végül egy $\mathbf{R} = \mathbf{Q}_{n-1} \ldots \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A}$ felső háromszögmátrixhoz jutunk (a fenti mintán $n = 4$). Mivel a $\mathbf{Q}_i$ mátrixok mindegyike ortogonális, ezért szorzatuk inverze is az lesz. Így a QR-felbontásban $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1^\mathsf{T}\mathbf{Q}_2^\mathsf{T} \ldots \mathbf{Q}_{n-1}^\mathsf{T}$. A QR-felbontás ilyen módon való meghatározását nevezzük *Householder-módszernek*.

7.90. PÉLDA (QR-FELBONTÁS HOUSEHOLDER-TÜKRÖZÉSSEL). *Határozzuk meg az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását Householder-módszerrel!

MEGOLDÁS. Az $(1,2,-2) \mapsto (3,0,0)$ transzformációhoz az

$$\mathbf{a} = (1,2,-2) - (3,0,0) = (-2,2,-2)$$

vektorral Householder-tükrözést végzünk:

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{I}_3 - \frac{2}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 5 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Ezután a $\mathbf{Q}_1\mathbf{A}$ mátrixból képzeletben elhagyva az első sort és oszlopot a $(4,3) \mapsto (5,0)$ transzformációhoz kell az $\mathbf{a} = (4,3) - (5,0) = (-1,3)$ vektorral Householder-tükrözést végezni:

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{I}_2 - \frac{2}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_2 = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 4/5 & 3/5 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \end{array}\right], \qquad \mathbf{R} = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1)^{-1} = \mathbf{Q}_1^\mathsf{T}\mathbf{Q}_2^\mathsf{T} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 14 \\ 10 & 10 & -5 \\ -10 & 11 & 2 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ egyenlőség fennállásának ellenőrzését az Olvasóra hagyjuk. □

*Egyenletrendszer optimális megoldása QR-felbontással** Ha egy egyenletrendszer ellentmondásos, az optimális megoldás megtalálásához fölírt normálegyenlet gyakran rosszul kondicionált, ezért érdemes olyan megoldási technikát keresni, mely hatékonyabb a számítási hibák kezelésében. Egy ilyen technikát ismertetünk.

7.91. TÉTEL (LEGKISEBB NÉGYZETEK QR-FELBONTÁSSAL). *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy teljes oszloprangú* $m \times n$*-es valós mátrix,* $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ *egy QR-felbontása, és legyen* $\mathbf{b}$ *egy* $\mathbb{R}^m$*-beli vektor. Ekkor az* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *egyenletrendszer egyetlen optimális megoldása* $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b}$*, ami megkapható az*

$$\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b}$$

egyenletrendszerből egyszerű visszahelyettesítéssel is.

BIZONYÍTÁS. Az egyenletrendszer optimális megoldásáról szóló 7.51. tétel szerint az optimális megoldás a normálegyenletből megkapható. Eszerint

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b} && \mathbf{A} = \mathbf{QR} \text{ behelyettesítése után}\\
(\mathbf{QR})^\mathsf{T}\mathbf{QR}\hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{QR})^\mathsf{T}\mathbf{b} &&\\
\mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{QR}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b} && \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{Q} = \mathbf{I}\\
\mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b} && \text{balról szorzás az } (\mathbf{R}^\mathsf{T})^{-1} \text{ mátrixszal}\\
\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b}.
\end{aligned}$$

Az utolsó egyenlet visszahelyettesítésekkel is megoldható, mivel $\mathbf{R}$ felső háromszögmátrix. Mivel $\mathbf{R}$ főátlójában nincsenek zéruselemek, ezért $\mathbf{R}$ invertálható (ezt kihasználtuk, amikor $(\mathbf{R}^\mathsf{T})^{-1}$-gyel szoroztunk), tehát az egyenletből $\hat{\mathbf{x}}$ kifejezhető: $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b}$. □

7.92. PÉLDA (EGYENLETRENDSZER OPTIMÁLIS MEGOLDÁSA). *Az alábbi háromismeretlenes egyenletrendszert megoldottuk a 7.68. példában:*

$$\begin{aligned}
x + 3y + 6z &= 8\\
x - y + 2z &= 2\\
x + 3y + 2z &= 2\\
x - y - 2z &= 0
\end{aligned}$$

Adjunk rá új, a QR-felbontást használó megoldást!

MEGOLDÁS. Az egyenletrendszer együtthatómátrixának QR-felbontását meghatároztuk a 7.87. példában. Eszerint

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 3 & 2\\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4\\ 0 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Egyik lehetőség, hogy fölírjuk az $\mathbf{R}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{b}$ mátrixegyenletet:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4\\ 0 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8\\ 2\\ 2\\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\\ 4\\ 4 \end{bmatrix}$$

Ezt az egyenletrendszert fejben is meg tudjuk oldani visszahelyettesítéssel: $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = (1, 0, 1)$. Természetesen ha már kiszámoltuk az $\mathbf{R}^{-1}$ mátrixot, akkor segítségével is megkapható az optimális megoldás:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{b} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

□

Feladatok

7.33. $\mathbb{R}^4$ egy 2-dimenziós alterének bázisvektorai az $(1, 1, -1, -1)$ és a $(9, 3, -1, 5)$ vektorok. A Gram–Schmidt-eljárással adjuk meg az altér egy ortonormált bázisát.

7.34. $\mathbb{R}^4$ egy 2-dimenziós alterének bázisvektorai az $(1, -1, 1, -1)$ és a $(8, 6, 2, 0)$ vektorok. A Gram–Schmidt-eljárással adjuk meg az altér egy ortonormált bázisát.

Adjuk meg az alábbi mátrixok QR-felbontását a Gram–Schmidt-eljárás alkalmazásával!

7.35. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & -20 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

7.36. $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ -1 & 6 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

7.37. Adjuk meg az alábbi mátrix QR-felbontását Givens-forgatással!

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 2 \\ 15 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

7.38. Adjuk meg az alábbi mátrix QR-felbontását Householder-tükrözésekkel!

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

7.39. Milyen geometriai interpretáció adható az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektoraival kifejezve az $\mathbf{A}$ QR-felbontásában szereplő $\mathbf{R}$ mátrix főátlóbeli elemeinek?

7.40.▪ Számítsuk ki a

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix QR-felbontását!

7.41. Igazoljuk, hogy ha $\mathbf{e}$ az $\mathbb{R}^n$ egy egységvektora, akkor $\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T}$ lesz a Householder-transzformáció mátrixa, mely helyben hagyja az $\mathbf{e}^\perp$ altér összes vektorát és $\mathbf{He} = -\mathbf{e}$.

Komplex és véges test feletti terek*

A következőkben egyre többször szembesülünk azzal, hogy valós számokkal megfogalmazható problémák megválaszolásához is szükség van a komplex számokra. E fejezetben a geometriai szemléletmódot is kiterjesztjük a komplex terekre. A geometriai analógiák még a véges test feletti terek esetén is használhatók némi óvatossággal.

Komplex vektorok és terek

Komplex vektorok skaláris szorzata Ha $\mathbb{C}^n$-beli vektorok skaláris szorzatát úgy értelmeznénk, mint a valós vektorok esetén, fura dolgok történnének.

Vegyük például a $(1, \mathrm{i})$ és az (i, i) vektorokat. Önmagával vett skaláris szorzata e két vektornak ez lenne:

$$(1, \mathrm{i}) \cdot (1, \mathrm{i}) \stackrel{?}{=} 1 - 1 = 0$$
$$(\mathrm{i}, \mathrm{i}) \cdot (\mathrm{i}, \mathrm{i}) \stackrel{?}{=} -1 - 1 = -2$$

Ez azt mutatja, hogy ha a komplex vektorok abszolút értékét (hosszát), a valósban használt skaláris szorzattal definiálnánk, az abszolút érték legfontosabb tulajdonságai nem maradnának igazak! Kérdés, kiterjeszthető-e a valós vektorok skaláris szorzatának definíciója a komplex vektorokra úgy, hogy a fontosabb tulajdonságok érvényben maradjanak? Az ötletet a komplex számok – mint egydimenziós vektorok – abszolút értéke adja. A $z = a + \mathrm{i}b$ szám abszolút értékének négyzete $z\bar{z}$, és nem z^2! Eszerint az egydimenziós z vektor önmagával vett skaláris szorzatának $z\bar{z}$-t vagy $\bar{z}z$-t kell adnia. Ennek megfelelően a $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ és a $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ vektorok skaláris szorzatának egy lehetséges definíciója

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} + \cdots + z_n\overline{w_n}, \text{ vagy}$$
$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = \overline{z_1}w_1 + \overline{z_2}w_2 + \cdots + \overline{z_n}w_n.$$

Mindkét fenti képlet használható, ízlés kérdése melyiket választjuk (könyvenként változik). Mi az utóbbit fogjuk használni a skaláris szorzat mátrixszorzatos alakjának egyszerűbb volta miatt (ld. majd a 7.94. definícióban). Mindenek előtt egy elnevezés:

7.93. definíció (Komplex mátrix adjungáltja). *Az* $\mathbf{A}$ *komplex mátrix* adjungáltján *(vagy* Hermite-féle transzponáltján*) elemenkénti konjugáltjának transzponáltját értjük. Az* $\mathbf{A}$ *adjungáltját* $\mathbf{A}^*$, *vagy Hermite neve után* $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}$ *jelöli, tehát* $\mathbf{A}^{\mathsf{H}} = \overline{\mathbf{A}}^{\mathsf{T}}$.

Például $\begin{bmatrix} \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 \end{bmatrix}^{\mathsf{H}} = \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 2 \end{bmatrix}$, míg $[1-\mathrm{i} \;\; \mathrm{i}]^{\mathsf{H}} = \begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix}$.

Legyünk óvatosak az *adjungált* kifejezéssel: a könyvünk determinánsokról szóló fejezetében *klasszikus adjungáltnak* nevezett fogalmat ne keverjük össze ezzel az adjungálttal, nincs közük egymáshoz!

7.94. DEFINÍCIÓ (KOMPLEX VEKTOROK SKALÁRIS SZORZATA). *A $\mathbb{C}^n$-beli $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ és $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ vektorok skaláris szorzatán a*

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = \overline{z_1} w_1 + \overline{z_2} w_2 + \cdots + \overline{z_n} w_n$$

komplex skalárt értjük. Ennek mátrixszorzatos alakja $\mathbf{z} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{z}^{\mathsf{H}} \mathbf{w}$.

Így a fent említett $(1, \mathrm{i})$ és az (i, i) önmagukkal és egymással vett skaláris szorzatai:

$$(1,\mathrm{i}) \cdot (1,\mathrm{i}) = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}^{\mathsf{H}} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = 1 - \mathrm{i}^2 = 2, \tag{7.26}$$

$$(\mathrm{i},\mathrm{i}) \cdot (\mathrm{i},\mathrm{i}) = \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}^{\mathsf{H}} \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = -\mathrm{i}^2 - \mathrm{i}^2 = 2,$$

$$(1,\mathrm{i}) \cdot (\mathrm{i},\mathrm{i}) = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}^{\mathsf{H}} \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = \mathrm{i} - \mathrm{i}^2 = 1 + \mathrm{i},$$

$$(\mathrm{i},\mathrm{i}) \cdot (1,\mathrm{i}) = \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}^{\mathsf{H}} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} = -\mathrm{i} - \mathrm{i}^2 = 1 - \mathrm{i}.$$

► Világos, hogy két valós vektor skaláris szorzata az eredeti és e definíció szerint is ugyanazt az eredményt adja, ugyanis minden valós r számra $\bar{r} = r$, tehát valós $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok esetén $\mathbf{u}^{\mathsf{H}} = \mathbf{u}^{\mathsf{T}}$, így $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathsf{H}} \mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathsf{T}} \mathbf{v}$. Tehát a fenti definíció kiterjesztése a valósban használt definíciónak.

► E definícióval a vektorok hosszára vonatkozó tulajdonságok is érvényben maradnak, amit hamarosan belátunk (ld. ??? tétel).

Az adjungált tulajdonságai kiterjesztései a valós mátrixok transzponáltja tulajdonságainak, hisz valós mátrix konjugáltja megegyezik önmagával. Ez azonnal bizonyítja az alábbi tételt:

7.95. TÉTEL (AZ ADJUNGÁLT TULAJDONSÁGAI). *Legyenek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ komplex mátrixok, c komplex szám. Ekkor*

a) $(\mathbf{A}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}$,

b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}^{\mathsf{H}} + \mathbf{B}^{\mathsf{H}}$,

c) $(c\mathbf{A})^{\mathsf{H}} = \bar{c} \mathbf{A}^{\mathsf{H}}$

d) $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{\mathsf{H}} = \mathbf{B}^{\mathsf{H}} \mathbf{A}^{\mathsf{H}}$.

Az adjungált tulajdonságaiból azonnal következik a következő tétel:

7.96. TÉTEL (A KOMPLEX SKALÁRIS SZORZÁS TULAJDONSÁGAI). *Legyen $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$, és legyen $c \in \mathbb{C}$. Ekkor*

a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}$

b) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$,

c) $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \bar{c}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ *és* $\mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$,
d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0$, *ha* $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, *és* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$, *ha* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

► Könnyen látható, hogy e tétel kiterjesztése a valós térbeli vektorokra kimondott 1.18. tételnek, bár első pillanatra úgy tűnhet, hogy ellentmond neki. Például valósban a skaláris szorzás kommutatív, itt nem, de a most kimondott változat érvényes valós vektorokra is, hisz valós vektor konjugáltja megegyezik önmagával. Hasonló állítható a *c)* tulajdonságról is.
► A *c)*-beli két tulajdonság bármelyike következik a másikból az *a)* alkalmazásával. Ha a skaláris szorzatot az $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^{\mathsf{H}}\mathbf{u}$ képlettel definiáltuk volna, akkor a természetesebbnek ható $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ összefüggés volna igaz.
► *d)*-ben az is az állítás része, hogy egy komplex vektor önmagával vett skaláris szorzata egyáltalán valós szám.
► A *d)* úgy is megfogalmazható, hogy $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$, és $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ pontosan akkor áll fönn, ha $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Bizonyítás. A bizonyítás a skaláris szorzás mátrixszorzatos alakjából, és a konjugált tulajdonságaiból azonnal adódik. Példaként megmutatjuk az *a)* bizonyítását:

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}} &= \overline{\mathbf{v}^{\mathsf{H}}\mathbf{u}} = \overline{\overline{\mathbf{v}}^{\mathsf{T}}\mathbf{u}} = \mathbf{v}^{\mathsf{T}}\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{u}}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} = \mathbf{u}^{\mathsf{H}}\mathbf{v} \\ &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\end{aligned}$$

A többi állítás hasonlóan bizonyítható. □

Komplex mátrixok kitüntetett alterei Mivel a komplex mátrixszorzásban nem az egyik mátrix sorának és a másik egy oszlopának skaláris szorzatát számítjuk ki, megváltoznak a kitüntetett alterek.

Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ esetén az $\mathbf{Ax}$ szorzatban nem $\mathbf{A}$ sorterének egy $\mathbf{a}_i$ vektorát szorozzuk skalárisan az $\mathbf{x}$ vektorral, hanem a sortér konjugáltjának egy vektorát, ugyanis

$$\bar{\mathbf{a}}_i \cdot \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = [\mathbf{Ax}]_i.$$

A sortér konjugáltjaiból álló vektorok is alteret alkotnak, amely megyezik $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}$ oszlopterével ($\overline{\mathcal{S}(\mathbf{A})} = \mathcal{O}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}})$). Így az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenlet azt jelenti, hogy a sortér vektorainak konjugáltjaiból álló tér merőleges a nulltérre, így az is adódik, hogy $\mathbb{C}^n = \mathcal{O}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A})$ és hasonlóképp $\mathbb{C}^m = \mathcal{O}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}})$. Az $\mathbf{A}$ komplex mátrix kitüntetett alterein tehát az $\mathcal{O}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{O}(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}})$ tereket értjük. Az, hogy a konzisztens $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletnek egyetlen megoldása esik a sortér konjugáltjába, azaz $\mathcal{O}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}})$-ba, hasonlóan bizonyítható, mint valós mátrix esetén. Igaz tehát a következő tétel:

7.97. TÉTEL (KOMPLEX MÁTRIX KITÜNTETETT ALTEREI). *Az* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *mátrix kitüntetett altereire igazak a következő állítások:*

a) $\mathcal{O}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{O}(\mathbf{A}) \perp \mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}})$,

b) $\mathbb{C}^n = \mathcal{O}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathbb{C}^m = \mathcal{O}(\mathbf{A}) \oplus \mathcal{N}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}})$,

c) az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ *mátrixleképezés kölcsönösen egyértelmű* $\mathcal{O}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}})$ *és* $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ *között.*

Önadjungált mátrixok Ahogy a transzponált fogalmának a – komplex skaláris szorzatot figyelembe vevő – kiterjesztése az adjungált, ugyanúgy a szimmetrikus mátrix fogalmának kiterjesztése az önadjungált mátrix. Szimmetrikus mátrix az, amelyik megegyezik saját transzponáltjával, önadjungált az, amelyik megegyezik saját adjungáltjával.

Az $\mathbf{A}$ komplex mátrix *önadjungált*, ha

$$\mathbf{A}^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}. \tag{7.27}$$

► Az önadjungált mátrixokat *Hermite-féle mátrixnak* is nevezik.

► Világos, hogy önadjungált mátrix főátlójában csak valósok állhatnak, mert csak azok egyeznek meg saját konjugáltjukkal.

► Minden valós szimmetrikus mátrix önadjungált, hisz a valós számok megegyeznek saját konjugáltjukkal. Sőt, mivel a nem valós komplex számok nem egyeznek meg saját konjugáltjukkal, ezért a komplex szimmetrikus mátrixok pontosan akkor önadjungáltak, ha minden elemük valós.

7.98. PÉLDA (ÖNADJUNGÁLT MÁTRIXOK). *Az*

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 & 2-3\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 2+3\mathrm{i} & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixok közül az első kettő önadjungált, a harmadik nem, mert főátlójában nem minden szám valós, a negyedik sem, az viszont komplex szimmetrikus mátrix!

Távolság és a merőleges vetítés komplex terekben A komplex skaláris szorzás segítségével – a valós esethez hasonlóan – definiálható a komplex vektorok távolsága és merőlegessége.

A komplex $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ vektor *hossza*, vagy *abszolút értéke* $|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}$, *két vektor távolsága* megegyezik különbségük hosszával, azaz $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ vektorok esetén $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|$. Két vektort *merőlegesnek* tekintünk, ha skaláris szorzatuk 0.

Két komplex vektor szögének koszinusza, nem definiálható a valóshoz hasonló módon, még a képlettel sem! Ld. a **??**, a **??** feladatokat.

7.99. TÉTEL (CAUCHY–BUNYAKOVSZKIJ–SCHWARZ-EGYENLŐTLENSÉG).

Tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ *vektorokra*

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \le |\mathbf{u}||\mathbf{v}|. \tag{7.28}$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{u}$ *és* $\mathbf{v}$ *lineárisan összefüggők, azaz ha egyik vektor a másik skalárszorosa.*

Az 1.51. tétel bizonyítása minimális változtatással megy itt is!

► A valós és komplex skaláris szorzat használata között több különbség következménye annak, hogy komplex vektorok szöge nem definiálható a valóssal azonos módon (ld. a **??**, a **??** feladatokat), így a Pitagorasz-tétel sem mondható ki azonos módon (ld. a 7.50. feladatot).

Unitér mátrixok Az ortogonális mátrixok komplex analogonjai az unitér mátrixok.

7.100. DEFINÍCIÓ (UNITÉR MÁTRIX). *Egy komplex négyzetes* $\mathbf{U}$ *mátrix* unitér, *ha* $\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{U} = \mathbf{I}$.

► Az ortogonális mátrixokhoz hasonlóan bizonyítható, hogy egy $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor unitér, ha az alábbiak bármelyike teljesül:

- $\mathbf{U}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} = \mathbf{I}$,
- $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{\mathsf{H}}$,
- $\mathbf{U}$ oszlopvektorai ortonormált bázist alkotnak a komplex skalárszorzásra nézve,
- $\mathbf{U}$ sorvektorai ortonormált bázist alkotnak a komplex skalárszorzásra nézve,
- $|\mathbf{U}\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$ minden $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ vektorra,
- $\mathbf{U}\mathbf{x} \cdot \mathbf{U}\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

Feladatok

Komplex vektorok skaláris szorzata, hossza, távolsága

Számítsuk ki az alábbi skaláris szorzatok értékét!

7.42. $(1+\mathrm{i}, \mathrm{i}, -1) \cdot (1+\mathrm{i}, -\mathrm{i}, -1)$

7.43. $(1-\mathrm{i}, \mathrm{i}, -2, 1+\mathrm{i}) \cdot (1+\mathrm{i}, 0, 2, 1-\mathrm{i})$

Mekkora az alábbi vektorok hossza?

7.44. $(1-\mathrm{i}, \mathrm{i}, -2, 1+\mathrm{i})$

7.45. $(a+b\mathrm{i}, b+c\mathrm{i}, c+a\mathrm{i})$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

Számítsuk ki az alábbi két vektor távolságát!

7.46. $(1+\mathrm{i}, \mathrm{i}, -1)$, $(1+\mathrm{i}, -\mathrm{i}, -1)$

7.47. $(1-\mathrm{i}, \mathrm{i}, -2, 1+\mathrm{i})$, $(1+\mathrm{i}, 0, 2, 1-\mathrm{i})$

Komplex vektorok szöge

7.48. Legyen $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, és legyen $\hat{\mathbf{u}} = (\Re(u_1), \Im(u_1), \dots, \Re(u_n), \Im(u_n))$, $\hat{\mathbf{v}} = (\Re(v_1), \Im(v_1), \dots, \Re(v_n), \Im(v_n)) \in \mathbb{R}^{2n}$. Legyen $\varphi = (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})_\angle$. Igazoljuk, hogy

$$\cos(\varphi) = \frac{\Re(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \tag{7.29}$$

E képlettel szokás definiálni két komplex vektor szögét!

Pitagorasz-tétel komplex vektorokra

7.49. Tekintsük az $\mathbf{a} = (1, i)$ és a $\mathbf{b} = (-i, 1)$ vektorokat. Mutassuk meg, hogy bár $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2$, mégsem igaz, hogy $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, vagyis a Pitagorasz-tétel nem mondható ki komplex vektorokra a valósokéval azonos módon.

7.50.• Pitagorasz-tétel komplex vektorokra Tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ vektorokra $|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2$ pontosan akkor áll fenn, ha $\Re(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = 0$.

Diszkrét Fourier-transzformált

Fourier-mátrixok Az N-edik komplex egységgyök hatványaiból képzett Vandermonde-mátrix kiemelkedően fontos szerepet kapott a modern műszaki alkalmazásokban. E mátrix alaptulajdonságainak megismeréséhez a Fourier-összegek együtthatói és helyettesítési értékei közti kapcsolaton keresztül közelítünk.

A Fourier-sorok komplex

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{nit}$$

alakja, és ezek

$$\sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{nit} = c_0 + c_1 e^{\mathrm{i}t} + c_1 e^{2\mathrm{i}t} + \cdots + c_{N-1} e^{(N-1)\mathrm{i}t} \tag{7.30}$$

alakú részletösszegei kulcsszerepet játszanak a periodikus, illetve a korlátos tartományon értelmezett függvények leírásában. A (7.30) összeget (diszkrét) *Fourier-összegnek* nevezzük.

7.101. ÁLLÍTÁS (FOURIER-ÖSSZEG HELYETTESÍTÉSI ÉRTÉKEI). *A (7.30) Fourier-összeg együtthatóihoz a Fourier-összegnek a $[0, 2\pi]$ intervallumot N egyenlő részre osztó $0, \frac{2\pi}{N}, \frac{4\pi}{N}, \ldots, \frac{2(N-1)\pi}{N}$ pontokban vett helyettesítési értékeit rendelő leképezés lineáris, melynek mátrixa $[\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}mn}]$ $(0 \le m, n < N)$.*

BIZONYÍTÁS. Először vizsgáljuk meg az $N = 3$ esetet. Az osztópontok: $t_0 = 0$, $t_1 = 2\pi/3$, $t_2 = 4\pi/3$. A Fourier-összeg $c_0 + c_1 e^{\mathrm{i}t} + c_2 e^{2\mathrm{i}t}$, ennek t_k-beli helyettesítési értékét jelölje y_k. Tehát

$$\begin{aligned}
y_0 &= c_0 + c_1 e^{\mathrm{i}0} + c_2 e^{2\mathrm{i}0} = c_0 + c_1 + c_2\\
y_1 &= c_0 + c_1 e^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}} + c_2 e^{\frac{4\pi\mathrm{i}}{3}} = c_0 + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2\\
y_2 &= c_0 + c_1 e^{\frac{4\pi\mathrm{i}}{3}} + c_2 e^{\frac{8\pi\mathrm{i}}{3}} = c_0 + c_1\varepsilon^2 + c_2\varepsilon^4
\end{aligned}$$

ahol $\varepsilon = e^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{3}}$ a legkisebb pozitív argumentumú harmadik komplex egységgyököt jelöli. Világos, hogy a $(c_0, c_1, c_2) \mapsto (y_0, y_1, y_2)$ leképezés lineáris, melynek mátrixszorzat-alakja

$$\begin{bmatrix} y_0\\ y_1\\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2\\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0\\ c_1\\ c_2 \end{bmatrix}$$

Hasonlóan egyszerű az általános eset is, azonban még tekintsük át az $N = 2$ és az $N = 4$ eset is. $N = 2$ esetén $\varepsilon = e^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{2}} = -1$ a primitív egységgyök, így

$$\begin{bmatrix} y_0\\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1\\ 1 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0\\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1\\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0\\ c_1 \end{bmatrix},$$

míg $N=4$ esetén $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{4}} = i$, tehát

$$\begin{bmatrix} y_0\\ y_1\\ y_2\\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3\\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6\\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0\\ c_1\\ c_2\\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & i & -1 & -i\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0\\ c_1\\ c_2\\ c_3 \end{bmatrix}.$$

Általános esetben az n-edik osztópont $\frac{2n\pi}{N}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots, N-1)$, a Fourier-összeg e pontbeli helyettesítési értékét y_n-nel jelölve

$$\begin{aligned}
y_0 &= c_0 + c_1 e^{i0} + c_2 e^{2i0} + \cdots + c_{N-1} e^{(N-1)i0} = c_0 + c_1 + \cdots + c_{N-1}\\
y_1 &= c_0 + c_1 e^{\frac{2\pi i}{N}} + c_2 e^{\frac{4\pi i}{N}} + \cdots + c_{N-1} e^{\frac{2(N-1)\pi i}{N}}\\
y_2 &= c_0 + c_1 e^{\frac{4\pi i}{N}} + c_2 e^{\frac{8\pi i}{N}} + \cdots + c_{N-1} e^{\frac{4(N-1)\pi i}{N}}\\
&\vdots\\
y_{N-1} &= c_0 + c_1 e^{\frac{2\pi i(N-1)}{N}} + c_2 e^{\frac{4\pi i(N-1)}{N}} + \cdots + c_{N-1} e^{\frac{2\pi i(N-1)^2}{N}}
\end{aligned}$$

Az $\varepsilon = e^{2\pi i/N}$ jelöléssel mátrixszorzat-alakban

$$\begin{bmatrix} y_0\\ y_1\\ \vdots\\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \cdots & \varepsilon^{N-1}\\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6 & \cdots & \varepsilon^{2(N-1)}\\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^9 & \cdots & \varepsilon^{3(N-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \varepsilon^{N-1} & \varepsilon^{2(N-1)} & \varepsilon^{3(N-1)} & \cdots & \varepsilon^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0\\ c_1\\ \vdots\\ c_{N-1} \end{bmatrix} \qquad \square$$

E példában szereplő együtthatómátrix egy Vandermonde-mátrix, mégpedig a $\mathbf{V}_N(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{N-1})$ mátrix, melyet $\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}$-nal jelölünk. Fontos lesz még e mátrix konjugáltja, mely az $\omega = \bar{\varepsilon} = e^{-2\pi i/N}$ egységgyökhöz tartozó Vandermonde-mátrix. E két mátrixot *Fourier-mátrixnak* is nevezik. Tehát $[\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}]_{kn} = \varepsilon^{kn}$, $[\mathbf{\Phi}_{N,\omega}]_{kn} = \omega^{kn}$ $(0 \le k, n < N)$, azaz részletesen

$$\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon} = \mathbf{V}_N(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{N-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1\\ 1 & \varepsilon & \ldots & \varepsilon^{N-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \varepsilon^{N-1} & \ldots & \varepsilon^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \tag{7.31}$$

$$\mathbf{\Phi}_{N,\omega} = \mathbf{V}_N(1, \omega, \ldots, \omega^{N-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1\\ 1 & \omega & \ldots & \omega^{N-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \omega^{N-1} & \ldots & \omega^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \tag{7.32}$$

Az előző példában a Fourier-együtthatók ismeretében meghatároztuk a függvény helyettesítési értékeit. A gyakorlati alkalmazásokban főként a fordított sorrend érdekes, vannak y_k mért adataink, és keressük a c_k együtthatókat. Ehhez nyújt alapismereteket a következő tétel.

7.102. TÉTEL (A FOURIER-MÁTRIXOK TULAJDONSÁGAI). *Legyen N pozitív egész szám, $\varepsilon = e^{2\pi i/N}$, $\omega = \bar{\varepsilon} = e^{-2\pi i/N}$. Az $\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}$ és $\mathbf{\Phi}_{N,\omega}$ Fourier-mátrixok a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:*

a) Bármelyik Fourier-mátrix k-adik és $N-k$-adik sora egymás konjugáltja, páros N esetén pedig az $N/2$-edik sorvektor $(1, -1, 1, -1, \dots)$.

b) A két Fourier-mátrix egymás konjugáltja és egyúttal egymás adjungáltja is, azaz $\mathbf{\Phi}_{N,\omega} = \overline{\mathbf{\Phi}}_{N,\varepsilon} = \mathbf{\Phi}^{\mathsf{H}}_{N,\varepsilon}$ és $\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon} = \overline{\mathbf{\Phi}}_{N,\omega} = \mathbf{\Phi}^{\mathsf{H}}_{N,\omega}$

c) $\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}\mathbf{\Phi}_{N,\omega} = N\mathbf{I}_N$, így $\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}$ és $\mathbf{\Phi}_{N,\omega}$ invertálható,

$$\mathbf{\Phi}^{-1}_{N,\varepsilon} = \frac{1}{N}\mathbf{\Phi}_{N,\omega}, \ \mathbf{\Phi}^{-1}_{N,\omega} = \frac{1}{N}\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon},$$

továbbá $\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}$ és $\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{\Phi}_{N,\omega}$ unitér.

BIZONYÍTÁS. *a)* Az $\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}$ mátrix k-adik, illetve $N-k$-adik sorának n-edik eleme ε^{kn}, illetve $\varepsilon^{(N-k)n}$. Ez utóbbit átalakítva kapjuk, hogy

$$\varepsilon^{(N-k)n} = \varepsilon^{Nn}\varepsilon^{-kn} = (\varepsilon^{-1})^{kn} = \bar{\varepsilon}^{kn}.$$

Mivel minden pozitív páros N-re $\varepsilon^{\frac{N}{2}} = -1$, ezért az $N/2$-edik sorban -1 hatványai szerepelnek.

b) Mivel $\omega = \bar{\varepsilon}$, ezért $\omega^s = \bar{\varepsilon}^s$, tehát $\mathbf{\Phi}_{N,\omega} = \overline{\mathbf{\Phi}}_{N,\varepsilon}$. Másrészt $\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}$ szimmetrikus, következésképp $\overline{\mathbf{\Phi}}_{N,\varepsilon} = \overline{\mathbf{\Phi}}^{\mathsf{T}}_{N,\varepsilon} = \mathbf{\Phi}^{\mathsf{H}}_{N,\varepsilon}$.

c) Számítsuk ki a $\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}\mathbf{\Phi}_{N,\omega}$ mátrixot! A szorzat k-adik sorának n-edik oszlopában a

$$\sum_{m=0}^{N-1}\varepsilon^{km}\omega^{mn} = \sum_{m=0}^{N-1}\varepsilon^{m(k-n)} = \sum_{m=0}^{N-1}(\varepsilon^{k-n})^m$$

összeg szerepel. Ha $k = n$, azaz $\varepsilon^{k-n} = 1$, akkor ez az összeg N, minden más esetben 0 (ld. a **??** állítást a komplex számokról szóló függelékben). Mindezek egyik következménye, hogy $\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}$ és $\mathbf{\Phi}_{N,\omega}$ invertálhatók, $\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}$ inverze $\frac{1}{N}\mathbf{\Phi}_{N,\omega}$, $\mathbf{\Phi}_{N,\omega}$ inverze $\frac{1}{N}\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}$. A másik következmény, hogy

$$\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{\Phi}_{N,\omega}\right) = \mathbf{I}_N,$$

ami a *b)*-t is figyelembe véve épp azt jelenti, hogy

$$\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}\right)^{\mathsf{H}} = \mathbf{I}_N,$$

azaz hogy $\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}$ unitér. □

Diszkrét Fourier-transzformáció A diszkrét Fourier-transzformációra úgy gondolhatunk, mint egy – általában komplex – függvény helyettesítési értékeinek vektorához a függvény trigonometrikus összetevői együtthatóinak vektorát rendelő lineáris $\mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ leképezésre.

A 7.101. példában egy Fourier-összeg együtthatóival kifejeztük a függvény megadott helyeken fölvett értékeit. A fordított irány sokkal érdekesebb: ismerjük egy f függvény N különböző megadott helyen fölvett értékét, és meg van adva N lineárisan független függvény. Olyan lineáris kombinációjuk együtthatóit keressük e függvényeknek, mely lineáris kombináció a megadott helyeken megegyezik f-fel. Mi a következőkben definiálandó diszkrét Fourier-transzformáció esetén az

$$f(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{nit}$$

függvényből indulunk ki, a megadott helyek a $[0, 2\pi]$ intervallumot N részre osztó $2k\pi/N$ $(k = 0, 1, \dots, N-1)$ pontok. A $(c_0, c_1, \dots, c_{N-1}) \mapsto (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$ leképezés inverzét fogjuk diszkrét Fourier-transzformáltnak nevezni. Ennek mátrixa $\mathbf{\Phi}_{N,\omega}$, amelyre a továbbiakban az $\mathbf{F}_N$ jelölést is használjuk. E megközelítésből az f függvény teljesen elhagyható, hisz a lényeg az, hogy egy szám-N-eshez hozzárendelünk egy másikat!

7.103. DEFINÍCIÓ (DISZKRÉT FOURIER-TRANSZFORMÁCIÓ (DFT)). *Az* $F_N : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{X} = \mathbf{F}_N\mathbf{x}$ *leképezést* diszkrét Fourier-transzformációnak *nevezzük.*

► A diszkrét Fourier-transzformáció tehát a (7.32) képlettel megadott $\mathbf{F}_N = \mathbf{\Phi}_{N,\omega}$ mátrixhoz tartozó mátrixleképezés.

► A leképezést kifejtve koordinátánként:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \mathrm{e}^{\frac{-2\pi\mathrm{i}}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \omega^{kn} \qquad (\omega = \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}}). \tag{7.33}$$

► Az F_N transzformáció mátrixszorzatos alakja

$$F_N : \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \dots & \omega^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}.$$

► E témában elterjedt jelölések: a transzformálandó vektor dimenzióját nagy N jelöli, a képvektort a transzformálandó vektor nagybetűs változata jelöli, azaz $\mathbf{x}$ képe $\mathbf{X}$, $\mathbf{y}$ képe $\mathbf{Y}$, stb., a vektorok koordinátái 0-tól $N-1$-ig vannak indexelve.

► A diszkrét Fourier-transzformációt gyakran a Fourier-mátrixok valamelyikének egy másik konstansszorosával definiálják. Előfordul az unitér $\frac{1}{\sqrt{N}}\mathbf{F}_N$, az $\frac{1}{N}\mathbf{F}_N$ vagy a $\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}$ mátrix is a transzformáció mátrixaként, sőt van aki minden olyan $\mathbf{\Phi}_{N,\hat{\varepsilon}}$ mátrixot egy DFT mátrixának tekint, ahol $\hat{\varepsilon}$ primitív N-edik egységgyök.

► Az általunk adott definíció a legelterjedtebb, a legtöbb ismert szoftver is ezt használja. Ennek oka e definíciónak a folytonos Fourier-transzformálttal való szorosabb kapcsolata, és a jelfeldolgozásban is ezt használják leginkább. Más alkalmazásokhoz viszont megfelelőbb lehet valamelyik fent említett másik definíció.

► Konkrétan az $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_4$ és $\mathbf{F}_8$ mátrixok:

$$\mathbf{F}_1 = [1], \quad \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & -\mathrm{i} & \frac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & \mathrm{i} & \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} & 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \\ 1 & \frac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & \mathrm{i} & \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & -\mathrm{i} & \frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & -\mathrm{i} & \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & \mathrm{i} & \frac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \\ 1 & \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & \mathrm{i} & \frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & -\mathrm{i} & \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

7.104. TÉTEL (A DFT TULAJDONSÁGAI). *Tekintsük a diszkrét F_N Fourier-transzformációt, és legyen az $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ vektor képe $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots, X_{N-1})$. Ekkor a következők igazak:*

a) *Konstans vektor képe impulzusvektor (melynek a nulladikat kivéve mindegyik koordinátája 0), és fordítva, konkrétan*

$$F_N(c, c, \dots, c) = (Nc, 0, \dots, 0), \quad F_N(c, 0, \dots, 0) = (c, c, \dots, c).$$

ahol $c \in \mathbb{C}$ tetszőleges konstans.

b) *Ha $\mathbf{x}$ valós vektor, akkor $X_{N-k} = \overline{X}_k$.*

c) *Az F_N transzformáció invertálható, inverze (IDFT) többféle felírásban:*

$$\mathbf{x} = F_N^{-1}\mathbf{X} = \frac{1}{N}\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}\mathbf{X}, \quad x_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_n \varepsilon^{kn} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_n \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}kn}.$$

BIZONYÍTÁS. *a)* Az állítás első részének bizonyítása közvetlenül leolvasható az $\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}(c\mathbf{\Phi}_{N,\omega}) = cN\mathbf{I}_N$ szorzat első oszlopából, második része a $c\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}$ mátrix első oszlopából. De a 7.102. tétel bizonyításában is használt **??** állításra hivatkozva közvetlenül is azonnal adódik.

b) A (7.33) képletet használva

$$\begin{aligned} X_{N-k} &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \omega^{(N-k)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \omega^{-kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \overline{\omega}^{kn} = \overline{\sum_{n=0}^{N-1} x_n \omega^{kn}} = \overline{X}_k \end{aligned}$$

c) Az invertálhatóság azonnal adódik abból, hogy a Fourier-mátrixok Vandermonde-mátrixok is egyúttal, melynek determinánsa nem 0. A tételbeli mindegyik összefüggés azonnali következménye az $\mathbf{F}_N^{-1} = \mathbf{\Phi}_{N,\omega}^{-1} = \frac{1}{N}\mathbf{\Phi}_{N,\varepsilon}$ képletnek. □

7.105. PÉLDA (DFT KISZÁMÍTÁSA). *Határozzuk meg az $\mathbf{x} = (1, \mathrm{i}, \mathrm{i}, 2)$ vektor diszkrét Fourier-transzformáltját!*

MEGOLDÁS. $N = 4$, így

$$\mathbf{X} = F_4\mathbf{x} = \mathbf{F}_4\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2\mathrm{i} \\ 2+\mathrm{i} \\ -1 \\ -3\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$ □

Periodikus összetevők szűrése Műszaki alkalmazásokban gyakran előfordul, hogy egy periodikus függvénnyel leírható jelhez magasabb frekvenciájú zaj adódik, amit utólag ki szeretnénk „szűrni”. Ez egy DFT-IDFT párral könnyen elvégezhető.

A szűrés általános modellje három lépésből áll, melyet az alábbi séma szemléltet:

$$\mathbf{x} \xrightarrow{\quad \text{DFT} \quad} \mathbf{X} \xrightarrow{\quad \text{„szűrés”} \quad} \hat{\mathbf{X}} \xrightarrow{\quad \text{IDFT} \quad} \hat{\mathbf{x}}$$

A műszaki gyakorlatban „szűrésen” sokféle transzformációt értenek, mely az $\mathbf{X}$ vektort az $\hat{\mathbf{X}}$-ba képzi. Mi csak a legegyszerűbb esettel foglalkozunk, $\mathbf{X}$ bizonyos koordinátáinak elhagyásával (kiszűrésével).

A következőkben egy mesterkélten leegyszerűsített, fejben számolva is követhető példát mutatunk a DFT e tipikus alkalmazására.

7.106. PÉLDA (MAGAS FREKVENCIÁJÚ ÖSSZETEVŐK SZŰRÉSE). *Adva van egy p szerint periodikus függvény $t_k = kp/6$ $(k = 0, 1, \ldots, 5)$ helyeken fölvett függvényértékeinek $\mathbf{x} = (4, 1, -2, -2, -2, 1)$ vektora. Bontsuk fel e függvényt egy p szerint periodikus trigonometrikus függvény, és p/m periódusú függvények (zaj) összegére ($m > 1$ egész).*

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{x}$ vektor diszkrét Fourier-transzformáltja

$$\mathbf{X} = F_6\mathbf{x} = \mathbf{F}_{6,\omega}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & -1 & \omega^4 & \omega^5 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & 1 & \omega^2 & \omega^4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \omega^4 & \omega^2 & 1 & \omega^4 & \omega^2 \\ 1 & \omega^5 & \omega^4 & -1 & \omega^2 & \omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

ahol kihasználtuk, hogy $\omega^6 = 1$, $\omega + \omega^5 = 1$, $\omega^2 + \omega^4 = -1$. Például

$$X_2 = [\mathbf{F}_{6,\omega}]_{2*}\,\mathbf{x} = 4 + \omega^2 - 2\omega^4 - 2 - 2\omega^2 + \omega^4 = 2 - \omega^2 - \omega^4 = 3.$$

Mivel $\mathbf{x}$ valós, ezért a 7.104. tétel *b)* pontja szerint $X_{N-k} = \overline{X}_k$, amit azonnal ellenőrizhetünk is. Az $\mathbf{x}$ vektor „mögött” lévő p szerint periodikus függvény e modellben

$$x(t) = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} X_n e^{ni\frac{2\pi}{p}t} = \frac{1}{6}\left(9e^{i\frac{2\pi}{p}t} + 3e^{2i\frac{2\pi}{p}t} + 3e^{4i\frac{2\pi}{p}t} + 9e^{5i\frac{2\pi}{p}t}\right)$$

A p értékének valójában semmi szerepe, mert e függvényt csak a $k\frac{p}{n}$ ($k = 0, 1, \ldots, 5$) pontokban értékeljük ki, így a fenti összegben csak a

$$e^{i\frac{2\pi}{p}\frac{pn}{6}} = (e^{i\frac{2\pi}{6}})^n = \varepsilon^n$$

értékek szerepelnek. Ezekre használható a

$$\begin{aligned} \varepsilon^n + \varepsilon^{6-n} &= (e^{i\frac{2\pi}{6}})^n + (e^{-i\frac{2\pi}{6}})^n = (e^{i\frac{2\pi n}{6}}) + (e^{-i\frac{2\pi n}{6}}) \\ &= 2\cos n\frac{\pi}{3} = 2\cos\frac{2\pi}{p}\frac{pn}{6} \end{aligned}$$

összefüggés, így

$$x(t) = \frac{1}{6}\left(18\cos\frac{2\pi}{p}t + 6\cos 2\frac{2\pi}{p}t\right) = 3\cos\frac{2\pi}{p}t + \cos 2\frac{2\pi}{p}t.$$

A függvény tehát $3\cos\frac{2\pi}{p}t$, a „zaj” $\cos 2\frac{2\pi}{p}t$. □

Gyors Fourier-transzformáció A diszkrét Fourier-transzformáció gyors kiszámítására konstruált algoritmusoknak döntő szerepük van a mai kultúránk alapját jelentő digitális technika fejlődésében.

A diszkrét Fourier-transzformált kiszámításához, azaz az n-edrendű Fourier-mátrixszal való szorzás kiszámításához n^2 szorzás elvégzésére van szükség. Bármely olyan algoritmust, mely e transzformáció eredményét $O(n \log n)$, azaz konstansszor $n \log n$ lépésben elvégzi, *gyors Fourier-transzformációnak* nevezzük. Sok változata létezik, mi csak az elsőként publikált, legismertebbet ismertetjük.

A transzformáció gyorsaságának becsléséhez most minden aritmetikai művelet elvégzésének idejét tekintsünk azonosnak. A DFT kiszámítására, azaz a Fourier-mátrixszal való szorzáshoz minden sorban N szorzás, $N-1$ összeadás kell, és N sor van, így a szükséges műveletek száma $N(2N-1)$.

Az egyszerűség kedvéért legyen a továbbiakban N kettőhatvány, és csoportosítsuk az X_k-t megadó összeget az indexek paritása szerint, azaz külön adjuk össze a páros és külön a páratlan indexűeket. Vegyük észre, hogy ez az összeg két fele akkora méretű Fourier-transzformációból megkapható:

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{\frac{-2\pi i}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \omega_N^{kn} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} e^{\frac{-2\pi i}{N}2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} e^{\frac{-2\pi i}{N}(2n+1)k} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} e^{\frac{-2\pi i}{N/2}nk} + e^{\frac{-2\pi i}{N}k} \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} e^{\frac{-2\pi i}{N/2}nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n} \omega_{N/2}^{nk} + \omega_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x_{2n+1} \omega_{N/2}^{nk} \\ &= E_k + \omega_N^k O_k. \end{aligned}$$

Hogy különbséget tegyünk az N és $N/2$ dimenziós vektorok transzformációi közt, az N-edik és $N/2$-edik egységgyököt jelölje

$$\omega_N = e^{\frac{-2\pi i}{N}}, \text{ és } \omega_{N/2} = e^{\frac{-2\pi i}{N/2}}.$$

És ezen a ponton azzal tudjuk csökkenteni a számításokat, hogy mivel az E_k és O_k összegek $N/2$ szerint periodikusak, így $k \geq N/2$ esetén E_k és O_k értékét már nem kell újra számolni, ugyanis

$$E_{k+N/2} = E_k, \quad O_{k+N/2} = O_k,$$

és az ω_N^k együttható is újrahasznosítható:

$$\omega_N^{k+N/2} = e^{\frac{-2\pi i}{N}(k+N/2)} = e^{\frac{-2\pi i}{N}(k)} e^{\frac{-2\pi i}{N}\frac{N}{2}} = -e^{\frac{-2\pi i}{N}(k)} = -\omega_N^k.$$

Ezeket összevetve tehát $k < N/2$ esetén

$$\begin{aligned} X_k &= E_k + \omega_N^k O_k, \\ X_{k+N/2} &= E_k - \omega_N^k O_k. \end{aligned}$$

Így, ha E_k és O_k már ki van számolva, X_k és $X_{k+N/2}$ kiszámításához csak egy szorzásra, egy összeadásra és egy kivonásra van szükség, azaz az X_k $(0 \leq k < N)$ együtthatók $3N/2$ művelettel megkaphatók. Ezután rekurzív módon E_k és O_k kiszámítását is ugyanígy végezzük: mivel fele akkora a vektor, de kettő van belőle, itt is $3N/2$ műveletre lesz szükség. Mivel N kettőhatvány, például $N = 2^s$, így $s = \log_2 N$-szer kell megismételnünk ezt a lépést, vagyis a teljes transzformáció műveletigénye $\frac{3}{2}N\log_2 N$. Konkrétan néhány N esetén:

N	$2^4 = 16$	$2^8 = 256$	$2^{10} = 1024$	$2^{16} = 65536$
DFT	496	130816	2096128	8589869056
FFT	96	3072	15360	1572864
hányados	> 5	> 42	> 136	> 5461

A műveletigény fenti számításában nem vettük figyelembe ω_N^k kiszámításának költségeit. Ha e hatvány kiszámítása C aritmetikai művelettel egyenértékű, akkor is csak $\frac{C+3}{2}N\log_2 N$ műveletre van szükségünk. Ezzel tehát bizonyítottuk a következő tételt:

A tételbeli eljárást Gauss már ismerte és 1805-ben használta a másodiknak fölfedezett Pallas és a harmadiknak fölfedezett Juno nevű kisbolygó pályájának kiszámításához. A felező eljárást Danielson és Lánczos 1942-ben újra fölfedezték, de ők sem vizsgálták az algoritmus sebességét. Az FFT ismertté és népszerűvé Cooley és Tukey 1965-ben megjelent cikke után vált.

7.107. TÉTEL (GYORS FOURIER-TRANSZFORMÁCIÓ). *Létezik olyan algoritmus, mely egy N-dimenziós vektor diszkrét Fourier-transzformáltját legföljebb $O(N\log_2 N)$ aritmetikai művelet elvégzésével kiszámolja.*

A fenti bizonyításban szereplő algoritmus pszeudokódja:

```
function FFT(x)
  N ← dim(x)
  X legyen N-dimenziós vektor
  if N = 1 then
  | X_0 ← x_0
  else
    y ← x páros indexű elemei
    z ← x páratlan indexű elemei
    Y ← FFT(y)
    Z ← FFT(z)
    for k ← 0 to N/2 − 1 do
      E ← Y_k
      O ← e^{(−2πi/N) k} Z_k
      X_k ← E + O
      X_{k+N/2} ← E − O
  return X
```

7.21. ábra: FFT algoritmus. A rekurzív függvény bemenete egy tetszőleges komplex $\mathbf{x}$ vektor, kimenete a diszkrét Fourier-transzformált $\mathbf{X}$ vektor.

Mivel e transzformáció is lineáris leképezésekből áll, a gyors Fourier-transzformáció mátrixszorzat-alakba is fölírható:

$$\mathbf{F}_N = \mathbf{\Delta}_N \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{N/2} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}_{N/2} \end{bmatrix} \mathbf{\Pi}_N,$$

ahol $\mathbf{\Pi}_N$ az a permutáló mátrix, mely előre veszi a páros indexű elemeket, $\mathbf{\Delta}_N$ pedig a „fél” transzformáltakat összeadó, és a páratlan indexűeket egy ω-hatvánnyal beszorzó mátrix. Ezek kisebb indexű példányai:

$$\mathbf{\Pi}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Pi}_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Delta}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\mathrm{i} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mathrm{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{I}_2 & -\mathbf{D}_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Delta}_8 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_4 & \mathbf{D}_4 \\ \mathbf{I}_4 & -\mathbf{D}_4 \end{bmatrix}$$

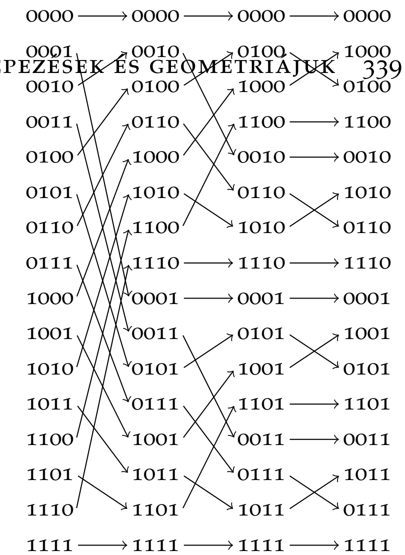
A $\mathbf{\Delta}$ mátrixokban szereplő diagonális mátrixok az egységmátrixok, és az ω hatványait tartalmazó $\mathbf{D}$ mátrixok, ahol $\mathbf{D}_k = \operatorname{diag}(1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{k-1})$. Tehát például

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_8 &= \mathbf{\Delta}_8 \begin{bmatrix} \mathbf{F}_4 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}_4 \end{bmatrix} \mathbf{\Pi}_8 \\ &= \mathbf{\Delta}_8 \begin{bmatrix} \mathbf{\Delta}_4 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{\Delta}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_2 & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F}_2 & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{F}_2 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_4 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{\Pi}_4 \end{bmatrix} \mathbf{\Pi}_8. \end{aligned}$$

Látjuk, hogy a rekurzió következtében a transzformálandó vektort először a $\mathbf{\Pi}$-mátrixokból álló blokkmátrixokkal kell szorozni. E mátrixok szorzata is permutáló mátrix. Hatását e konkrét esetben kiszámoljuk a fent megadott $\mathbf{\Pi}_4$ és $\mathbf{\Pi}_8$ mátrixok behelyettesítésével:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_4 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{\Pi}_4 \end{bmatrix} \mathbf{\Pi}_8 \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_4 \\ x_2 \\ x_6 \\ x_1 \\ x_5 \\ x_3 \\ x_7 \end{bmatrix}.$$

Ez első pillanatban áttekinthetetlen permutációnak tűnik, de valójában egy igen egyszerűen leírható transzformációt kapunk: a transzformálandó $\mathbf{x}$ vektor k-adik koordinátáját ($k = 0, 1, \dots, N-1$) a j-edik helyébe viszi, ha j bináris alakja éppen fordítottja k bináris alakjának. Például ha $N = 16$, és $k = 6$, akkor x_{12} a harmadik koordináta helyére kerül a permutáció során, mivel $12 = 1100_2$, és ennek fordítottja $0011_2 = 3$. Ennek igazolása rendkívül egyszerű, ha észrevesszük, hogy az i-edik $\boldsymbol{\Delta}$-mátrixszal való szorzás épp jobbról az első i koordináta szerinti lexikografikus sorrendbe rendezi az elemeket. Ennek szemléltetésére elég az a 7.22 ábrán bemutatott $N = 16$ eset vizsgálata.



7.22. ábra: Az $\mathbf{X}$ vektor koordinátáinak indexeit binárisan fölírva, jól követhető azok mozgása a permutációk során.

Vektorok konvolúciója Vektorok konvolúciója igen sok helyen felmerül: a polinomok szorzásától kezdve az olyan transzformációkig, ahol egy koordinátát szomszédainak egy rögzített lineáris kombinációjával kell helyettesíteni. A gyors Fourier-transzformációval hatékonyan számolható.

Megoldások

7.1. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B} = 0100, \ \mathbf{C} = 0010.$$

Ekkor $\operatorname{trace}(\mathbf{ABC}) = \operatorname{trace}\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] = 1$, míg $\operatorname{trace}(\mathbf{BAC}) = \operatorname{trace}\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right] = 0$.

7.2. A $(2,0,1)$ vektor egyenesét az x-tengelybe forgató mátrix:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Az x-tengely körüli forgatás mátrixa:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\sqrt{5} \\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{5} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Így a megadott egyenes körüli forgatás mátrixa:

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{RC} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{RC} = \begin{bmatrix} \frac{14}{15} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{15} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{15} & \frac{2}{3} & \frac{11}{15} \end{bmatrix}$$

7.5. Az új egyenletrendszer sorterét az eredeti egyenletrendszer megoldásvektorai feszítik ki, ezért ennek nullterre megegyezik az eredeti sorterével, melyet a sorvektorok feszítenek ki. (Természetesen elég a sorvektorok közül a függetleneket kiválasztani. Esetünkben tehát a megadott egyenletrendszer nullterét kifeszítik az $(1,2,1,2,1)$ és az $(1,2,3,3,1)$ vektorok.)

7.7. Igen, $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, mátrixa $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$.

7.8. Nem, az $A : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} + \mathbf{x}$ leképezés a $\mathbf{0}$ vektort nem a $\mathbf{0}$-ba képzi, így nem lehet mátrixleképezés (kivéve ha $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, de ekkor a leképezés az identikus transzformáció)!

7.10. Igen, a mátrix

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{a}(\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{x}) = (\mathbf{a}\mathbf{a}^\mathsf{T})\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & a_2^2 & a_2 a_3 \\ a_1 a_3 & a_2 a_3 & a_3^2 \end{bmatrix}$$

7.11. A bizonyítások a mátrixműveletek tulajdonságaiból következnek. Ott, ahol valamelyik mátrixazonosságot használjuk, az ekvivalenciát kimondó nyíl fölé M-betűt írunk, ahol pedig a függvények közti műveleti tulajdonságokat használjuk, ott egy F-betűt:

a) $(A+B)(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x}) \overset{F}{\iff} A(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x}) \iff \mathbf{Ax} + \mathbf{Bx} = \mathbf{Cx} \overset{M}{\iff} (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{Cx}$.

b) $(cA)(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x}) \overset{F}{\iff} cA(\mathbf{x}) = C(\mathbf{x}) \iff c\mathbf{Ax} = \mathbf{Cx} \overset{M}{\iff} (c\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{Cx}$

c) $(X \circ Y)(\mathbf{x}) = Z(\mathbf{x}) \overset{F}{\iff} X(Y(\mathbf{x})) = Z(\mathbf{x}) \iff \mathbf{X}(\mathbf{Yx}) = \mathbf{Zx} \overset{M}{\iff} (\mathbf{XY})\mathbf{x} = \mathbf{Zx}$.

7.12. A 7.2. tételből, illetve a 7.11. feladatból tudjuk, hogy $(A \circ B)(\mathbf{x}) = \mathbf{ABx}$ és $(B \circ A)(\mathbf{x}) = \mathbf{BAx}$. Így ha $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$, azaz $\mathbf{A}$ inverze $\mathbf{B}$, akkor $(A \circ B)(\mathbf{x}) = \mathbf{ABx} = \mathbf{Ix} = \mathbf{x}$, és hasonlóan $(B \circ A)(\mathbf{x}) = \mathbf{BAx} = \mathbf{Ix} = \mathbf{x}$, azaz $A \circ B$ és $B \circ A$ az identikus leképezés. Hasonlóképp, ha $A \circ B$ és $B \circ A$ az identikus leképezés, akkor $(\mathbf{AB})\mathbf{x} = (A \circ B)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ és $(\mathbf{BA})\mathbf{x} = (B \circ A)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, így $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ (ld. **??** feladat), vagyis $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ egymás inverzei.

7.17. Tegyük fel, hogy $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$. Legyen $\mathbf{A} = [a_{ij}]$,

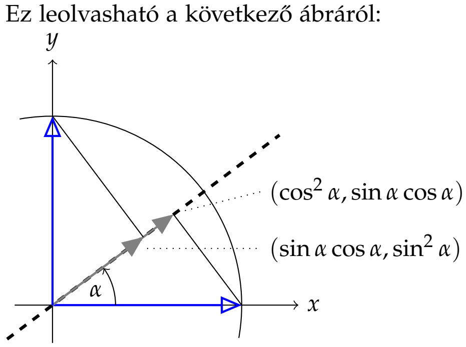
$\mathbf{C} = [c_{ij}]$, $\mathbf{C}^{-1} = [d_{ij}]$. Ekkor

$$\begin{aligned}\operatorname{trace} \mathbf{B} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} d_{ij} a_{jk} c_{ki} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \left(\sum_{i=1}^{n} c_{ki} d_{ij} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \delta_{jk} \\ &= \operatorname{trace} \mathbf{A}\end{aligned}$$

7.18. *a)* A bizonyítandó képlet:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}.$$

Ez leolvasható a következő ábráról:



Az itt látható két derékszögű háromszög befogóinak hossza $\cos \alpha$, illetve $\sin \alpha$, és így például a $\cos \alpha$ hosszú szakasz két tengelyvetülete $\cos^2 \alpha$ és $\cos \alpha \sin \alpha$ hosszú, tehát $\mathbf{i}$ képe $(\cos^2 \alpha, \cos \alpha \sin \alpha)$. Hasonlóan $\mathbf{j}$ képe $(\sin \alpha \cos \alpha, \sin^2 \alpha)$. E két oszlopvektorból álló mátrix pedig valóban megegyezik a fent megadottal.

b) Az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ vetülete az egyenesre

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{i} = \frac{\mathbf{i} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} \mathbf{b} = \frac{1}{b_1^2 + b_2^2} \begin{bmatrix} b_1^2 \\ b_1 b_2 \end{bmatrix} \quad \text{és}$$

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{j} = \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} \mathbf{b} = \frac{1}{b_1^2 + b_2^2} \begin{bmatrix} b_1 b_2 \\ b_2^2 \end{bmatrix}.$$

E két vektor egymás mellé írásával kapott mátrix lesz a leképezés mátrixa:

$$\frac{1}{b_1^2 + b_2^2} \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 \\ b_1 b_2 & b_2^2 \end{bmatrix}.$$

Ez megegyezik a (7.9) képlettel, azaz

$$\frac{1}{b_1^2 + b_2^2} \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 \\ b_1 b_2 & b_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix},$$

ugyanis ha a $\mathbf{b}$ vektor x-tengellyel bezárt szöge α, akkor $\cos \alpha = b_1 / \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, és $\sin \alpha = b_2 / \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$.

7.19. Ha P merőleges vetítés, akkor bármely $\mathbf{v}$ vektorra $\mathbf{v} - P\mathbf{v} \perp \mathbf{v}$, tehát a Pitagorasz-tétel szerint $|\mathbf{v}|^2 = |P\mathbf{v}|^2 + |\mathbf{v} - P\mathbf{v}|^2 \geq |P\mathbf{v}|^2$.

Fordítva, tegyük fel, hogy bár minden $\mathbf{v}$-re $|P\mathbf{v}| \leq |\mathbf{v}|$, de indirekt módon van olyan $\mathbf{v} \in \operatorname{Im} P$, hogy $\mathbf{v}$ nem merőleges $\operatorname{Ker} P$-re, azaz P nem merőleges vetítés. Legyen $\mathbf{v}$-nek $\operatorname{Ker} P$-re való merőleges vetülete $\mathbf{w}$. Ekkor $P(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = P\mathbf{v} = \mathbf{v}$, és $|\mathbf{v} - \mathbf{w}| < |\mathbf{v}|$, így $|\mathbf{v} - \mathbf{w}| < |P(\mathbf{v} - \mathbf{w})|$, ami ellentmond feltevésünknek.

7.20.

a) A (7.12) képlet szerint $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]^+ = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$

b) A (7.12) képlet szerint $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

c) A (7.13) képletbe helyettesítve

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^+ = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, így a (7.16) képlet szerint

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, így a (7.16) képlet szerint

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, így az *b)* és*c)* eredményeit és a transzponált pszeudoinverzére vonatkozó (7.17) képletet használva

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^+ = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

7.21.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} 1/10 & 2/10 \\ 1/10 & 2/10 \end{bmatrix}$

b) Az előző transzponáltja.

c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} 1/10 & 2/10 & 0 \\ 1/10 & 2/10 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix}1/4\\1/4\\1/4\\1/4\end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}^+ = 1/30\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$

7.22.

a) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix}2/3 & -1/3\\1/3 & 1/3\\-1/3 & 2/3\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix}5/9 & 2/9 & -4/9\\-4/9 & 2/9 & 5/9\end{bmatrix}$

c) Az előző eredmény transzponáltja.

d) E mátrix a *b)*- és *a)*-beli mátrixok szorzata, melyek teljes rangúak, így pszeudoinverze az *a)*- és *b)*-beliek pszeudoinverzének szorzata:

$$\frac{1}{27}\begin{bmatrix}14 & 2 & -13\\1 & 4 & 1\\-13 & 2 & 14\end{bmatrix}.$$

7.23. Kiszámítva a megfelelő pszeudoinverzeket:

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\right)^+ = \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}^+\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix}0 & 0\\\frac12 & \frac12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\\frac12 & 0\end{bmatrix},$$

és ezek nem egyenlők.

7.24. Mivel az $\mathbf{A}$ mátrix egy olyan $\mathbf{XY}$ felbontásával van megadva, melyben $\mathbf{X}$ teljes oszlop-, $\mathbf{Y}$ teljes sorrangú, ezért használható a **??** feladat eredménye. Így

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{Y}^\mathsf{T}(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^\mathsf{T} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\\2 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

7.25. Az előző feladathoz hasonlóan a **??** feladat szerint

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{Y}^\mathsf{T}(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^\mathsf{T} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix}-4 & 5 & 1\\-4 & 5 & 1\\3 & 0 & 3\\7 & -5 & 2\end{bmatrix}$$

7.26. A **??** tétel feladat szerint

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{Y}^\mathsf{T}(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{X}^\mathsf{T}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^\mathsf{T} = \frac{1}{132}\begin{bmatrix}-32 & 34 & 2 & 4\\1 & 1 & 2 & 4\\34 & -32 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

7.28. *1. megoldás:* Ha $\mathbf{A}$ merőleges vetítés mátrixa, akkor $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}$ okán $\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \mathcal{O}(\mathbf{A})$, és a sortér minden $\mathbf{x}$ vektorára $\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$, így $\mathbf{A}^+\mathbf{x} = \mathbf{x}$ is igaz lesz. Másrészt $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}$ miatt $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$, tehát minden $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ esetén $\mathbf{Az} = \mathbf{0}$, és definíció szerint $\mathbf{A}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$ is fönnáll, tehát $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^+$ hatása az $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ és annak merőleges kiegészítő alterén is megegyezik, így a két mátrix azonos.

2. megoldás: A Penrose-tétel alapján azt kell ellenőriznünk, hogy $\mathbf{A}$ a négy feltétel mindegyikét teljesíti, mint pszeudoinverz. Ez igaz, hisz $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A} = \mathbf{A}^2$ miatt $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}$, és $(\mathbf{A}^2)^\mathsf{T} = \mathbf{A}^2$.

Az állítás megfordítása nem igaz. Például az $\mathbf{A} = -\mathbf{I}$ mátrixra $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}$, de a $-\mathbf{I}$ mátrixra $(-\mathbf{I})^2 \neq -\mathbf{I}$, tehát $-\mathbf{I}$ nem vetítés mátrixa.

7.29. Az első állítás azonnal következik a (7.13) egyenlőségből, ugyanis ha $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú, akkor

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^+\mathbf{A} &= \left((\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\right)\mathbf{A}\\ &= (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \mathbf{I}\end{aligned}$$

A másik állítás hasonlóan adódik a (7.14) képletből.

7.30. Ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 1$, akkor létezik olyan $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{ab}^\mathsf{T}$. Ekkor a pszeudoinverz kiszámításáról szóló **??** feladat (**??**) képlete szerint

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^+ &= \mathbf{b}(\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b})^{-1}(\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a})^{-1}\mathbf{a}^\mathsf{T}\\ &= \frac{1}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b}}\mathbf{b}\mathbf{a}^\mathsf{T}\\ &= \frac{1}{\operatorname{trace}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})}\mathbf{A}^\mathsf{T}.\end{aligned}$$

Az utóbbi egyenlőség azon múlik, hogy mind $\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b}$, mind $\operatorname{trace}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})$ az összes $a_i^2 b_j^2$ alakú elem összege, ahol $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$. A vektorokra vonatkozó állítás ennek speciális esete.

7.31. Az állítás igazolásához elég csak a Penrose-tétel négy feltételét ellenőrizni.

7.32. A 7.31. feladat alapján az alábbi blokkosítással és 1-rangú mátrixok pszeudoinverzére vonatkozó állításból azonnal adódik a válasz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c|cc}1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\\hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\\hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right]^+ = \left[\begin{array}{c|cc|c}1/3 & 0 & 0 & 0\\1/3 & 0 & 0 & 0\\1/3 & 0 & 0 & 0\\\hline 0 & 1/2 & 1/2 & 0\\\hline 0 & 0 & 0 & 1/2\\0 & 0 & 0 & 1/2\end{array}\right]$$

7.33. $\mathbf{v}_2 = (9,3,-1,5) - \frac{(9,3,-1,5)(1,1,-1,-1)}{|(1,1,-1,-1)|^2} = (7,1,1,7)$, így az ortonormált bázis vektorai: $\frac12(1,1,-1,-1)$, $\frac{1}{10}(7,1,1,7)$

7.34. $\mathbf{v}_2 = (8,6,2,0) - \frac{(8,6,2,0)(1,-1,1,-1)}{|(1,-1,1,-1)|^2}(1,-1,1,-1) = (7,7,1,1)$, így az ortonormált bázis vektorai: $\frac{1}{2}(1,-1,1,-1)$, $\frac{1}{10}(7,7,1,1)$

7.35. $(2,-1,-20) - \frac{(1,4,8)(2,-1,-20)}{(1,4,8)(1,4,8)}(1,4,8) = (4,7,-4)$.
$\mathbf{Q} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$, és $\mathbf{R} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -18 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$.

7.36. A 7.34. feladat eredményét alkalmazva

$$\mathbf{A} = \mathbf{QR} = \begin{bmatrix} 1/2 & 7/10 \\ -1/2 & 7/10 \\ 1/2 & 1/10 \\ -1/2 & 1/10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

7.37. Először a harmadik sor első elemét elimináljuk. Ekkor $a = 8$, $b = 15$, így $r = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$. Eszerint az első és harmadik sorok és oszlop kereszteződéseiben lévő $\left[\begin{smallmatrix} 8 & -4 \\ 15 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ részmátrix első oszlopvektorát, azaz a $(8,15)$ vektort beforgatjuk a $(17,0)$ vektorba. A forgatás α szögére $\cos\alpha = 8/17$, $\sin\alpha = -15/17$. Ebből:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 8/17 & 0 & 15/17 \\ 0 & 1 & 0 \\ -15/17 & 0 & 8/17 \end{bmatrix} \quad \mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 17 & 12 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{Q}_\mathbf{A}$ mátrix harmadik sor második elemének eliminálásához $a = 4$, $b = 3$, $r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, $\cos\alpha = 4/5$, $-\sin\alpha = 3/5$:

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \\ 0 & -3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R} = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 17 & 12 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Végül

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1)^{-1} = \mathbf{Q}_1^\mathsf{T}\mathbf{Q}_2^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 8/17 & -9/17 & -12/17 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \\ 15/17 & 24/85 & 32/85 \end{bmatrix}.$$

7.38. Az első oszlop főátló alatti elemeinek eliminálását az $(1,1,1,1) \mapsto (2,0,0,0)$ hozzárendelést eredményező, az

$$\mathbf{a} = (1,1,1,1) - (2,0,0,0) = (-1,1,1,1)$$

vektorra merőleges hipersíkra való tükrözéssel valósítjuk meg. E tükrözés mátrixa:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 &= \mathbf{I}_4 - \frac{2}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^\mathsf{T} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{Q}_1\mathbf{A}$ második oszlopában a főátló alatti elemek eliminálása a $(0,0,-5)$ vektort az $(5,0,0)$-ba képző tükrözéssel valósítható meg. Ez az $\mathbf{a} = (0,0,-5) - (5,0,0)$ normálvektorú síkra való tükrözés, melynek mátrixa:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2 &= \mathbf{I}_3 - \frac{2}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^\mathsf{T} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Innen

$$\mathbf{Q}_2 = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \hat{\mathbf{R}} = \mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{Q}} = (\mathbf{Q}_2\mathbf{Q}_1)^{-1} = \mathbf{Q}_1^\mathsf{T}\mathbf{Q}_2^\mathsf{T} = \mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

E mátrixokra $\mathbf{A} = \hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{R}}$, amit szokás QR-felbontásnak tekinteni, de az általunk adott definíciónak nem felel meg, mert $\hat{\mathbf{R}}$ főátlójában nem csak pozitív elemek szerepelnek. Az $\hat{\mathbf{R}}$ harmadik és negyedik sorának, valamint a $\hat{\mathbf{Q}}$ harmadik és negyedik oszlopának -1-gyel szorzása nem változtat a szorzatukon, így a QR-felbontás mátrixai:

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7.39. r_{ii} az $\mathbf{a}_i$ távolsága az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}$ vektorok által kifeszített altértől!

7.40. $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0.70711 & -0.40825 & 0.28868 & -0.50000 \\ 0.70711 & 0.40825 & -0.28868 & 0.50000 \\ 0.00000 & 0.81650 & 0.28868 & -0.50000 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.86603 & 0.50000 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1.41421 & 2.12132 & 0.70711 & 0.00000 \\ 0.00000 & 1.22474 & 2.04124 & 0.81650 \\ 0.00000 & 0.00000 & 1.15470 & 2.02073 \\ 0.00000 & 0.00000 & 0.00000 & 0.50000 \end{bmatrix}$

7.48. Mivel $|\mathbf{u}|^2 = |\hat{\mathbf{u}}|^2$, $|\mathbf{v}|^2 = |\hat{\mathbf{v}}|^2$, $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = |\hat{\mathbf{u}}+\hat{\mathbf{v}}|^2$, továbbá $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \overline{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}$, $\mathbf{z}+\overline{\mathbf{z}} = 2\Re\mathbf{z}$ és $|\hat{\mathbf{u}}+\hat{\mathbf{v}}|^2 = |\hat{\mathbf{u}}|^2 + |\hat{\mathbf{v}}|^2 + 2\hat{\mathbf{u}}\cdot\hat{\mathbf{v}}$, ezért

$$\cos\varphi = \frac{\hat{\mathbf{u}}\cdot\hat{\mathbf{v}}}{|\hat{\mathbf{u}}||\hat{\mathbf{v}}|} = \frac{\Re(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}.$$

7.49. Ezek hosszának négyzet 2, mint azt a 7.26 képlettel igazoltuk, a két vektor összege hosszának négyzete pedig

$$(1-\mathrm{i},1+\mathrm{i})\cdot(1-\mathrm{i},1+\mathrm{i}) = \begin{bmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \end{bmatrix}^{\mathsf{H}} \begin{bmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \end{bmatrix} = 4$$

Eszerint $|(1,i)|^2 + |(-i,1)|^2 = |(1-i,1+i)|^2$, viszont a két vektor skaláris szorzata nem 0:

$$(1,\mathrm{i})\cdot(-\mathrm{i},1) = \begin{bmatrix} 1 & -\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix} = -2\mathrm{i}.$$

7.50.

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} \\ &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \overline{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} \\ &\stackrel{?}{=} \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} \\ &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2, \end{aligned}$$

A ?-lel megjelölt egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\Re(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = 0$. Ez a (7.29) képlet szerint azt jelenti, hogy az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ által bezárt szög $\pi/2$. Ez mindig fennáll, ha $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$. Tehát ha $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$, akkor $|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2$, de ennek megfordítása nem igaz!

Alkalmazás: differenciálhatóság[*]

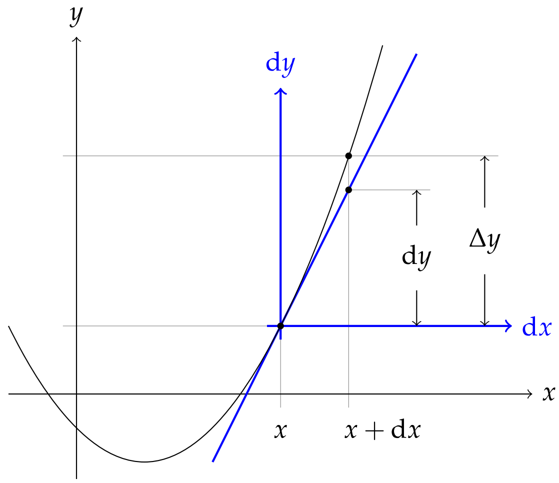
A lineáris leképezés fogalma az alkalmazott matematika sok területén bukkan föl, aminek az az egyik oka, hogy tetszőleges vektor-vektor függvény differenciálhatósága azt jelenti, hogy létezik a függvény megváltozását „jól közelítő” lineáris leképezés.

Vektor-vektor függvények differenciálhatósága Az $\mathbb{R}^n$-ből $\mathbb{R}^m$-be képző lineáris leképezések egy igen fontos alkalmazása a vektor-vektor függvények differenciálhatóságának fogalma.

A differenciálhatóság szokásos definíciója a következő: azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *differenciálható* az x helyen, ha létezik és véges a

$$D = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

határérték. A D számnak fontos jelentése van: az f függvény x körüli megváltozása jól közelíthető a $\mathrm{d}x \mapsto D\,\mathrm{d}x$ függvény 0 körüli megváltozásával. Szemléltetve ez azt jelenti, hogy ha az f grafikonján az $(x, f(x))$ pontra helyezünk egy $\mathrm{d}x$ és $\mathrm{d}y$ változójú koordináta-rendszert, akkor a $\mathrm{d}x \mapsto \mathrm{d}y = D\,\mathrm{d}x$ grafikonja az f függvény grafikonjának érintője (ld. a 7.23 ábrát). Eszerint, kicsit leegyszerűsítve a megfogalmazást, a differenciálhatóság azt jelenti, hogy a függvény „jól közelíthető” egy $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezéssel, hisz a $\mathrm{d}x \mapsto D\,\mathrm{d}x$ leképezés ilyen.



7.23. ábra: A dx és dy koordinátatengelyeket és a d$y = D\,\mathrm{d}x$ függvény grafikonját színezéssel kiemeltük. Az ábra egyúttal a $\Delta y \approx \mathrm{d}y$ kapcsolatot is szemlélteti.

A „jól közelítés” szemléletesen azt jelenti, hogy az f grafikonjára „zoomolva”, azaz azt folyamatosan nagyítva, a grafikon kiegyenesedni látszik. Ez az az egyenes, melyet a grafikon érintőjének nevezünk, és amelynek d$y = D\,\mathrm{d}x$ az egyenlete az új koordináta-rendszerben.

Ez a definíció ekvivalens módon átfogalmazható: azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *differenciálható* az x helyen, ha van olyan D szám, hogy

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Dh}{h} = 0.$$

Ez utóbbi alak azzal az előnnyel is jár, hogy könnyen általánosítható. Az általánosítás legfőbb nehézsége az, hogy a vektorral való osztás nem definiálható megfelelően, ezért e formulán még egy apró, de még mindig ekvivalens változtatást teszünk: nem h-val, hanem annak abszolút értékével osztunk:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Dh}{|h|} = 0.$$

Mindezek a következő definícióhoz vezetnek:

7.108. DEFINÍCIÓ (DIFFERENCIÁLHATÓSÁG). *Azt mondjuk, hogy az* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *függvény differenciálható az* $\mathbf{x}$ *helyen, ha létezik olyan* $D_{\mathbf{f},\mathbf{x}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *lineáris leképezés, melyre*

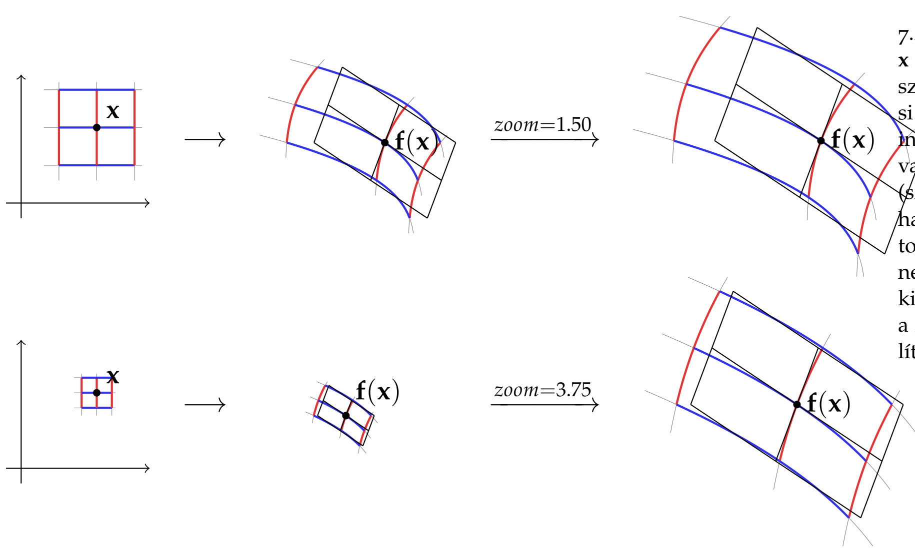
$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|} = \mathbf{0}.$$

A $D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}$ *leképezést az* $\mathbf{f}$ *függvény* $\mathbf{x}$ *ponthoz tartozó* deriváltleképezésének *nevezzük.*

- A $D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}$ jelölés arra utal, hogy a deriváltleképezés az $\mathbf{f}$ függvénytől és az $\mathbf{x}$ helytől is függ, maga viszont mint leképezés egy $\mathbf{h}$ vektorhoz a $D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}\mathbf{h}$ vektort rendeli.

- Elterjedtebb a $D_{\mathbf{x}}(\mathbf{f})$ jelölés, itt didaktikai okból választottunk olyat, mely jobban világossá teszi, hogy ez egy lineáris leképezés, mely majd hat valamely $\mathbf{h}$ vektoron, és annak képe $D_{\mathbf{x}}(\mathbf{f})\mathbf{h}$ vagy $D_{\mathbf{x}}(\mathbf{f})(\mathbf{h})$ – az általunk használt jelölésben $D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}\mathbf{h}$.

- Egy $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvényen könnyen szemléltethető a derivált jelentése. Tekintsük az értelmezési tartomány egy négyzetrácsát, annak középpontja legyen $\mathbf{x}$. Tekintsük e rács képét az $\mathbf{f}$ függvény által, és a $D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}$ deriváltleképezés hatását e rácson, ha az origót $\mathbf{x}$-be tesszük. A rács méretét folyamatosan csökkentve, a képeket pedig arányosan fölnagyítva azt látjuk, hogy a két kép egyre jobban „összesimul” (ld. 7.24 ábra). Ez emlékeztet arra – bár nem tökéletesen analóg vele –, ahogy az egyváltozós függvény grafikonjának egy pontjára „zoomolva” a grafikon az érintőhöz közelít, rásimul.



7.24. ábra: Egy $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvény egy $\mathbf{x}$ pontban való differenciálhatóságának szemléltetésére tekintsük az értelmezési tartomány egyre sűrűbb négyzetrácsainak az $\mathbf{x}$ pontot körülvevő négyzeteit, valamint ezek $\mathbf{f}$ függvény általi képét (színes rács), és a $\mathbf{D}_{\mathbf{f},\mathbf{x}}$ deriváltleképezés hatását e rácson, ha az értelmezési tartományának origóját $\mathbf{x}$-be, értékkészletének origóját $\mathbf{f}(\mathbf{x})$-be tesszük. Az egyre kisebb képeket fölnagyítva látható, hogy a függvény általi kép egyre jobban közelít a deriváltleképezés általi képhez.

Jacobi-mátrix A deriváltleképezés mátrixa könnyen megkapható a koordinátafüggvények parciális deriváltjai segítségével.

7.109. TÉTEL (JACOBI-MÁTRIX). *Ha az* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m; (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ *függvény differenciálható az* $\mathbf{x}$ *helyen, akkor a lineáris* $D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}$

deriváltleképezés mátrixa a következő, ún. Jacobi-mátrix*:*

$$\mathbf{D}_{\mathbf{f},\mathbf{x}} = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{f}$ differenciálható, akkor a definícióbeli határérték akkor is fönnáll, ha $\mathbf{h}$ speciális módon tart a nullvektorhoz, például ha $\mathbf{h} = t\mathbf{e}_j$, és $t \to 0$. Ekkor

$$\lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) - D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}(t\mathbf{e}_j)}{|t|} = \mathbf{0}.$$

Az $\mathbf{f}$ függvény i-edik koordinátafügvénye f_i, a $D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}(t\mathbf{e}_j)$ vektor i-edik koordinátája $\mathbf{e}_i^\mathsf{T} D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}(t\mathbf{e}_j)$. Ennek alapján

$$\lim_{t\to 0} \frac{f_i(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{x}) - \mathbf{e}_i^\mathsf{T} D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}(t\mathbf{e}_j)}{|t|} = 0.$$

Ez a határérték viszont már egy egyváltozós függvény deriváltja, ami nem más, mint az f_i függvény j-edik parciális deriváltja, ugyanis átrendezve az egyenlőséget és t előjelével is osztva kapjuk, hogy

$$\lim_{t\to 0} \frac{f_i(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_j) - f_i(\mathbf{x})}{t} = \mathbf{e}_i^\mathsf{T} D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}\mathbf{e}_j, \text{ azaz } \mathbf{e}_i^\mathsf{T} D_{\mathbf{f},\mathbf{x}}\mathbf{e}_j = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}).$$

Ez bizonyítja állításunkat. □

- A gyakorlatban az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvények, vagyis az n-változós skalárértékű függvények esetén az egyetlen sorból álló Jacobi-mátrix helyett annak vektoralakját használják, melyet *gradiensvektornak* neveznek, és ∇f-fel jelölnek.
- Hasonlóképp, mivel az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ függvények Jacobi-mátrixa egyetlen oszlopból áll, gyakran használják annak vektoralakját. Ha például egy $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3; t \mapsto \mathbf{r}(t)$ függvény a térben mozgó tárgy mozgását az idő függvényében írja le, e vektor épp a mozgás sebességvektora.

7.110. PÉLDA (JACOBI-MÁTRIX KISZÁMÍTÁSA). *Határozzuk meg az alábbi függvények egy általános ponthoz és a megadott ponthoz tartozó Jacobi-mátrixát!*

1. $f(x, y) = x^2y - xy^3 + 1$, $(x, y) = (0, 1)$.
2. $\mathbf{f}(x, y) = (-x^3/2 + y^3/8, x + y)$, $(x, y) = (1, 1)$.
3. $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2, t)$, $t = 2$.
4. $\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 3x_2, x_1 - x_2 - x_3)$, $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 0)$.

MEGOLDÁS. *a)* $f(x,y) = x^2y - xy^3$, parciális deriváltjai $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = 2xy - y^3$, $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = x^2 - 3xy^2$. A deriváltleképezés mátrixa, azaz a Jacobi-mátrix itt

$$\begin{bmatrix} 2xy - y^3 & x^2 - 3xy^2 \end{bmatrix}$$

E mátrix vektor alakja, azaz a gradiensvektor

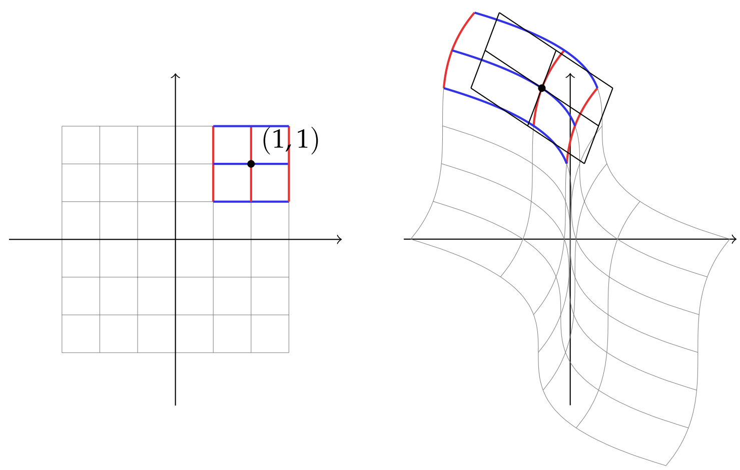
$$\nabla f(x,y) = (2xy - y^3, x^2 - 3xy^2).$$

Ennek értéke a $(0,1)$ helyen $\nabla f(0,1) = (-1,0)$, illetve a Jacobi-mátrix e helyen $[-1\ 0]$.

b) Az $\mathbf{f}(x,y) = (-x^3/2 + y^3/8, x+y)$ függvény Jacobi-mátrixa és annak értéke a megadott $(x,y) = (1,1)$ pontban

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{2}x^2 & \frac{3}{8}y^2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ illetve } \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{8} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Például az első sor első eleme $\frac{\partial}{\partial x}(-x^3/2 + y^3/8) = -\frac{3}{2}x^2$. Az $\mathbf{f}$ függvény deriváltleképezésének, vagyis Jacobi-mátrixának hatását szemlélteti a 7.25 és a 7.24 ábra.



7.25. ábra: A bal ábra az $\mathbf{f}(x,y) = (-x^3/2 + y^3/8, x+y)$ függvény értelmezési tartományán megadott rácsot, és annak egy kis 2×2-es részét mutatja, melynek középpontja az $(1,1)$ pont. Az alsó ábra egyrészt halványan jelöli e rács és színesen a kiemelt rács képét, valamint az $(1,1)$ ponthoz tartozó deriváltleképezés hatását e kiemelt rácson.

c) Az $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2, t)$ függvény Jacobi-mátrixa

$$\begin{bmatrix} 3t^2 \\ 2t \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ ami a } t = 2 \text{ helyen } \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A térben mozgó pont (test) mozgásának leírására is $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ függvényt használunk. Ha e függvény egy ilyen mozgást ír le, akkor sebességvektora egy tetszőleges pontban

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (3t^2, 2t, 1),$$

a $t = 2$ paraméterhez tartozó pontban $\dot{\mathbf{r}}(2) = (12, 4, 1)$.

d) Az utolsó példa fontos állítást szemléltet, nevezetesen azt, hogy egy lineáris leképezés deriváltja minden $\mathbf{x}$ helyen megegyezik magával a leképezéssel, azaz a deriváltja önmaga. Világos, hogy a megadott leképezés egy lineáris leképezés, melynek mátrixszorzatos alakja:

$$\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Ennek Jacobi-mátrixa valóban bármely (x_1, x_2, x_3) helyen

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

ugyanis az i-edik koordinátafüggvény j-edik parciális deriváltja épp az együtthatómátrix i-edik sor-, j-edik oszlopbeli eleme, azaz egy konstans. Így minden helyen e mátrix lesz a Jacobi-mátrix, speciálisan az $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 0)$ helyen is. □

7.111. PÉLDA (FÜGGVÉNYÉRTÉK BECSLÉSE JACOBI-MÁTRIXSZAL). *Ismerjük egy differenciálható függvény értelmezési tartományának egy pontjához tartozó Jacobi-mátrixát és a függvényértéket ugyan ebben a pontban. Becsüljük meg a függvény értékét egy e ponthoz közeli helyen az alábbi adatok ismeretében!*

1. $f(0,1) = 1$, $\mathbf{D}_{f,(0,1)} = [-1 \;\; 0]$, $(x, y) = (-0.05, 1.1)$,
2. $\mathbf{f}(1,1) = (-\frac{3}{8}, 2)$, $\mathbf{D}_{\mathbf{f},(1,1)} = \left[\begin{smallmatrix} -3/2 & 3/8 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, $(x, y) = (0.8, 1.1)$.

Mennyire lennének jók e becslések, ha a függvények az előző feladatbeli a) és b) függvényei lennének?

MEGOLDÁS. A függvény megváltozásának becsléséhez az $\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x})$ értéket kell megbecsülni. A differenciálhatóság definíciója szerint erre a $\mathbf{D}_{\mathbf{f},\mathbf{x}}\mathbf{h}$ mennyiség alkalmas, ha a függvény differenciálható az $\mathbf{x}$ pontban. Eszerint tehát

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{D}_{\mathbf{f},\mathbf{x}}\mathbf{h}.$$

E képletet felhasználva az alábbi megoldásokra jutunk:

a) E feladatban $\mathbf{h} = (-0.05, 0.1)$, így a függvény megváltozása a

$$\mathbf{D}_{f,(0,1)}\mathbf{h} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.05 \\ 0.1 \end{bmatrix} = 0.05$$

értékkel becsülhető, tehát a függvény értéke

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(-0.05, 1.1) \approx f(0,1) + \mathbf{D}_{f,(0,1)} \begin{bmatrix} -0.05 \\ 0.1 \end{bmatrix} = 1.05,$$

azaz $f(-0.05, 1.1) \approx 1.05$. Ha f az előző *a)* feladatbeli függvény, azaz $f(x,y) = x^2y - xy^3 + 1$, akkor a pontos érték $f(-0.05, 0.1) = 1.0693$.

b) Itt $\mathbf{h} = (-0.2, 0.1)$, így a függvény megváltozása a

$$\mathbf{D}_{\mathbf{f},(1,1)}\mathbf{h} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{8} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{10} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} + \frac{1}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3375 \\ -0.1 \end{bmatrix}$$

értékkel becsülhető, tehát a függvény értéke $\mathbf{f}(0.8, 1.1) \approx \mathbf{f}(1,1) + (0.3375, -0.1) = (-0.0375, 1.9)$. Ha $\mathbf{f}$ az előző *b)* feladatbeli függvény, azaz $\mathbf{f}(x,y) = (-x^3/2 + y^3/8, x + y)$, akkor a pontos érték $f(0.8, 1.1) = (-0.089625, 1.9)$. □

Jacobi-determináns és az integrál transzformációja A 2- és 3-dimenziós tér leírására leggyakrabban használt koordináta-rendszerek közötti váltás a többváltozós integrálok kiszámításában fontos szerepet kap. Az a kérdés, hogy az integrálközelítő összegben szereplő „téglányoknak” mennyi a mértékük. E szakasz kalkulus-előismereteket igényel.

Felidézzük a síkbeli polárkoordináta-rendszernek, a térbeli henger- és gömbi koordináta-rendszereknek a derékszögű koordináta-rendszerrel való kapcsolatát:

(a) Polár	*(b)* Henger	*(c)* Gömbi
$x = r\cos\vartheta$	$x = r\cos\vartheta$	$x = \rho\sin\varphi\cos\vartheta$
$y = r\sin\vartheta$	$y = r\sin\vartheta$	$y = \rho\sin\varphi\sin\vartheta$
	$z = m$	$z = \rho\cos\varphi$

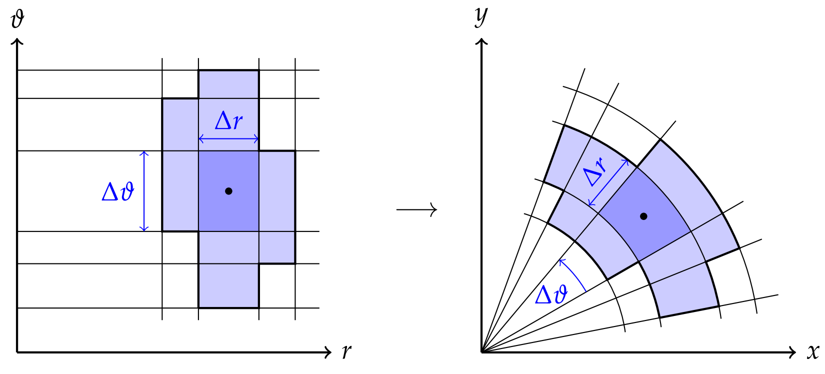
A felsorolt változók jelentése: r az xy-síkban az origótól való távolság, ρ a térben az origótól való távolság, ϑ az x-tengely pozitív felével bezárt szög az xy-síkban, φ a z-tengely pozitív felével bezárt szög.

Jacobi-determinánsnak nevezzük egy $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény deriváltleképezésének determinánsát.

A síkbeli polárkoordináta-rendszerről a derékszögűre való áttérés egy $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; (r, \vartheta) \mapsto (x, y)$ függvény, melyet a fönti *(a)*-beli képletek definiálnak. Ennek deriváltleképezése, pontosabban a leképezés $\mathbf{D}$ mátrixa (szokás Jacobi-mátrixnak is hívni), és annak determinánsa, a Jacobi-determináns:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta \end{bmatrix} \qquad |\mathbf{D}| = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta \end{vmatrix} = r.$$

Az, hogy a Jacobi-determináns értéke r, azt jelenti, hogy egy „kicsiny” $\Delta r \times \Delta\vartheta$ méretű téglány – melynek területe $\Delta r \Delta\vartheta$ – a transzformáció után, azaz a polárkoordináta-rendszerben „nagyjából” r-szerese lesz az eredetinek, azaz $r\Delta r\Delta\vartheta$, ahol r a téglány egy pontjának origótól való távolsága. Ezt a leképezést a 7.26 ábrával szemléltetjük.

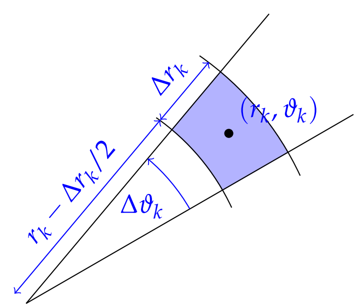


7.26. ábra: A síkbeli polárkoordinátarendszerre való áttérést megadó leképezés szemléltetése egy téglányokból álló tartomány képének ábrázolásával.

Az r-szereződés geometriailag is könnyen igazolható, ahogy azt a 7.27 ábra mutatja. Kiszámoljuk egy polár-rendszerbeli téglány területét. Ez két körcikk területének különbsége. A nagyobbik sugara $r_k + \Delta r_k/2$, a határoló ív hossza $(r_k + \Delta r_k/2)\Delta\vartheta_k$, így területe $\frac{1}{2}(r_k + \Delta r_k/2)^2\Delta\vartheta_k$. Hasonlóan kiszámolva a kisebbik körcikk területét, majd kivonva a nagyobbikéból kapjuk, hogy a téglány ΔA_k területe

$$\Delta A_k = \frac{1}{2}\left(r_k + \frac{\Delta r_k}{2}\right)^2 \Delta\vartheta_k - \frac{1}{2}\left(r_k - \frac{\Delta r_k}{2}\right)^2 \Delta\vartheta_k = r_k \Delta r_k \Delta\vartheta_k.$$

Eszerint egy T tartományon értelmezett $f(r, \vartheta)$ függvény integrál-



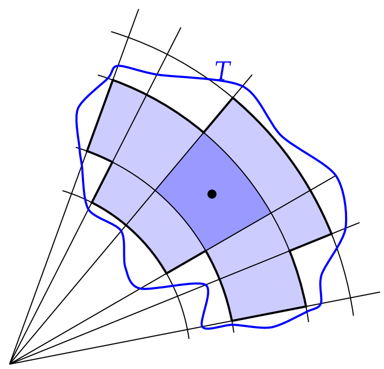
7.27. ábra: A síkbeli polárkoordinátarendszer téglányának területe $r_k \Delta r_k \Delta\vartheta_k$.

közelítő összege és annak határértéke, amint a legnagyobb átmérőjű téglány átmérője tart 0-hoz (ld. 7.28 ábra):

$$\sum_k f(r_k, \vartheta_k)\Delta A_k = \sum_k f(r_k, \vartheta_k) r_k \Delta r_k \Delta\vartheta_k \to \int_T f(r, \vartheta) r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\vartheta.$$

A két térbeli koordináta-rendszerre való áttérés hasonló módon való megértését és a leképezések elképzelését már az Olvasóra hagyjuk, de a leképezések deriváltjának determinánsát még fölírjuk. A hengerkoordináták esetén az $(r, \vartheta, m) \mapsto (x, y, z)$ leképezésre ez

$$|\mathbf{D}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial m} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial m} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$



7.28. ábra: Egy T tartományba eső téglányok, és a k-adik téglány kiemelve.

A gömbi koordináta-rendszer esetén a leképezés $(\rho, \varphi, \vartheta) \mapsto (x, y, z)$, amelynek Jacobi-determinánsa:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\vartheta & \rho\cos\varphi\cos\vartheta & -\rho\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & \rho\cos\varphi\sin\vartheta & \rho\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\varphi.$$

Így tehát az integrál kiszámításának képletei e három koordináta-rendszerre:

$$\begin{aligned} &\text{Polár:} & \iint_T f(r,\vartheta)\,\mathrm{d}A &= \iint_T f(r,\vartheta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta \\ &\text{Henger:} & \iiint_T f(r,\vartheta,m)\,\mathrm{d}V &= \iiint_T f(r,\vartheta,m)\,r\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta \\ &\text{Gömbi:} & \iiint_T f(\rho,\varphi,\vartheta)\,\mathrm{d}V &= \iiint_T f(\rho,\varphi,\vartheta)\,\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta. \end{aligned}$$

Függvények kompozíciójának deriváltja E paragrafusnak nem célja a függvényanalízis területére tartozó témák feldolgozása, de a többváltozós függvények kompozíciójának deriváltleképezése az egyváltozós függvények láncszabályához hasonló módon számolható, és erre érdemes egy pillantást vetnünk, mert a megoldást a deriváltleképezések kompozíciója, azaz a Jacobi-mátrixok szorzata adja.

Bizonyítás nélkül közöljük a következő tételt.

7.112. tétel (Láncszabály). *Legyen* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *két függvény. Ha* $\mathbf{g}$ *differenciálható az* $\mathbf{x}$ *helyen, és* $\mathbf{f}$ *a* $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ *helyen, akkor* $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ *differenciálható az* $\mathbf{x}$ *helyen, és deriváltleképezése, illetve annak mátrixa:*

$$D_{\mathbf{f}\circ\mathbf{g},\mathbf{x}} = D_{\mathbf{f},\mathbf{g}(\mathbf{x})} \circ D_{\mathbf{g},\mathbf{x}}, \quad \textit{illetve} \quad \mathbf{D}_{\mathbf{f}\circ\mathbf{g},\mathbf{x}} = \mathbf{D}_{\mathbf{f},\mathbf{g}(\mathbf{x})}\mathbf{D}_{\mathbf{g},\mathbf{x}}.$$

7.113. példa (Láncszabály). *Írjuk fel a láncszabály általános képletét a megadott függvénytípusokra, az összetett függvény deriváltját pedig a láncszabállyal és behelyettesítéssel is számítsuk ki!*

1. $f : (x, y) \mapsto x^2 - y$, $\mathbf{g} : u \mapsto (u^2 + u, u - 1)$, $u = 1$.
2. $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2; x \mapsto (x^2, x - 1)$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (u, v) \mapsto x = u^2 v$, $(u, v) = (1, 2)$.
3. $\mathbf{f}(x, y) = (xy^2 - 1, x - y)$, $\mathbf{g}(u, v) = (u + 1, u - v)$, $(u, v) = (0, 1)$.

MEGOLDÁS. Az *a)* esetben az f-hez, illetve $\mathbf{g}$-hez tartozó láncszabály általános alakja

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}u} \\ \frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}u} \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}u},$$

a függvények parciális deriváltjait kiszámolva és a helyet megadva

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}(1) = \begin{bmatrix} 2x & -1 \end{bmatrix}_{\mathbf{g}(1)=(2,0)} \begin{bmatrix} 2u + 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{u=1},$$

végül a behelyettesítést is elvégezve:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 11.$$

Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha a deriválás előtt elvégezzük a helyettesítést: $(f \circ \mathbf{g})(u) = (u^2 + u)^2 - (u - 1) = u^4 + 2u^3 + u^2 - u + 1$, ennek u szerinti deriváltja $4u^3 + 6u^2 + 2u - 1$, és ennek értéke az $u = 1$ helyen 11.

A *b)* esetben $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, így $\mathbf{f} \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, és

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x} \\ \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x}\frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x}\frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x}\frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x}\frac{\partial g}{\partial v} \end{bmatrix}$$

A megadott függvényekre és a helyettesítendő értékeket is megadva:

$$\begin{bmatrix} 2x \\ 1 \end{bmatrix}_{x=g(1,2)=2} \begin{bmatrix} 2uv & u^2 \end{bmatrix}_{u=1,v=2} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Behelyettesítés után a függvény $(u, v) \mapsto (u^4 v^2, u^2 v - 1)$, aminek deriváltja az $(u, v) = (1, 2)$ helyen

$$\begin{bmatrix} 4u^3 v^2 & 2u^4 v \\ 2uv & u^2 \end{bmatrix}_{(1,2)} = \begin{bmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix},$$

ami természetesen megegyezik az előző eredménnyel.

Végül a *c)* esetben az általános alak

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial u} & \dfrac{\partial g_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial u} & \dfrac{\partial g_2}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

A parciális deriváltakat kiszámolva és a helyettesítési értékeket is megadva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{bmatrix}_{(0,1)} &= \begin{bmatrix} y^2 & 2xy \\ 1 & -1 \end{bmatrix}_{(1,-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}_{(0,1)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Itt fölhasználtuk, hogy $\mathbf{g}(0,1) = (1,-1)$. Ha a deriválás előtt elvégezzük a függvények kompozícióját, akkor ugyanerre az eredményre jutunk, ugyanis

$$(\mathbf{f}(\mathbf{g}(u,v)) = \Big((u+1)(u-v)^2 - 1, v+1)\Big),$$

aminek a deriváltmátrixa

$$\begin{bmatrix} (u-v)^2 + 2(u+1)(u-v) & -2(u+1)(u-v) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{(0,1)} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

III. rész

Mátrixok sajátságai

E rész a mátrixok legfontosabb tulajdonságait, sajátságait vizsgálja. A *sajátságokra* való utalás egyúttal egy szójáték, mely a mátrix *sajátértékének*, *sajátvektorának* és *sajátalterének* igen fontos fogalmára, valamint a születésekor ugyancsak *sajátértéknek* nevezett szinguláris értékre utal. Vizsgálatainkat a négyzetes mátrixok lehető legegyszerűbb – diagonális – alakra hozásával kezdjük, amihez a sajátértékek meghatározása vezet. Az alkalmazásokban az utóbbi időben különösen fontossá vált, és minden mátrixra működő másik diagonalizáló technika a szinguláris értékekhez kapcsolódik. Ennek tárgyalását a diagonalizálhatósághoz kapcsolódó kérdések tisztázása, a „majdnem diagonális alak”, a Jordan-féle normálalak leírása követi, végül e részt az alkalmazásokban különösen fontos nemnegatív mátrixok vizsgálata zárja.

green&blue (CC) by Joós Andi

8

Sajátérték, diagonalizálás

Egy mátrix jellemzésének különösen hatékony eszköze azoknak a nullvektortól különböző **x** vektoroknak a meghatározása, amelyeket a mátrixszal való szorzás önmagukkal párhuzamos vektorokba visz, azaz amelyekre $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$. E vektorok ismerete olyan bázis megtalálásához is hozzásegít, amelyben e mátrix lényegesen egyszerűbb – például diagonális – alakot ölt.

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér

A sajátérték és a sajátvektor fogalma Kezdjük egy egyszerű feladattal, melyből kiolvasható annak lényege, amiről e fejezetben szó lesz.

8.1. PÉLDA (JÓ BÁZIS TÜKRÖZÉSHEZ). *Tükrözzük a 3-dimenziós tér vektorait a tér egy megadott síkjára! Geometriai szemléletünkre hagyatkozva válasszunk e lineáris leképezés leírásához egy megfelelő bázist, majd írjuk fel a tükrözés e bázisra vonatkozó mátrixát!*

MEGOLDÁS. A síkra való tükrözés a síkra merőleges vektorokat ellentettjükbe viszi, míg a sík vektorait helyben hagyja. A tér minden vektora egyértelműen előáll egy síkba eső és egy rá merőleges vektor összegeként. Válasszuk ki a sík egy tetszőleges bázisát (álljon ez az **a** és **b** vektorokból), és e két vektorhoz vegyünk hozzá egy a síkra merőleges **c** vektort harmadik bázisvektornak. Ekkor a tükröző T leképezés hatása e vektorokon: $T\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $T\mathbf{b} = \mathbf{b}$ és $T\mathbf{c} = -\mathbf{c}$. Az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ bázisban T mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Így e bázisban egy tetszőleges (x, y, z) vektor tükörképe $(x, y, -z)$. □

E példában úgy választottunk bázist, hogy olyan vektorokat kerestünk, melyek önmaguk skalárszorosába mennek, azaz amelyek kielégítenek egy $T\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ alakú egyenletet. Ez a következő definícióhoz vezet, melyet először csak mátrixokra mondunk ki.

8.2. DEFINÍCIÓ (SAJÁTÉRTÉK, SAJÁTVEKTOR). *Azt mondjuk, hogy a λ szám az $\mathbf{A}$ mátrix* sajátértéke, *ha létezik olyan nemnulla $\mathbf{x}$ vektor, melyre $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$. Az ilyen $\mathbf{x}$ vektorokat az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó* sajátvektorainak, *a $(\lambda, \mathbf{x})$ párokat pedig az $\mathbf{A}$* sajátpárjainak *nevezzük.*

8.3. PÉLDA (SAJÁTÉRTÉK, SAJÁTVEKTOR). *Igazoljuk, hogy az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ mátrixnak -1 egy sajátértéke, és $(2,1)$ az egyik hozzátartozó sajátvektora, azaz $(-1,(2,1))$ egy sajátpár. Mutassuk meg, hogy a $(2,(1,2))$ pár egy másik sajátpár!*

MEGOLDÁS. Valóban,

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

E mátrix egy másik sajátértéke 2, ugyanis

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \text{azaz} \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

□

Ha $\mathbf{x}$ egy sajátvektor, akkor minden nemnulla konstansszorosa is az, ugyanis

$$\mathbf{A}(c\mathbf{x}) = c\mathbf{Ax} = c\lambda\mathbf{x} = \lambda(c\mathbf{x}),$$

azaz $\mathbf{A}(c\mathbf{x}) = \lambda(c\mathbf{x})$. Ennél több is igaz:

8.4. ÁLLÍTÁS (A SAJÁTVEKTOROK ALTEREI). *Ha az $\mathbf{A}$ mátrixnak λ egy sajátértéke, akkor a λ-hoz tartozó sajátvektorok a nullvektorral együtt alteret alkotnak, mely megegyezik $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ nullterével.*

BIZONYÍTÁS. A nem nullvektor $\mathbf{x}$ pontosan akkor egy λ sajátértékhez tartozó sajátvektor, ha kielégíti az $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ egyenletet, azaz az $\mathbf{Ax} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletet, vagyis ha megoldása a homogén lineáris $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletnek. Ez pedig épp azt jelenti, hogy $\mathbf{x}$ eleme $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ nullterének. □

8.5. DEFINÍCIÓ (SAJÁTALTÉR). *A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó sajátvektorai és a nullvektor által alkotott alteret a λ sajátértékhez tartozó* sajátaltérnek *nevezzük.*

8.6. PÉLDA (SAJÁTALTÉR BÁZISÁNAK MEGHATÁROZÁSA). *Adjuk meg az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix 2-höz, mint sajátértékhez tartozó sajátalterét úgy, hogy megadjuk egy bázisát! Tegyük meg ugyanezt a 10-hez tartozó sajátaltérrel is.

MEGOLDÁS. Először ellenőrizzük, hogy a 2 sajátérték! Ehhez meg kell mutatni, hogy az $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása. Hozzuk az együtthatómátrixot redukált lépcsős alakra:

$$\mathbf{A}-2\mathbf{I}=\begin{bmatrix}1&6&1\\1&6&1\\1&6&1\end{bmatrix}\quad\Longrightarrow\quad\begin{bmatrix}1&6&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Mivel $\mathrm{r}(\mathbf{A}-2\mathbf{I})=1$, ezért az $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ egyenletrendszer szabad változóinak száma 2, és megoldása

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}-6s-t\\s\\t\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}-6\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Tehát a sajátaltér egy bázisa a $(-6,1,0)$ és $(-1,0,1)$ vektorokból áll.

A 10 is sajátérték, mivel az $(\mathbf{A}-10\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása, ugyanis

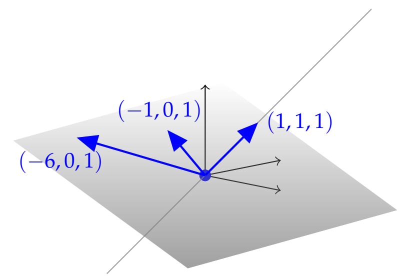
$$\mathbf{A}-10\mathbf{I}=\begin{bmatrix}-7&6&1\\1&-2&1\\1&6&-7\end{bmatrix}\quad\Longrightarrow\quad\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

tehát a megoldás

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}t\\t\\t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Így a sajátalteret az $(1,1,1)$ vektor feszíti ki.

A két sajátaltér egyike 2-, másika 1-dimenziós altér. Ezt szemlélteti a 8.1. ábra. □



8.1. ábra: A 8.6. feladatbeli **A** mátrix sajátalterei: a 2-höz tartozó 2-dimenziós altér, melyet a $(-6,1,0)$ és $(-1,0,1)$ vektorok feszítenek ki, és a 10-hez tartozó 1-dimenziós altér, melyet a $(1,1,1)$ vektor feszít ki.

Karakterisztikus polinom Láttuk, hogy az $\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$ egyenletnek pontosan akkor van a zérusvektortól különböző megoldása, ha a homogén lineáris $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása. Ez a 6.3. tétel szerint pontosan akkor igaz, ha

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0. \tag{8.1}$$

Ez tehát azt jelenti, hogy λ pontosan akkor sajátérték, ha kielégíti a (8.1) egyenletet. Ezt az egyenletet az **A** mátrix *karakterisztikus egyenletének* nevezzük. Ha **A** egy $n\times n$-es mátrix, akkor az egyenlet bal oldala a determináns kifejtése után egy n-edfokú polinom, melyet *karakterisztikus polinomnak* nevezünk. Az n-edrendű **A** mátrix karakterisztikus polinomját $\chi_{\mathbf{A}}$-val jelöljük, ennek általános alakja tehát

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda)=(-1)^n\lambda^n+p_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+p_1\lambda+p_0. \tag{8.2}$$

A karakterisztikus polinomot a

$$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})$$

determinánssal is szokás definiálni. Előnye, hogy ekkor a polinom főegyütthatója mindig 1, míg az általunk használt definíció szerint a páratlan rendű mátrixok karakterisztikus polinomjának -1 a főegyütthatója. Hátránya viszont az, hogy a konstans tag nem mindig a determináns, másrészt a kézzel való számolás is nehézkesebb, ezért az elemi feladatok egyszerűbb számolhatósága érdekében is hasznosabb a $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$ alakot választani.

8.7. PÉLDA (KARAKTERISZTIKUS POLINOM FELÍRÁSA). *Határozzuk meg az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

mátrixok karakterisztikus polinomját és ahol lehet, próbáljunk meg általánosabb érvényű állításokat megsejteni az eredmény alapján!

MEGOLDÁS. Ki kell számítanunk a $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ determináns értékét:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc \\ &= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) \\ &= \lambda^2 - \operatorname{trace}(\mathbf{A})\lambda + \det \mathbf{A}. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Kimondható a következtetés: 2×2-es mátrixok karakterisztikus polinomját a mátrix nyomával és determinánsával is ki tudjuk fejezni.

A $\mathbf{B}$ mátrix karakterisztikus polinomja

$$\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & b \\ 0 & 1-\lambda & c \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

Ebből leolvasható, hogy a háromszögmátrixok karakterisztikus polinomjának alakját nem befolyásolják a főátlón kívüli elemek (ld. a 8.8. tételt).

A $\mathbf{C}$ mátrix karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{C} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} a-\lambda & b & c \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a-\lambda)\lambda^2 + b\lambda + c \\ &= -\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c. \end{aligned}$$

Ez azt sejteti, hogy minden polinomhoz könnyen konstruálható olyan mátrix, melynek az a karakterisztikus polinomja (ld. a **??** feladatot). □

Az előző feladat tanulságait külön állításokban is megfogalmazzuk:

8.8. ÁLLÍTÁS (HÁROMSZÖGMÁTRIXOK SAJÁTÉRTÉKEI). *A háromszögmátrixok és így a diagonális mátrixok sajátértékei megegyeznek a főátló elemeivel.*

BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{A}$ háromszögmátrix, akkor $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ is, és egy háromszögmátrix determinánsa megegyezik főátlóbeli elemeinek szorzatával. Eszerint az $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ háromszögmátrix karakterisztikus egyenlete

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) = 0,$$

aminek a gyökei a_{ii} $(i = 1, \dots, n)$. Így ezek az $\mathbf{A}$ sajátértékei. □

8.9. ÁLLÍTÁS (DETERMINÁNS, NYOM ÉS A SAJÁTÉRTÉKEK). *Ha az n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, akkor*

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n \\ \operatorname{trace}(\mathbf{A}) &= \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n\end{aligned}$$

Ezek az értékek megjelennek a karakterisztikus polinomban: a determináns a konstans tag, a nyom a $(-\lambda)^{n-1}$ együtthatója.

BIZONYÍTÁS. A karakterisztikus polinom gyöktényezős alakja:

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\ldots(\lambda_n-\lambda)$$

$\lambda = 0$ behelyettesítése után kapjuk, hogy

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n.$$

Az állítás nyomra vonatkozó részének bizonyítását feladatként tűzzük ki. □

A valós 2×2-es mátrixok sajátaltereinek jellemzése Olyan eredményekkel fogunk megismerkedni e paragrafusban, melyek általánosíthatóak lesznek magasabb dimenzióra, de 2-dimenzió esetén egyszerűbb a szemléltetésük.

Láttuk, hogy ha $\mathbf{x}$ sajátvektor, akkor bármely konstansszorosa is az. Így egy egyenessel párhuzamos vektorok közül elég csak egy vektor képét vizsgálni, mondjuk az egységvektorét. Hasznos lesz tehát a lineáris leképezések korábban megismert egységkör-ábrázolása (ld. 7.7 ábra).

8.10. PÉLDA (2×2-ES MÁTRIXOK SAJÁTVEKTORAINAK SZEMLÉLTETÉSE). *Határozzuk meg a 7.11. és a **??** példákban is szereplő*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait. Szemléltessük ezeket az egységkör-ábrákban.

MEGOLDÁS. Egyszerű számolással meghatározható mind a négy mátrix karakterisztikus egyenlete, sajátértékei és sajátvektorai, bár a $\mathbf{D}$ mátrix esetén ezek komplex számokat is tartalmaznak. A karakterisztikus polinomot jelölje χ, indexében a mátrix jelével. Ezután megadjuk a sajátértékeket, majd a sajátvektorokat:

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1, \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \frac{1}{2}, \qquad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$$

$$\chi_{\mathbf{B}}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda - 1, \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \qquad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$$

$$\chi_{\mathbf{C}}(\lambda) = \lambda^2 - 1, \qquad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1, \qquad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}.$$

$$\chi_{\mathbf{D}}(\lambda) = \lambda^2 + 1, \qquad \lambda_1 = \mathrm{i},\ \lambda_2 = -\mathrm{i}, \qquad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i}\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix}\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i}\\1\end{bmatrix}.$$

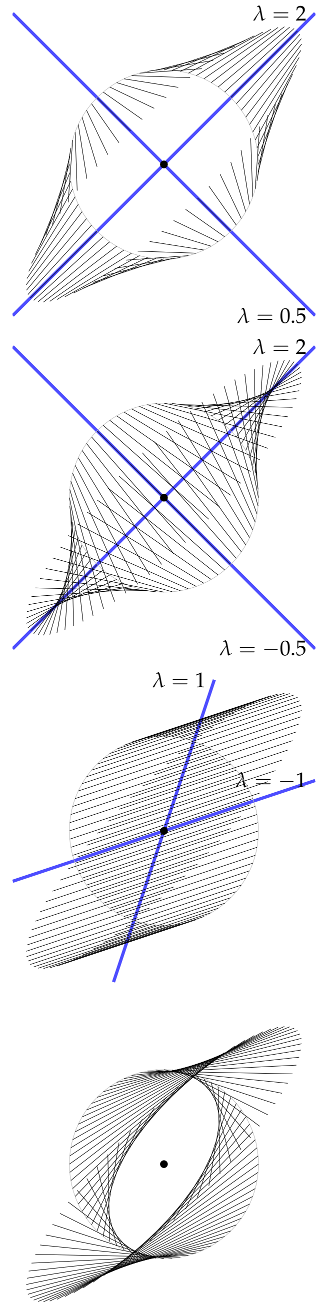
Némi nehézséget a $\mathbf{D}$ mátrix okoz, ezért az ahhoz tartozó számításokat részletezzük:

$$|\mathbf{D} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix}-\frac{3}{4} - \lambda & \frac{5}{4}\\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} - \lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$$\lambda_1 = \mathrm{i}: \quad \begin{bmatrix}-\frac{3}{4} - \mathrm{i} & \frac{5}{4}\\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} - \mathrm{i}\end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i}\\ 0 & 0\end{bmatrix} \text{ amiből } \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix}\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i}\\1\end{bmatrix},$$

$$\lambda_2 = -\mathrm{i}: \quad \begin{bmatrix}-\frac{3}{4} + \mathrm{i} & \frac{5}{4}\\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} + \mathrm{i}\end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i}\\ 0 & 0\end{bmatrix} \text{ amiből } \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix}\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i}\\1\end{bmatrix}.$$

A négy mátrixhoz tartozó egységkörábra a 8.2 ábrán látható. □



8.2. ábra: A négy leképezés sajátirányai.

8.11. TÉTEL (A 2×2-ES SZIMMETRIKUS MÁTRIXOK SAJÁTALTEREI). *Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix. Ekkor*

a) $\mathbf{A}$ minden sajátértéke valós,

b) $\mathbf{A}$-nak pontosan akkor van két azonos sajátértéke, ha $a\mathbf{I}$ alakú, ekkor a sík összes vektora sajátvektor,

c) ha $\mathbf{A}$-nak két különböző sajátértéke van, akkor sajátalterei merőlegesek egymásra.

BIZONYÍTÁS. A 2×2-es szimmetrikus valós mátrix általános alakja $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix}a & b\\ b & d\end{smallmatrix}\right]$, ahol $a, b, d \in \mathbb{R}$. Ennek karakterisztikus egyenlete a (8.3) szerint $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - b^2)$. Az egyenlet diszkriminánsa $D = (a+d)^2 - 4(ad - b^2) = (a-d)^2 + 4b^2 \geq 0$. Tehát a gyökök, vagyis a sajátértékek valósak. Ez bizonyítja *a)*-t. A két sajátérték pontosan akkor egyezik meg, ha $D = 0$, ez viszont csak $a = d$ és $b = 0$ esetén lehetséges, ami bizonyítja *b)*-t. A *c)* állítás igazolását a feladatok közt tűzzük ki. □

Mátrix összes sajátértékének és sajátvektorának meghatározása Az előző paragrafusokban leírtak alapján egy mátrix sajátértékeinek és sajátvektorainak meghatározása két lépésben elvégezhető:

1. megoldjuk a $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ karakterisztikus egyenletet, ennek gyökei a sajátértékek,

2. minden λ sajátértékhez meghatározzuk az $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ nullterének egy bázisát, az általa kifeszített altér nemzérus vektorai a λ-hoz tartozó sajátvektorok.

8.12. PÉLDA (Az összes sajátérték és sajátvektor meghatározása). *Határozzuk meg a*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

MEGOLDÁS. Az első lépés a karakterisztikus egyenletet felírása és megoldása. A kiszámítandó determináns háromszögalakú, így értéke a főátlóbeli elemek szorzata:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)^2$$

A karakterisztikus egyenlet gyökei és így az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

Tekintsük először a $\lambda_1 = 0$ esetet. $\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}$ nullterének meghatározásához redukált lépcsős alakra hozzuk az $\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}$ mátrixot:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{aligned} x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ennek megoldása $x_1 = t$, azaz az összes megoldás

$$\begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tehát a $\lambda_1 = 0$ sajátértékhez tartozó sajátaltér az $(1, 0, 0)$ vektor által kifeszített altér.

Tekintsük ezután a $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ esetet. Meghatározzuk az $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$ mátrix nullterét.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow 2x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

Ennek az (egy egyenletből álló) egyenletrendszernek a megoldása: $x_2 = s$, $x_3 = t$, $x_1 = (s+t)/2$, azaz

$$\begin{bmatrix} (s+t)/2 \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát a $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ sajátértékhez tartozó sajátaltér az $(\frac{1}{2}, 1, 0)$ és az $(\frac{1}{2}, 0, 1)$ vektorok által kifeszített altér. □

Az $n \times n$-es mátrixok karakterisztikus egyenlete n-edfokú. Egy ilyen egyenlet megoldására $n \le 4$ esetén van megoldóképlet, ezért ezeket az egyenleteket – például egy komputer algebra program segítségével – meg tudjuk oldani. Egyébként vagy szerencsénk van, és az egyenlet olyan alakú, amilyenhez vannak gyors megoldási lehetőségek, vagy csak közelítő megoldás megtalálására van esély.

8.13. PÉLDA (MAGASABBFOKÚ KARAKTERISZTIKUS EGYENLET). *Határozzuk meg az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

MEGOLDÁS. A karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2(2-\lambda) + 24 - 12(1-\lambda) - 4(2-\lambda) \\ &= -(\lambda^3 - 4\lambda^2 - 11\lambda - 6) \end{aligned}$$

E harmadfokú egyenlet megoldására használhatunk számítógépet, megoldóképletet, vagy például a függelékben megtalálható racionálisgyöktételt. Eszerint a karakterisztikus egyenlet $-(\lambda+1)^2(\lambda-6) = 0$, így gyökei $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ és $\lambda_3 = 6$.

A $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ esetben

$$\mathbf{A} + \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Ennek megoldása

$$\begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

azaz a -1 sajátértékhez tartozó sajátalteret a $(-1, 1, 0)$ és a $(-1, 0, 1)$ vektorok feszítik ki.

A $\lambda_3 = 6$ esetben

$$\mathbf{A} - 6\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & -4 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \begin{aligned} x_1 \quad\; - \tfrac{2}{3}x_3 &= 0 \\ x_2 - \tfrac{2}{3}x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ennek megoldása a törtek alkalmazását elkerülő $x_3 = 3t$ paraméterválasztással

$$\begin{bmatrix} 2t \\ 2t \\ 3t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Tehát a $\lambda_3 = 6$ sajátértékhez tartozó sajátalteret a $(2, 2, 3)$ vektor feszíti ki. □

A karakterisztikus egyenlet komplex gyökei Ha valóselemű mátrixot vizsgálunk, megeshet, hogy a karakterisztikus egyenletnek vannak nem valós gyökei. Mivel a valós számok egyúttal komplexek is, a valós elemű mátrixot tekinthetjük komplex eleműnek is, ekkor viszont a karakterisztikus egyenlet komplex gyökeit is sajátértéknek tekinthetjük. Ebben az esetben a komplex sajátértékhez komplex elemű sajátvektor fog tartozni, amint azt már láthattuk a 8.10. példában.

8.14. példa (Komplex sajátértékek és komplex elemű sajátvektorok). *Határozzuk meg a komplex elemű*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait!

Megoldás. A karakterisztikus egyenlet

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \lambda\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \lambda^2 - \lambda + 1.$$

A $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ egyenlet gyökei $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

Először vizsgáljuk az $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ sajátértéket:

$$\mathbf{A} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} i & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} i \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \implies x - iy = 0.$$

Ennek az egyenlet(rendszer)nek a megoldása az $y = t$ paraméterválasztással

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} it \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát az $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ sajátértékhez tartozó sajátaltér egy bázisa az $(i, 1)$ vektorból áll.

Az $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ sajátérték esetén

$$\mathbf{A} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} i & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \implies x + iy = 0.$$

Ennek az egyenlet(rendszer)nek a megoldása az $y = t$ paraméterválasztással

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -it \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát az $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ sajátértékhez tartozó sajátalteret a $(-i, 1)$ sajátvektor feszíti ki. □

A karakterisztikus egyenlet többszörös gyökei: az algebrai és a geometriai multiplicitás Ha λ a karakterisztikus egyenlet k-szoros gyöke, vagy más szóval λ multiplicitása vagy *algebrai multiplicitása* k, akkor a λ-hoz tartozó sajátaltér d dimenziójára $1 \leq d \leq k$. Ezt az állítást később bebizonyítjuk. A sajátaltér dimenzióját szokták a λ sajátérték *geometriai multiplicitásának* nevezni. A 8.12. és a 8.13. példák olyan eseteket mutattak, amikor a sajátértékek algebrai és geometriai multiplicitása azonos, azaz minden sajátaltér épp annyi dimenziós, amennyi a gyök (algebrai) multiplicitása. A következő feladat azt mutatja, hogy a sajátaltér dimenziója kisebb is lehet.

8.15. PÉLDA (SAJÁTÉRTÉK ALGEBRAI ÉS GEOMETRIAI MULTIPLICITÁSA). *Határozzuk meg az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ és a } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és azok algebrai és geometriai multiplicitását!

MEGOLDÁS. Mivel $\mathbf{A}$ háromszögmátrix, ezért karakterisztikus polinomja $(4-\lambda)^3$, a 4 tehát háromszoros gyök, azaz algebrai multiplicitása 3. Mivel

$$\mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ezért az $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer az $y = 0$, $z = 0$ alakot ölti, aminek megoldása

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Eszerint $\mathbf{A}$ sajátaltere 1-dimenziós, melyet az $(1, 0, 0)$ vektor feszít ki. A $\lambda = 4$ sajátérték geometriai multiplicitása tehát 1.

A $\mathbf{B}$ mátrix karakterisztikus polinomja $(1-\lambda)^2(2-\lambda)^2$, ennek gyökei 1 és 2, és mindegyiknek kettő az algebrai multiplicitása. Meghatározzuk sajátaltereiket. $\lambda = 1$ esetén

$$\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{B} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az ehhez tartozó homogén egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tehát az altér dimenziója 2, vagyis a geometriai multiplicitás megegyezik az algebraival. Ha $\lambda = 2$, akkor

$$\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{B} - 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az ehhez tartozó homogén egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tehát az altér dimenziója most 1, vagyis a geometriai multiplicitás kisebb, mint az algebrai. □

Sajátértékek és a mátrix hatványai A mátrixok függvényeinek számolása szoros kapcsolatban van a sajátértékekkel. E témában első lépés a mátrixhatványok sajátértékeinek és sajátvektorainak meghatározása.

8.16. TÉTEL (MÁTRIX INVERTÁLHATÓSÁGA ÉS A 0 SAJÁTÉRTÉK). *Az* $\mathbf{A}$ *mátrix pontosan akkor invertálható, ha a* 0 *nem sajátértéke.*

BIZONYÍTÁS. $\mathbf{A}$ pontosan akkor invertálható, ha $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, de ez ekvivalens azzal, hogy $\det(\mathbf{A} - 0\mathbf{I}) \neq 0$, azaz 0 nem sajátértéke $\mathbf{A}$-nak. □

8.17. TÉTEL (MÁTRIX HATVÁNYAINAK SAJÁTÉRTÉKEI ÉS SAJÁTVEKTORAI). *Ha* λ *az* $\mathbf{A}$ *mátrix egy sajátértéke és* $\mathbf{x}$ *egy hozzá tartozó sajátvektor, akkor bármely egész* n *esetén* λ^n *sajátértéke az* $\mathbf{A}^n$ *mátrixnak és* $\mathbf{x}$ *egy hozzá tartozó sajátvektor, amennyiben* λ^n *és* $\mathbf{A}^n$ *is értelmezve van.*

BIZONYÍTÁS. $n = 0$ esetén $\lambda^0 = 1$ és $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$, és ekkor minden vektor az 1 sajátértékhez tartozó sajátvektor, tehát ekkor az állítás igaz.

Pozitív n-re indukcióval igazoljuk az állítást: $n = 1$ esetén nyilván igaz, $n = 2$ esetén:

$$\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \lambda(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2\mathbf{x}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy ha $n = k - 1$ esetén már igaz az állítás, akkor $n = k$ esetén is:

$$\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\lambda^{k-1}\mathbf{x}) = \lambda^{k-1}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \lambda^{k-1}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^k\mathbf{x}.$$

Ha $\mathbf{A}$ invertálható, akkor

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \text{ amiből } \frac{1}{\lambda}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}, \text{ azaz } \lambda^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}.$$

Végül negatív kitevők esetén:

$$\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x}, \text{ amiből } \lambda^{-k}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-k}\mathbf{x}.$$ □

8.18. TÉTEL (MÁTRIX HATVÁNYAINAK HATÁSA). *Tegyük fel, hogy λ_1, $\lambda_2, \ldots$ λ_k sajátértékei az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixnak, és hogy $\mathbf{x}_1, \ldots$ $\mathbf{x}_k$ hozzájuk tartozó sajátvektorok. Ha egy n-dimenziós $\mathbf{v}$ vektor előáll e sajátvektorok lineáris kombinációjaként, azaz*

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_k\mathbf{x}_k,$$

akkor bármely egész m esetén

$$\mathbf{A}^m\mathbf{v} = c_1\lambda_1^m\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_2^m\mathbf{x}_2 + \ldots + c_k\lambda_k^m\mathbf{x}_k.$$

BIZONYÍTÁS. A bizonyítás magától értetődő, hisz

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^m\mathbf{v} &= \mathbf{A}^m(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_k\mathbf{x}_k)\\ &= c_1\mathbf{A}^m\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{A}^m\mathbf{x}_2 + \ldots + c_k\mathbf{A}^m\mathbf{x}_k\\ &= c_1\lambda_1^m\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_2^m\mathbf{x}_2 + \ldots + c_k\lambda_k^m\mathbf{x}_k.\end{aligned}$$ □

► Sajnos az nem igaz, hogy minden mátrixhoz találunk n független sajátvektort, amelyek lineáris kombinációjaként minden vektor felírható, így e tétel csak a sajátvektorok lineáris kombinációjaként előálló vektorokról szól! E tétel azt mutatja, fontos kérdés annak eldöntése, hogy egy mátrix sajátvektoraiból mikor alkotható bázis.

Speciális mátrixok sajátértékei A mátrixok egyes különleges tulajdonságai a sajátértékek bizonyos tulajdonságát is befolyásolják.

8.19. TÉTEL (SPECIÁLIS MÁTRIXOK SAJÁTÉRTÉKE). *Legyen* **A** *egy* n-*edrendű valós mátrix. Ekkor*

a) ha **A** *szimmetrikus, akkor minden sajátértéke valós,*

b) ha **A** *ferdén szimmetrikus, akkor minden sajátértéke imaginárius,*

c) ha **A** *ortogonális, akkor minden sajátértékének* 1 *az abszolút értéke,*

d) **A** *pontosan akkor nilpotens, ha minden sajátértéke* 0*, azaz karakterisztikus polinomja* λ^n *alakú.*

BIZONYÍTÁS. *a), b)* Legyen $(\lambda, \mathbf{x})$ egy **A**-hoz tartozó sajátpár. Az $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ egyenlőség mindkét oldalát balról szorozzuk be **x** adjungáltjával (konjugáltjának transzponáltjával):

$$\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathsf{H}}\lambda\mathbf{x} = \lambda|\mathbf{x}|^2.$$

Vegyük mindkét oldal adjungáltját (konjugáltjának transzponáltját), kihasználva hogy mivel **A** valós, ezért $\mathbf{A}^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$:

$$\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} = \bar{\lambda}|\mathbf{x}|^2.$$

Legyen $\lambda = a + ib$. Ha **A** szimmetrikus, azaz $\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}$, akkor $\lambda = \bar{\lambda}$, azaz $a + ib = a - ib$. Így λ imaginárius része 0, tehát λ valós. Ha **A** ferdén szimmetrikus, azaz $\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = -\mathbf{A}$, akkor $a + ib = -a + ib$, azaz λ valós része 0, így λ imaginárius.

c) Ha **A** ortogonális, akkor bármely **x** vektorra $|\mathbf{Ax}| = |\mathbf{x}|$. Így ha **x** sajátvektor, akkor $|\mathbf{x}| = |\mathbf{Ax}| = |\lambda\mathbf{x}| = |\lambda||\mathbf{x}|$, amiből $|\lambda| = 1$.

d) Ha $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, és λ sajátértéke **A**-nak, akkor λ^k sajátértéke az $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$ mátrixnak, annak viszont csak a 0 sajátértéke, így **A**-nak is minden sajátértéke 0. Az állítás megfordítása a Cayley–Hamilton-tételből következik, melyet hamarosan bizonyítunk. Eszerint minden mátrix kielégíti karakterisztikus polinomját, így ha a karakterisztikus polinom $\lambda^n = 0$, akkor $\mathbf{A}^n = \mathbf{O}$, vagyis **A** nilpotens. □

Az előző tétel bizonyításából minimális változtatással megkapható a következő tétel bizonyítása is:

8.20. TÉTEL (SPECIÁLIS KOMPLEX MÁTRIXOK SAJÁTÉRTÉKEI). *Ha az* n-*edrendű komplex* **A** *mátrix*

a) önadjungált, akkor minden sajátértéke valós,

b) ferdén önadjungált, akkor minden sajátértéke imaginárius,

c) unitér, akkor minden sajátértékének 1 *az abszolút értéke.*

Feladatok

8.1. Igazoljuk a **??** tétel *c)* állítását, mely szerint ha egy 2×2-es szimmetrikus valós mátrixnak két különböző sajátértéke van, akkor sajátalterei merőlegesek egymásra.

8.2. Diagonalizálható-e az alábbi mátrix az $\mathbb{F}_7$ test fölött?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Hasonlóság, diagonalizálhatóság

Egy lineáris transzformáció sajátértékei és karakterisztikus polinomja megőrződnek a különféle bázisokban fölírt mátrixaira is. Olyan bázist keresünk, melyben mátrixa a legegyszerűbb alakú.

Lineáris transzformációk sajátértékei A sajátérték, sajátvektor, sajátaltér fogalma természetes módon átvihető lineáris leképezésekre is.

8.21. DEFINÍCIÓ (LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓ SAJÁTÉRTÉKE, SAJÁTVEKTORA). *Azt mondjuk, hogy a λ szám az L lineáris transzformáció* sajátértéke, *ha létezik olyan nemnulla $\mathbf{x}$ vektor, melyre $L\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Az ilyen $\mathbf{x}$ vektorokat az L lineáris transzformáció λ sajátértékhez tartozó* sajátvektorainak *nevezzük.*

Ha a lineáris transzformáció $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vagy $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezés, mely valamilyen egyszerű geometriai transzformációt valósít meg, akkor néha a transzformáció mátrixának ismerete nélkül is könnyen meghatározhatjuk a sajátértékeket és sajátvektorokat.

8.22. PÉLDA (LINEÁRIS TRANSZFORMÁCIÓ SAJÁTÉRTÉKE, SAJÁTALTERE). *Adjuk meg – pusztán geometriai szemléletünkre hagyatkozva – az alábbi lineáris leképezések sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátaltereket.*

a) a sík vektorainak tükrözése egy egyenesre (vagy pontjainak tükrözése egy origón átmenő egyenesre);

b) a sík vektorainak merőleges vetítése egy egyenesre (vagy pontjainak merőleges vetítése egy origón átmenő egyenesre);

c) a tér vektorainak elforgatása egy egyenes körül a π egész számú többszörösétől különböző szöggel;

d) a tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra;

e) a tér vektorainak tükrözése egy síkra.

MEGOLDÁS. Az előző fejezetben, így a 7.7. állításban bizonyítottakhoz hasonlóan látható, hogy mindegyik feladatbeli transzformáció lineáris.

a) Egy egyenesre való tükrözés esetén csak az egyenessel párhuzamos és rá merőleges vektorok mennek saját konstansszorosukba, mégpedig az egyenessel párhuzamos vektorok saját magukba, a rá merőlegesek a saját ellentettjükbe. Tehát e transzformációnak az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltere az egyenessel párhuzamos vektorokból, a -1-hez tartozó sajátaltere a rá merőleges vektorokból áll. A pontokra vonatkozó állítás a pontokba mutató helyvektorokkal adódik.

b) A sík merőleges vetítése egy egyenesre – hasonlóan az előző esethez – helyben hagyja az egyenessel párhuzamos vektorokat, és a $\mathbf{0}$-vektorba viszi a rá merőlegeseket. Tehát az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltér az egyenessel párhuzamos vektorokból, a 0-hoz tartozó sajátaltere a rá merőleges vektorokból áll.

c) A tér egyenes körüli elforgatása a forgástengellyel párhuzamos vektorokat önmagukba viszi, és ha a forgatás szöge különbözik π egész számú többszöröseitől, semelyik másik vektort sem viszi a saját skalárszorosába. Így az egyetlen sajátérték az 1, amelyhez tartozó sajátaltér a forgástengellyes párhuzamos vektorokból áll.

d) A tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra helyben hagyja a sík összes vektorát, míg a síkra merőleges vektorokat a $\mathbf{0}$ vektorba viszi, tehát a két sajátérték 1 és 0. Az 1-hez tartozó sajátaltér a sík vektoraiból, a 0-hoz tartozó sajátaltér a rá merőleges vektorokból áll.

e) E feladatot megoldottuk a 8.1. példában. A két sajátérték 1 és -1, az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltér a sík vektoraiból, a -1-hoz tartozó sajátaltér a rá merőleges vektorokból áll. □

Egy lineáris leképezéshez bázisonként más-más mátrix tartozhat, de a sajátértékeik mégis ugyanazok, hisz egy vektor képe csak a leképezéstől függ, nem a választott bázistól.

Hasonló mátrixok sajátértékei A 7.30. és a 7.31. tételekből tudjuk, hogy egy lineáris leképezéshez különböző bázisokban tartozó mátrixok hasonlóak. Ezen felül tudjuk azt is, hogy fontos mátrixtulajdonságok invariánsak a hasonlóságra. E paragrafusban e tulajdonságok körét fogjuk bővíteni.

8.23. TÉTEL (SAJÁTÉRÉKHEZ KAPCSOLÓDÓ INVARIÁNSOK). *Ha $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$, akkor $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ karakterisztikus polinomja azonos, így sajátértékei, azok algebrai, sőt geometriai multiplicitásai is megegyeznek.*

BIZONYÍTÁS. A bizonyítás során föltesszük, hogy valamely invertálható $\mathbf{C}$ mátrixszal $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{BC}$. Ekkor

$$\begin{aligned}\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} &= \mathbf{C}^{-1}\mathbf{BC} - \lambda\mathbf{C}^{-1}\mathbf{IC})\\ &= \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{BC} - \lambda\mathbf{IC})\\ &= \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{C},\end{aligned}$$

azaz $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ és $\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}$ is hasonlóak. A 7.31. tétel szerint hasonló mátrixok determinánsa megegyezik, így $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I})$, azaz megegyeznek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ karakterisztikus polinomjai is. Ez maga után vonja, hogy megegyeznek sajátértékeik, és azok (algebrai) multiplicitásai. A geometriai multiplicitások egyenlőségéhez elég belátni, hogy $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ és $\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}$ nullterének dimenziója megegyezik, azt viszont ugyancsak a 7.31. tételben igazoltuk. □

► Ismerjük a polinom együtthatói és gyökei közti összefüggéseket, így a sajátértékeknek a polinom együtthatóit adó függvényei is invariánsak. Például a harmadfokú esetben:

$$\begin{aligned}&(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)(\lambda_3-\lambda)\\&\quad=-\lambda^3+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\lambda^2-(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)\lambda+\lambda_1\lambda_2\lambda_3.\end{aligned}$$

Tehát $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$, $\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1$ és $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ invariáns mennyiségek. Általában egy n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrixra invariánsak a sajátértékek következő függvényei:

$$\begin{aligned}e_1(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)&=\sum_{1\le i\le n}\lambda_i=\operatorname{trace}(\mathbf{A}),\\e_2(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)&=\sum_{1\le i<j\le n}\lambda_i\lambda_j,\\e_3(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)&=\sum_{1\le i<j<k\le n}\lambda_i\lambda_j\lambda_k,\\&\;\;\vdots\\e_n(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)&=\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n=\det(\mathbf{A}).\end{aligned}$$

Az itt felsorolt e_1, e_2,..., e_n függvényeket *elemi szimmetrikus polinomoknak* nevezzük. A sajátértékek utolsónak említett függvénye a determináns, melynek invariáns voltát megmutattuk a 7.31. tételben. Hamarosan igazoljuk, hogy minden mátrix hasonló egy felső háromszögmátrixhoz, melynek főátlójában a sajátértékek vannak. Így hasonló mátrixok nyoma megegyezik, hisz a sajátértékek összegével egyenlő.

► Fontos következménye e tételnek, hogy van értelme *lineáris transzformáció karakterisztikus polinomjáról*, beszélni (legalábbis véges dimenziós esetben, pl. $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ vagy $\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ transzformációk esetén).

Mátrixok diagonalizálása és sajátfelbontása Igen fontos kérdés, hogy egy adott lineáris leképezés sajátvektoraiból kiválasztható-e egy bázis. Ebben a bázisban ugyanis mátrixa – mint azt bizonyítani fogjuk – diagonális alakot ölt.

8.24. DEFINÍCIÓ (DIAGONALIZÁLHATÓSÁG). *Az $n\times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix* diagonalizálható*, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz ha létezik egy olyan diagonális $\mathbf{\Lambda}$ és egy invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy*

$$\mathbf{\Lambda}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}.\tag{8.4}$$

8.25. TÉTEL (DIAGONALIZÁLHATÓSÁG SZÜKSÉGES ÉS ELÉGSÉGES FELTÉTELE). *Az $n\times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható, azaz pontosan akkor létezik olyan $\mathbf{C}$ mátrix, melyre $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ diagonális, ha $\mathbf{A}$-nak van n lineárisan független sajátvektora. Ekkor a diagonális mátrix az $\mathbf{A}$ sajátértékeiből, $\mathbf{C}$ a sajátvektoraiból áll.*

BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{A}$ hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz van olyan $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ diagonális, akkor $\mathbf{C}$-vel balról szorozva a $\mathbf{C}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{A}\mathbf{C}$ egyenlőséget kapjuk. Ha $\mathbf{C} = [\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \dots\ \mathbf{x}_n]$ és $\mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, akkor

$$[\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \dots\ \mathbf{x}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}[\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \dots\ \mathbf{x}_n]. \tag{8.5}$$

Itt a bal oldali mátrix i-edik oszlopa $\lambda_i \mathbf{x}_i$, a jobb oldali mátrixé $\mathbf{A}\mathbf{x}_i$. Ezek megegyeznek, azaz $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$, tehát $\mathbf{x}_i$ a λ_i sajátértékhez tartozó sajátvektor. Mivel $\mathbf{C}$ invertálható, ezért oszlopvektorai függetlenek, ami bizonyítja az állításunk egyik felét. Tegyük most fel, hogy van $\mathbf{A}$-nak n független sajátvektora. Képezzünk a sajátértékekből egy $\mathbf{\Lambda}$ diagonális mátrixot, úgy hogy a $\mathbf{C}$ mátrix i-edik oszlopába kerülő $\mathbf{x}_i$ vektorhoz tartozó λ_i sajátérték a $\mathbf{\Lambda}$ mátrix i-edik oszlopába kerüljön. Mivel $\lambda_i \mathbf{x}_i = \mathbf{A}\mathbf{x}_i$, ezért fönnáll a (8.5) összefüggés, azaz $\mathbf{\Lambda}$ hasonló $\mathbf{A}$-hoz. □

► A $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ átírható

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} \tag{8.6}$$

alakba, amit az $\mathbf{A}$ mátrix *sajátfelbontásának* nevezünk.

8.26. PÉLDA (MÁTRIX DIAGONALIZÁLÁSA). *Diagonalizálható-e a 8.12. példabeli*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix?

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait meghatároztuk a 8.12. példában. Mivel $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, a hozzájuk tartozó sajátvektorok $(1,0,0)$, $(1/2,1,0)$ és $(1/2,0,1)$, és ezek a vektorok lineárisan függetlenek, ezért $\mathbf{A}$ hasonló a $\mathbf{\Lambda}$ diagonális mátrixhoz, ahol

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \frac12 & \frac12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ez könnyen igazolható a $\mathbf{C}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{A}\mathbf{C}$ összefüggés ellenőrzésével:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac12 & \frac12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac12 & \frac12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

*Bal sajátvektorok és a sajátfelbontás diadikus alakja** Az $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ egyenlet helyett vizsgálhatjuk az $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \lambda\mathbf{y}^\mathsf{T}$ egyenletet is.

Az $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \lambda\mathbf{y}^\mathsf{T}$ egyenlet $\mathbf{y}^\mathsf{T} \neq \mathbf{0}^\mathsf{T}$ feltételnek megfelelő sorvektorait az $\mathbf{A}$ mátrix *bal sajátvektorainak* nevezzük. E megfogalmazásban a sajátvektorokat szokás jobb sajátvektoroknak is nevezni.

A fenti egyenletet transzponálva kapjuk, hogy

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y},$$

vagyis a bal sajátvektorok a transzponált sajátvektorainak transzponáltjai. Mivel $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^\mathsf{T}) = \det(\mathbf{A}^\mathsf{T} - \lambda\mathbf{I})$, azaz $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ karakterisztikus polinomja azonos, ezért a bal és jobb sajátvektorokhoz tartozó sajátértékek azonosak. A bal és jobb sajátvektorok azonban általában nem azonosak (mátrixjelöléssel: nem transzponáltjai egymásnak).

Ha $\mathbf{A}$ diagonalizálható, azaz $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$, akkor a 8.25. tételhez hasonlóan a $\mathbf{\Lambda C}^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}$ mátrixegyenletből azt kapjuk, hogy $\mathbf{C}^{-1}$ sorvektorai $\mathbf{A}$ bal sajátvektorai. Jelölje ugyanis a $\mathbf{C}^{-1}$ mátrix i-edik sorvektorát $\mathbf{y}_i^\mathsf{T}$, ekkor

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{y}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n^\mathsf{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{y}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n^\mathsf{T} \end{bmatrix} \mathbf{A} \tag{8.7}$$

tehát $\lambda_i\mathbf{y}_i^\mathsf{T} = \mathbf{y}_i^\mathsf{T}\mathbf{A}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), vagyis $\mathbf{y}_i^\mathsf{T}$ valóban bal sajátvektor. Ekkor a sajátfelbontás azonnal diádok összegévé bontható:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{C\Lambda C}^{-1} &= [\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \dots\ \mathbf{x}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{y}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n^\mathsf{T} \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1\mathbf{x}_1\mathbf{y}_1^\mathsf{T} + \lambda_2\mathbf{x}_2\mathbf{y}_2^\mathsf{T} + \dots + \lambda_n\mathbf{x}_n\mathbf{y}_n^\mathsf{T} \end{aligned} \tag{8.8}$$

Ezt nevezzük a *sajátfelbontás diadikus alakjának*.

8.27. PÉLDA (SAJÁTFELBONTÁS DIADIKUS ALAKJA ÉS A BAL SAJÁTVEKTOROK). *Határozzuk meg a 8.26. és a 8.12. példában szereplő*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix bal sajátvektorait, sajátfelbontását és annak diadikus alakját.

MEGOLDÁS. A bal sajátvektorok megegyeznek a transzponált sajátvektorainak transzponáltjaival. Így a bal sajátvektorok a szokásos technikával kiszámolhatók. Ha azonban a sajátfelbontást is kiszámoljuk, a bal sajátvektorok kiolvashatók a $\mathbf{C}^{-1}$ mátrixból is. A 8.26. példában meghatároztuk a $\mathbf{C}$ mátrixot, annak inverzét kiszámolva kapjuk a sajátfelbontást:

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ebből a diádokká való átírás a következő:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

*Diagonalizálható mátrixok polinomjai és a Cayley–Hamilton-tétel** Belátjuk, hogy ha egy mátrixot behelyettesítünk saját karakterisztikus polinomjába, nullmátrixot kapunk.

Ha $p(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ egy tetszőleges polinom, akkor értelmezhető e polinomnak egy tetszőleges négyzetes mátrixban fölvett értéke, vagyis értelmezhető négyzetes mátrix polinomja a következő képlettel:

$$p(\mathbf{A}) = c_n \mathbf{A}^n + c_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + c_1 \mathbf{A} + c_0 \mathbf{I}.$$

Ha az $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható, és sajátfelbontása $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}$, akkor $\mathbf{A}^2 = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{C}^{-1}$. Hasonlóképp tetszőleges nemnegatív k egészre

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{C}^{-1}.$$

Eszerint bármely $p(x)$ polinomra $p(\mathbf{A}) = \mathbf{C}p(\mathbf{\Lambda})\mathbf{C}^{-1}$. Másrészt bármely diagonális mátrix polinomja a diagonális elemek polinomjával számolható, azaz

$$p\left(\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\right) = \operatorname{diag}\left(p(\lambda_1), p(\lambda_2), \ldots, p(\lambda_n)\right).$$

Tehát bizonyítottuk a következő állítást:

8.28. ÁLLÍTÁS (DIAGONALIZÁLHATÓ MÁTRIX POLINOMJA). *Legyen* $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}$, *ahol* $\mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, *és* $p(x)$ *egy tetszőleges polinom. Ekkor*

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & p(\lambda_n) \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-1}.$$

Jelölje most $\chi_{\mathbf{A}}$ az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomját! Tehát ha λ az $\mathbf{A}$ sajátértéke, akkor $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0$. Innen azonnal adódik, hogy $\chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, ugyanis

$$\begin{aligned}\chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) &= \mathbf{C}\,\chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{\Lambda})\,\mathbf{C}^{-1}\\ &= \mathbf{C}\,\mathrm{diag}(\chi_{\mathbf{A}}(\lambda_1), \chi_{\mathbf{A}}(\lambda_2), \dots, \chi_{\mathbf{A}}(\lambda_n))\,\mathbf{C}^{-1}\\ &= \mathbf{O}.\end{aligned}$$

Ez az állítás nem csak diagonalizálható mátrixokra igaz, hanem általánosan is. Erre azonnal mutatunk egy egyszerű, de rossz bizonyítást! Mivel a karakterisztikus polinom $\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$, gondolhatnánk, hogy akkor $\chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{I}) = \det(\mathbf{O}) = 0$. Ez azonban hibás érvelés: λ helyébe egy mátrixban mátrixokat helyettesítettünk, ráadásul a jobb oldalon skalár, a bal oldalon mátrix áll!

8.29. TÉTEL (CAYLEY–HAMILTON-TÉTEL). *Ha $\mathbf{A}$ egy tetszőleges négyzetes mátrix, melynek karakterisztikus polinomja $\chi_{\mathbf{A}}$, akkor $\chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$. Az $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja így

$$\det \mathbf{B} = \chi_{\mathbf{A}}(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + p_1\lambda + p_0. \tag{8.9}$$

$\mathbf{B}$ bármely eleméhez tartozó előjeles aldetermináns λ egy legföljebb $n-1$-edfokú polinomja, így léteznek olyan konstans elemű $\mathbf{C}_0$, $\mathbf{C}_1, \dots,$ $\mathbf{C}_{n-1}$ mátrixok, hogy

$$\mathrm{adj}\,\mathbf{B} = \lambda^{n-1}\mathbf{C}_{n-1} + \dots + \lambda\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_0. \tag{8.10}$$

A mátrix inverzéről szóló 6.30. tételbeli (6.3) képlet szerint $\det(\mathbf{B})\mathbf{I} = \mathbf{B}\,\mathrm{adj}(\mathbf{B})$. Ennek jobb oldalán elvégezzük a (8.10) szerinti behelyettesítést:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}\,\mathrm{adj}\,\mathbf{B} &= (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\left(\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k\mathbf{C}_k\right)\\ &= \mathbf{A}\mathbf{C}_0 + \left(\sum_{k=1}^{n-1}\lambda^k(\mathbf{A}\mathbf{C}_k - \mathbf{C}_{k-1})\right) - \lambda^n\mathbf{C}_{n-1}.\end{aligned}$$

Felírjuk a $\det(\mathbf{B})\mathbf{I} = \mathbf{B}\,\mathrm{adj}(\mathbf{B})$ egyenlőség bal és jobb oldalán álló együtthatók egyenlőségét, és mindegyiket beszorozzuk $\mathbf{A}$ megfelelő hatványával az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned}(-1)^n\mathbf{I} &= -\mathbf{C}_{n-1} && \cdot\,\mathbf{A}^n\\ p_{n-1}\mathbf{I} &= \mathbf{A}\mathbf{C}_{n-1} - \mathbf{C}_{n-2} && \cdot\,\mathbf{A}^{n-1}\\ &\;\;\vdots && \;\;\vdots\\ p_2\mathbf{I} &= \mathbf{A}\mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1 && \cdot\,\mathbf{A}^2\\ p_1\mathbf{I} &= \mathbf{A}\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0 && \cdot\,\mathbf{A}\\ p_0\mathbf{I} &= \mathbf{A}\mathbf{C}_0.\end{aligned}$$

A beszorzás után kapott egyenlőségeket összeadva kapjuk, hogy

$$(-1)^n \mathbf{A}^n + p_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \ldots + p_1\mathbf{A} + p_0\mathbf{I} = \mathbf{O},$$

a jobb oldalon ugyanis teleszkópösszegszerűen minden tag kiesik. Ezzel tehát bizonyítottuk, hogy $\chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$. □

Különböző sajátértékek sajátalterei A diagonalizálhatóság fontos voltára tekintettel érdemes további feltételeket gyűjteni, melyek könnyen ellenőrizhetők.

Több elégséges feltétel származtatható a következő tételből:

8.30. TÉTEL (KÜLÖNBÖZŐ SAJÁTÉRTÉKEK SAJÁTVEKTORAI). *Ha λ_1, $\lambda_2, \ldots \lambda_k$ különböző sajátértékei az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixnak, akkor a hozzájuk tartozó $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_k$ sajátvektorok lineárisan függetlenek.*

BIZONYÍTÁS. Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy e vektorok lineárisan összefüggők. Ekkor van a vektorok közt olyan, amely csak a kisebb indexűek lineáris függvénye. Legyen ezek közül a legkisebb indexű $\mathbf{x}_i$, azaz

$$\mathbf{x}_i = c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}, \tag{8.11}$$

de az i-nél kisebb indexű vektorok már lineárisan függetlenek. Szorozzuk meg az egyenlőség mindkét oldalát balról az $\mathbf{A}$ mátrixszal:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{A}(c_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}) = c_1\mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\mathbf{A}\mathbf{x}_{i-1},$$

majd használjuk ki, hogy e vektorok sajátvektorok:

$$\lambda_i\mathbf{x}_i = c_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\lambda_{i-1}\mathbf{x}_{i-1}. \tag{8.12}$$

Ezután a (8.11) egyenlet mindkét oldalát λ_i-vel szorozva kapjuk, hogy

$$\lambda_i\mathbf{x}_i = c_1\lambda_i\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}\lambda_i\mathbf{x}_{i-1}. \tag{8.13}$$

Végül a (8.13) egyenletből a (8.12) egyenletet kivonva kapjuk, hogy

$$\mathbf{0} = c_1(\lambda_i - \lambda_1)\mathbf{x}_1 + \ldots + c_{i-1}(\lambda_i - \lambda_{i-1})\mathbf{x}_{i-1},$$

Mivel az $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}$ vektorok már lineárisan függetlenek, és a $\lambda_1, \ldots, \lambda_i$ értékek különbözőek, ezért $c_1 = \cdots = c_{i-1} = 0$. Eszerint

$$\mathbf{x}_i = 0\mathbf{x}_1 + \cdots + 0\mathbf{x}_{i-1} = \mathbf{0},$$

ami ellentmondás, hisz $\mathbf{x}_i$ sajátvektor, tehát nem lehet a $\mathbf{0}$. Ez bizonyítja az indirekt feltevés helytelen voltát, azaz igazolja állításunkat. □

► Szokás úgy fogalmazni, hogy a különböző sajátértékekhez tartozó sajátalterek lineárisan függetlenek, hisz bárhogy választunk mindegyikükből egy-egy nemzérus vektort, azok lineárisan függetlenek lesznek.

► Másik fontos következménye e tételnek, hogy ha különböző sajátértékekhez tartozó sajátalterek mindegyikéből lineárisan független vektorokat választunk, akkor még ezek egyesítése is lineárisan független lesz. Ha ugyanis lineárisan összefüggnének, akkor az egy altérbe eső vektorok lineáris kombinációit összevonva egyetlen vektorrá, minden sajátértékhez egy-egy sajátvektort kapnánk, melyek összefüggők lennének, ami a fenti tételnek ellentmond.
► Speciálisan az is igaz, hogy különböző sajátértékekhez tartozó sajátalterek mindegyikéből egy bázist választva, azok egyesítése is lineárisan független vektorrendszert ad.

8.31. KÖVETKEZMÉNY (KÜLÖNBÖZŐ SAJÁTÉRTÉKEK ÉS A DIAGONALIZÁLHATÓSÁG). *Ha az n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrixnak n darab különböző sajátértéke van, akkor diagonalizálható.*

BIZONYÍTÁS. A 8.30. tétel szerint n különböző sajátértékhez n független sajátvektor tartozik, ami a 8.25. tétel szerint épp azt jelenti, hogy a mátrix diagonalizálható. □

Végezetül fölsorolunk néhány mátrixosztályt, melyekbe tartozó mátrixok mindegyike egyformán viselkedik a diagonalizálhatóságra nézve:

a) Egy valós n-edrendű mátrix nem diagonalizálható a valós mátrixok körében, ha karakterisztikus egyenletének vannak nem valós gyökei, mert a diagonalizált alakban volnának nem valós számok. Például a
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
mátrix a valósok fölött nem diagonalizálható, de a komplexek fölött igen (ld. a **??** feladatot).

b) Nem diagonalizálhatók a nilpotens mátrixok, például a
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
mátrix (**??** feladat).

c) Diagonalizálható minden szimmetrikus mátrix, sőt, sajátvektoraiból ortonormált bázis is kiválasztható. Ezt hamarosan belátjuk (9.2. tétel).

8.32. PÉLDA (DIAGONALIZÁLHATÓSÁG MEGÁLLAPÍTÁSA). *Döntsük el, hogy az alábbi mátrixok közül melyik diagonalizálható valós mátrixként!*
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}.$$

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{A}$ mátrix nilpotens, mert $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$, így nem diagonalizálható. A $\mathbf{B}$ mátrixnak vannak nem valós sajátértékei, így a valósok fölött nem diagonalizálható, de a komplexek fölött igen, mert két különböző sajátértéke van. A $\mathbf{C}$ mátrixnak különbözőek a sajátértékei, és mind valósak $(1, 4, 6)$, így diagonalizálható. A $\mathbf{D}$ mátrix szimmetrikus, tehát diagonalizálható. □

*Sajátértékek multiplicitása és a diagonalizálhatóság** A sajátértékek algebrai és geometriai multiplicitása, valamint a diagonalizálhatóság közt egyszerű, de fontos összefüggés van. Nevezetesen a geometriai multiplicitás sosem nagyobb az algebrainál, másrészt a diagonalizálhatóság ekvivalens azzal, hogy a geometriai és algebrai multiplicitások minden sajátérték esetén megegyeznek.

8.33. TÉTEL (ALGEBRAI ÉS GEOMETRIAI MULTIPLICITÁS KAPCSOLATA). *Egy mátrix valamely sajátértékének geometriai multiplicitása nem lehet nagyobb az algebrai multiplicitásánál.*

BIZONYÍTÁS. Az $\mathbf{A}$ mátrix egy μ sajátértékének geometriai multiplicitását jelölje g. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{A} - \mu\mathbf{I}$ nullterének g a dimenziója. Legyen egy bázisa $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_g\}$. Egészítsük ki e bázist az egész tér bázisává az $\mathbf{x}_{g+1}, \ldots, \mathbf{x}_n$ vektorokkal. E független vektorokból képzett $\mathbf{C} = [\mathbf{x}_1 \ \ldots \ \mathbf{x}_g | \mathbf{x}_{g+1} \ \ldots \ \mathbf{x}_n]$ mátrix invertálható. Írjuk $\mathbf{C}$-t blokkmátrix alakba: $\mathbf{X}$ legyen az első g oszlopból álló blokk, $\mathbf{Y}$ a maradék, azaz $\mathbf{C} = [\mathbf{X}|\mathbf{Y}]$. Mivel $\mathbf{X}$ oszlopai a μ-höz tartozó sajátvektorok, ezért $\mathbf{AX} = \mu\mathbf{X}$. A $\mathbf{C}^{-1}$ inverzet első g sora után bontsuk blokkokra:

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} \\ \hline \mathbf{W} \end{bmatrix}.$$

Írjuk fel az $\mathbf{I} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}$ összefüggést blokkmátrix alakban:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_g & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I}_{n-g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{ZX} & \mathbf{ZY} \\ \mathbf{WX} & \mathbf{WY} \end{bmatrix}.$$

Innen leolvasható, hogy $\mathbf{WX} = \mathbf{O}$, $\mathbf{ZY} = \mathbf{O}$, $\mathbf{ZX} = \mathbf{I}_g$, $\mathbf{WY} = \mathbf{I}_{n-g}$. Ezeket fölhasználva kapjuk, hogy

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} \\ \mathbf{W} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{ZAX} & \mathbf{ZAY} \\ \mathbf{WAX} & \mathbf{WAY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu\mathbf{I}_g & \mathbf{ZAY} \\ \mathbf{O} & \mathbf{WAY} \end{bmatrix},$$

ugyanis $\mathbf{ZAX} = \mathbf{Z}\mu\mathbf{X} = \mu\mathbf{ZX} = \mu\mathbf{I}_g$, és $\mathbf{WAX} = \mu\mathbf{WX} = \mathbf{O}$. Az így kapott mátrix karakterisztikus polinomja

$$\begin{vmatrix} \mu\mathbf{I}_g - \lambda\mathbf{I}_g & \mathbf{ZAY} \\ \mathbf{O} & \mathbf{WAY} - \lambda\mathbf{I}_{n-g} \end{vmatrix},$$

ami a 6.32. tétel szerint $(\mu - \lambda)^g \det(\mathbf{WAY} - \lambda \mathbf{I}_{n-g})$. Ez pedig azt jelenti, hogy $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$ és ezzel együtt $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomjának μ legalább g-szeres algebrai multiplicitású gyöke. □

8.34. tétel (Diagonalizálhatóság és a geometriai multiplicitás). *Egy n-edrendű négyzetes mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha a sajátértékeihez tartozó geometriai multiplicitások összege n.*

Bizonyítás. (⇒) Ha a mátrix diagonalizálható, akkor a sajátvektoraiból álló bázis elemszáma épp a geometriai multiplicitások összege, hisz egyetlen sajátvektor sem lehet két sajátaltérben.

(⇐) Ha a geometriai multiplicitások összege n, akkor minden sajátaltérből kiválasztva egy bázist, és véve ezek egyesítését, egy n sajátvektorból álló független vektorrendszert kapunk (ld. a 8.30. tétel utáni megjegyzéseket). Így tehát a mátrix diagonalizálható. □

► A tétel lineáris leképezésekre is kimondható: az $A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ lineáris leképezés pontosan akkor diagonalizálható, ha sajátalterei dimenziójának összege n.

8.35. példa (Lineáris transzformáció diagonalizálása). *Az alábbi lineáris leképezésekhez keressünk – pusztán geometriai szemléletünkre hagyatkozva – olyan bázist, melyben a mátrixuk diagonális. Használjuk fel a 8.22. példa eredményeit.*

a) a sík vektorainak tükrözése egy egyenesre (vagy pontjainak tükrözése egy origón átmenő egyenesre);

b) a sík vektorainak merőleges vetítése egy egyenesre (vagy pontjainak merőleges vetítése egy origón átmenő egyenesre);

c) a tér vektorainak elforgatása egy egyenes körül a π egész számú többszörösétől különböző szöggel;

d) a tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra;

e) a tér vektorainak tükrözése egy síkra.

Megoldás. A 8.22. példában meghatároztuk e leképezések sajátaltereit. Ezeket használjuk a következőkben.

a) Az egyenes – melyre tükrözünk – egyik irányvektora legyen $\mathbf{a}$, egy rá merőleges nemnulla vektor legyen $\mathbf{b}$. Ekkor $T\mathbf{a} = \mathbf{a}$ és $T\mathbf{b} = -\mathbf{b}$, ahol T a tükröző lineáris leképezés. Ennek az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázisban a mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Az egyenes – melyre vetítünk – egyik irányvektora legyen $\mathbf{a}$, egy rá merőleges nemnulla vektor legyen $\mathbf{b}$. Ekkor $P\mathbf{a} = \mathbf{a}$ és $P\mathbf{b} = \mathbf{0}$, ahol P a vetítő lineáris leképezés. Ennek az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázisban a mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) E leképezésnek nincs valós diagonális mátrixa, mert csak egyetlen valós sajátaltere van, és az csak 1-dimenziós: ez a tengely irányvektora által kifeszített altér. A forgástengelyre merőleges sík ugyan nem saját-altér, de a forgatás önmagába viszi (az ilyet nevezik *invariáns altérnek*), így ennek bázisával egy „diagonálishoz közeli” alakot kaphatunk. Ha a forgás tengelyének egy irányvektora $\mathbf{a}$, a rá merőleges sík egy ortonormált bázisa $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, ahol a $\mathbf{b}$ vektor $\pi/2$ radiánnal való elforgatottja épp $\mathbf{c}$, akkor az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ bázisban a forgató F leképezés mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

ugyanis $F\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $F\mathbf{b} = \cos\alpha\mathbf{b} + \sin\alpha\mathbf{c}$, $F\mathbf{c} = -\sin\alpha\mathbf{b} + \cos\alpha\mathbf{c}$.

d) A sík, melyre vetítünk az 1 sajátértékhez tartozik. Ha ebben választunk egy $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázist, és $\mathbf{c}$ egy a síkra merőleges nemzérus vektor, akkor $T\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $T\mathbf{b} = \mathbf{b}$, $T\mathbf{c} = \mathbf{0}$, így T mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

e) A sík, melyre tükrözünk az 1 sajátértékhez tartozik. Ha ebben választunk egy $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázist, és $\mathbf{c}$ egy a síkra merőleges nemzérus vektor, akkor $T\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $T\mathbf{b} = \mathbf{b}$, $T\mathbf{c} = -\mathbf{c}$, így T mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

□

*Diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontása** A diagonalizálható $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{A} = \mathbf{C}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}$ alakja egy hasznos felbontását, az ún. spektrálfelbontását adja a mátrixnak.

Legyen $\mathbf{A}$ spektruma $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$. Bontsuk fel a $\boldsymbol{\Lambda}$ mátrixot blokkdiagonális alakra úgy, hogy az azonos sajátértékek egy blokkba kerüljenek, majd ennek megfelelően bontsuk fel a $\mathbf{C}$ és $\mathbf{C}^{-1}$ mátrixot is blokkokra a következők szerint:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{I} & \mathbf{O} & \ldots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \lambda_2\mathbf{I} & \ldots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \ldots & \lambda_k\mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \ldots & \mathbf{X}_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{Y}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_k^\mathsf{T} \end{bmatrix}.$$

Írjuk föl e mátrixokkal az $\mathbf{A} = \mathbf{C}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{C}^{-1}$ felbontást, majd fejtsük ki a blokkműveleteket:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} = \mathbf{C}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} &= \begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2 & \dots & \mathbf{X}_k\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\lambda_1\mathbf{I} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \lambda_2\mathbf{I} & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \lambda_k\mathbf{I}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathbf{Y}_1^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{Y}_2^{\mathsf{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_k^{\mathsf{T}}\end{bmatrix} \\ &= \lambda_1\mathbf{X}_1\mathbf{Y}_1^{\mathsf{T}} + \lambda_2\mathbf{X}_2\mathbf{Y}_2^{\mathsf{T}} + \dots + \lambda_k\mathbf{X}_k\mathbf{Y}_k^{\mathsf{T}} \\ &= \lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2 + \dots + \lambda_k\mathbf{P}_k,\end{aligned}$$

ahol $\mathbf{P}_i = \mathbf{X}_i\mathbf{Y}_i^{\mathsf{T}}$ a λ_i sajátértékhez tartozó mátrix, melyről a következőket fogjuk megmutatni:

8.36. állítás (Diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontása). *Minden $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ spektrumú diagonalizálható* $\mathbf{A}$ *mátrix felírható*

$$\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{P}_1 + \lambda_2\mathbf{P}_2 + \dots + \lambda_k\mathbf{P}_k$$

alakban, ahol

a) $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_k = \mathbf{I}$,

b) $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j = \mathbf{O}$, *ha* $i \neq j$,

c) $\mathbf{P}_i$ *az* $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})$ *sajátaltérre való* $\mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})$ *altér menti vetítés.*

► Valójában több is igaz, nevezetesen megmutatható, hogy a fenti három feltétel szükséges és elégséges feltétele annak, hogy $\mathbf{A}$ diagonalizálható legyen. E tételt a diagonalizálható mátrixok spektráltételének is nevezik.

Bizonyítás. A fent konstruált felbontásról megmutatjuk, hogy eleget tesz a feltételeknek.

a) A $\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{I}$ egyenlőséget blokkmátrixokként kezelve és fölhasználva a $\mathbf{P}_i = \mathbf{X}_i\mathbf{Y}_i^{\mathsf{T}}$ egyenlőségeket kapjuk, hogy $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_k = \mathbf{I}$.

b) A $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{I}$ egyenlőség blokkmátrixalakja viszont az $\mathbf{Y}_i^{\mathsf{T}}\mathbf{X}_i = \mathbf{I}$, és az $\mathbf{Y}_i^{\mathsf{T}}\mathbf{X}_j = \mathbf{O}$ ($i \neq j$) egyenlőségre vezet, ahonnan $\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j = \mathbf{X}_i\mathbf{Y}_i^{\mathsf{T}}\mathbf{X}_j\mathbf{Y}_j^{\mathsf{T}} = \mathbf{O}$.

c) Az előzőekből adódik, hogy $\mathbf{P}_i^2 = \mathbf{P}_i$, ugyanis $\mathbf{P}_i^2 = \mathbf{X}_i(\mathbf{Y}_i^{\mathsf{T}}\mathbf{X}_i)\mathbf{Y}_i^{\mathsf{T}} = \mathbf{X}_i\mathbf{Y}_i^{\mathsf{T}} = \mathbf{P}_i$. Eszerint tehát $\mathbf{P}_i$ vetítés. Meg kell még mutatnunk, hogy $\mathcal{O}(\mathbf{P}_i) = \mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})$. Ehhez fölhasználjuk, hogy bármely két $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ mátrixra $\mathcal{O}(\mathbf{X}\mathbf{Y}) \subseteq \mathcal{O}(\mathbf{X})$.

$$\mathcal{O}(\mathbf{P}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{X}_i\mathbf{Y}_i^{\mathsf{T}}) \subseteq \mathcal{O}(\mathbf{X}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{X}_i\mathbf{Y}_i^{\mathsf{T}}\mathbf{X}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{P}_i\mathbf{X}_i) \subseteq \mathcal{O}(\mathbf{P}_i).$$

Tehát mindenütt egyenlőség áll fenn, és $\mathcal{O}(\mathbf{P}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{X}_i) = \mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})$, hiszen $\mathcal{O}(\mathbf{X}_i)$ a λ_i-hez tartozó sajátaltér. Végül megmutatjuk, hogy a vetítés nulltere $\mathcal{N}(\mathbf{P}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})$. Kihasználva a fönt bizonyítottakat kapjuk, hogy

$$\mathbf{P}_i(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}) = \mathbf{P}_i\left(\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\mathbf{P}_j - \lambda_i\sum_{j=1}^{k}\mathbf{P}_j\right) = \sum_{j=1}^{k}(\lambda_j - \lambda_i)\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j = \mathbf{O}.$$

Eszerint $\mathcal{O}(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}) \subseteq \mathcal{N}(\mathbf{P}_i)$. Másrészt $\mathcal{N}(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}) = \mathcal{O}(\mathbf{P}_i)$, így a dimenziótétel miatt $\dim\mathcal{O}(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}) = \dim\mathcal{N}(\mathbf{P}_i)$, ami bizonyítja, hogy $\mathcal{N}(\mathbf{P}_i) = \mathcal{O}(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})$. □

8.37. PÉLDA (SPEKTRÁLFELBONTÁS). *Határozzuk meg a 8.12., a 8.26. és a 8.27. példákban szereplő*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix spektrálfelbontását.

MEGOLDÁS. E felbontáshoz felhasználhatjuk a 8.27. példában már kiszámolt sajátfelbontás diadikus alakját összevonva az azonos sajátértékhez tartozó diádokat, de kiemelve a sajátértéket:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= 0 \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Tehát

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{I}$, $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{O}$, e két mátrix valóban vetítő mátrix, hisz $\mathbf{P}_1^2 = \mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2^2 = \mathbf{P}_2$, és láthatóan a sajátalterekre vetítenek (ld. 8.12.). □

Sajátalterek direkt összege Eddigi eredményeinket úgy foglalhatjuk össze, hogy egy n-edrendű valós négyzetes mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha $\mathbb{R}^n$ minden nem zérus vektora egyértelműen felbomlik sajátvektorok összegére.

Az $\mathbb{R}^n$ teret többször is felbontottuk két altér direkt összegére. Most általánosítjuk a direkt összeg fogalmát.

8.38. DEFINÍCIÓ (ALTEREK DIREKT ÖSSZEGE). *Legyenek $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$,..., $\mathcal{V}_k$ a $\mathcal{V}$ vektortér alterei. Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{V}$ tér a $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$,..., $\mathcal{V}_k$ alterek* direkt összege *– jelölésben $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{V}_k$ –, ha $\mathcal{V}$ minden vektora egyértelműen felbomlik egy $\mathcal{V}_1$-, egy $\mathcal{V}_2$-... és egy $\mathcal{V}_k$-beli vektor összegére.*

A két altér direkt összegére kimondott és bizonyított 7.41. tétel természetes módon átvihető több altér összegére is.

8.39. TÉTEL (A DIREKT ÖSSZEG TULAJDONSÁGAI). *Legyenek* $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2, \ldots$, $\mathcal{V}_k$ *az n-dimenziós* $\mathcal{V}$ *vektortér alterei. Az alábbi állítások ekvivalensek:*

a) $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{V}_k$,

b) $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots, \mathcal{V}_k$ *alterek egy-egy bázisának egyesítése a* $\mathcal{V}$ *bázisát adja,*

c) Mindegyik altér metszete a többi összegével csak a nullvektorból áll, és az alterek összege az egész tér, azaz

1. $\mathcal{V}_i \cap \left(\sum_{j\neq i} \mathcal{V}_j\right) = \{\mathbf{0}\}$, *és*
2. $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 + \ldots + \mathcal{V}_k$.

► Az $\mathbb{R}^3$ tér standard bázisvektorai által generált 1-dimenziós alterek legyenek $\mathcal{V}_1 = \operatorname{span}(\mathbf{i})$, $\mathcal{V}_2 = \operatorname{span}(\mathbf{j})$ és $\mathcal{V}_3 = \operatorname{span}(\mathbf{k})$. Ekkor $\mathbb{R}^3 = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \mathcal{V}_3$.

► A tétel *c)* pontjában *nem elég* annyit kikötni, hogy $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \{\mathbf{0}\}$ legyen bármely $i \neq j$ esetén! Például legyen $\mathbb{R}^2$-ben $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ két független vektor és $\mathcal{V}_1 = \operatorname{span}(\mathbf{a})$, $\mathcal{V}_2 = \operatorname{span}(\mathbf{b})$ és $\mathcal{V}_3 = \operatorname{span}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$. Ekkor e három altér páronkénti metszetei csak a zérusvektorból állnak, de $\mathbb{R}^2 \neq \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \mathcal{V}_3$, ugyanis $\mathbb{R}^2$ vektorai több különböző módon is felbomlanak e három altérbe eső vektor összegére. Például $\mathbf{0} + \mathbf{0} + (\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{0}$.

► A 3-dimenziós tér egy síkjára való tükrözés sajátalterei a sík, melyre tükrözünk (ez a $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó altér) és a síkra merőleges egyenes (mely a $\lambda = -1$ sajátértékhez tartozik). $\mathbb{R}^3$ e két altér direkt összege, mivel $\mathbb{R}^3$ minden vektora egyértelműen felbomlik egy síkba eső és egy rá merőleges vektor összegére.

A fentiek alapján diagonalizálható mátrixok spektrálfelbontásáról szóló tétel egy gyönyörű megfogalmazáshoz vezet:

8.40. TÉTEL (DIAGONALIZÁLHATÓ MÁTRIXOK SAJÁTALTEREI). *Az* $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ *mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha* $\mathbb{F}^n$ *előáll az* $\mathbf{A}$ *sajátaltereinek direkt összegeként.*

BIZONYÍTÁS. Ha $\mathbf{A}$ diagonalizálható, akkor létezik sajátvektoraiból álló bázis, mely a sajátalterek bázisainak egyesítése, tehát a 8.39. tétel *b)* pontja szerint $\mathbf{A}$ előáll sajátaltereinek direkt összegeként.

Ha $\mathbb{F}^n$ előáll $\mathbf{A}$ sajátaltereinek direkt összegeként, akkor a sajátalterek dimenzióinak összege n, azaz a geometriai multiplicitások összege n, így az $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható. □

► A tétel nem csak mátrixokra, de lineáris leképezésekre is kimondható: egy $L : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ lineáris leképezés pontosan akkor diagonalizálható, ha $\mathbb{F}^n$ felbomlik L sajátaltereinek direkt összegére.

► A 3-dimenziós térben szemléltető példák a síkra való tükrözés, a síkra való vetítés, az egyenesre való tükrözés és az egyenesre való vetítés. Mindhárom példában $\mathbb{R}^3$ egy 2- és egy 1-dimenziós altér direkt összegére bomlik.

► A valós 3-dimenziós tér egy egyenese körüli α szögű ($\alpha \neq k\pi$) elforgatás nem diagonalizálható, bár látjuk, hogy a forgatás tengelye és a forgatás közben helyben maradó sík két olyan altér, melyek direkt összege az egész tér.

Feladatok

A sajátérték kiszámítása

A sajátértékek karakterisztikus polinomból való kiszámítása igen számításigényes módszer. A sajátértékek becslésére, közelítésére használt – többnyire iteratív technikákat használó – algoritmusok sokkal hatékonyabbak. Ráadásul az ezekben használt elvek nem csak a numerikus számítások szempontjából fontosak.

Gersgorin-körök Egy mátrix elemeiből nagyon egyszerű számításokkal becslések adhatók a sajátértékekre. A komplex számsík Gersgorin-körei például tartalmazzák az összes sajátértéket.

E körök Szemjon Aranovics Gersgorin orosz matematikus nevét viselik, mely a ciril betűkről való átírás miatt többféle alakban is előfordul, például Gershgorin, Gerschgorin, Geršgorin.

Az $n \times n$-es valós vagy komplex $\mathbf{A}$ mátrix Gersgorin-körein az a_{ii} középű, és r_i^{sor} sugarú G_i^{sor}, illetve r_i^{osz} sugarú G_i^{osz} köröket értjük ($i = 1, 2, \dots, n$), ahol

$$r_i^{\text{sor}} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad r_i^{\text{osz}} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ji}|. \tag{8.14}$$

Más szavakkal pl. a G_i^{sor} kör középpontja a_{ii}, sugara az $\mathbf{A}$ mátrix i-edik sorában lévő, nem a főátlón lévő elemek abszolút értékeinek összege, míg G_i^{osz} sugara az i-edik oszlop nem a főátlón lévő elemei abszolút értékének összege.

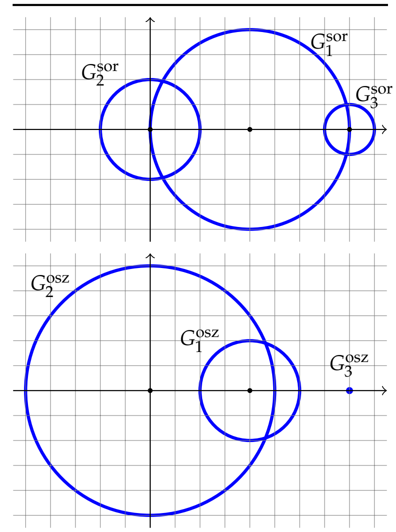
kör	közép-pont	sugár
G_1^{sor}	$a_{11} = 4$	$r_1^{\text{sor}} = \|-4\| = 4$
G_2^{sor}	$a_{22} = 0$	$r_2^{\text{sor}} = 2$
G_3^{sor}	$a_{33} = 8$	$r_3^{\text{sor}} = 1$
G_1^{osz}	$a_{11} = 4$	$r_1^{\text{osz}} = 2$
G_2^{osz}	$a_{22} = 0$	$r_2^{\text{osz}} = \|-4\| + \|1\| = 5$
G_3^{osz}	$a_{33} = 8$	$r_3^{\text{osz}} = 0$

8.41. PÉLDA (GERSGORIN-KÖRÖK). *Rajzoljuk föl a*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

mátrix Gersgorin köreit!

A megoldás a 8.3 ábrán látható.



8.3. ábra: Az $\mathbf{A}$ mátrix Gersgorin körei

8.42. TÉTEL (GERSGORIN-KÖRÖK TULAJDONSÁGAI). *Legyen* $\mathbf{A}$ *valós vagy komplex $n \times n$-es mátrix. Ekkor igazak a következők:*

a) Minden sajátérték benne van a G_i^{sor} körök egyesítésében.

b) Minden sajátérték benne van a G_i^{osz} körök egyesítésében.

c) Minden sajátérték benne van az előző két halmaz metszetében.

d) Ha a G_i^{sor} körök egy k-elemű részhalmaza diszjunkt a maradék $n - k$ kör mindegyikétől, akkor uniójuk multiplicitással számolva pontosan k sajátértéket tartalmaz.

BIZONYÍTÁS. Jelölje $\sigma(\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ mátrix spektrumát!

a) Az állítás szerint $\sigma(\mathbf{A}) \subseteq \bigcup_i G_i^{\text{sor}}$. A λ sajátértékhez tartozó egyik sajátvektort osszuk el legnagyobb abszolút értékű koordinátájával. E vektort jelölje $\mathbf{x}$, legyen $x_i = 1$, tehát $|x_j| \le 1$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Mivel $\lambda = \lambda x_i = [\lambda \mathbf{x}]_i = [\mathbf{A}\mathbf{x}]_i = \sum_j a_{ij} x_j$, így $\lambda - a_{ii} = \sum_{j \ne i} a_{ij} x_j$, tehát

$$|\lambda - a_{ii}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} a_{ij} x_j \right| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}||x_j| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}| = r_i^{\text{sor}}.$$

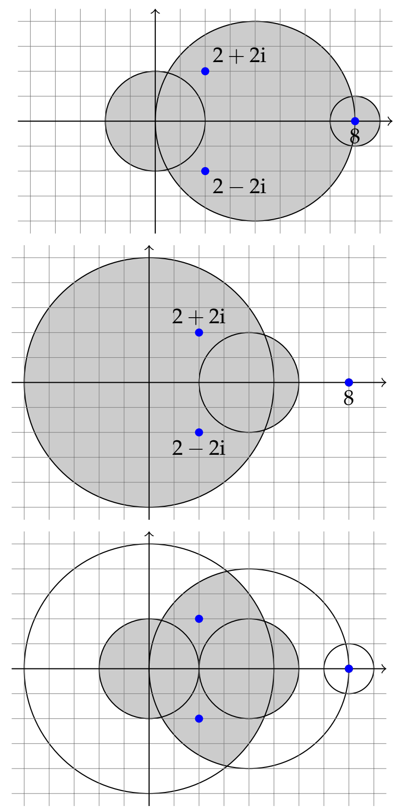
b) Mivel $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ sajátértékei megegyeznek, ezért sorok helyett oszlopokkal ugyanezek a számítások megismételhetők.

c) A sajátértékek az előző két pontban megadott halmazok mindegyikében, így metszetükben is benne vannak.

d) Legyen $\mathbf{B}(r)$ az a mátrix, melynek elemeire $b_{ii} = a_{ii}$ és $b_{ij} = r a_{ij}$, ha $i \ne j$. Mátrixműveletekkel kifejezve

$$\mathbf{B}(r) = r\mathbf{A} + (1 - r)\,\mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn}).$$

Eszerint $\mathbf{B}(0) = \mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$, $\mathbf{B}(1) = \mathbf{A}$. Változzék r folyamatosan 0-tól 1-ig. Eközben $\mathbf{B}(r)$ Gersgorin-körei 0-sugarúból indulva nőnek az $\mathbf{A}$ Gersgorin-köreiig, középpontjaik közben nem változnak. Mivel a sajátértékek a mátrix elemeinek folytonos függvényei, ezért az egymással fedésbe kerülő, de a többitől diszjunkt maradó k számú kör által lefedett sajátértékek száma k marad. □



8.4. ábra: Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékeit tartalmazza *a)* a sorösszeg szerinti halmaz, *b)* az oszlopösszeg szerinti halmaz, *c)* a két halmaz metszete

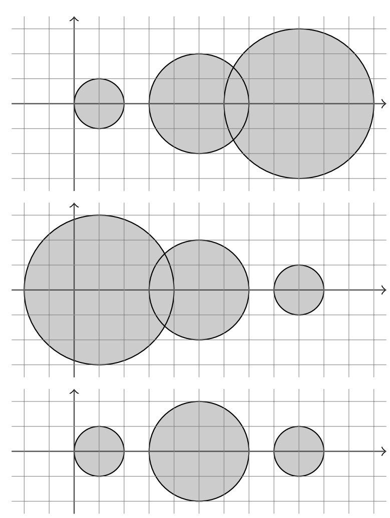
► Az nem igaz, hogy mindegyik Gersgorin-körben van legalább egy sajátérték. Például az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix sajátértékei $1 + \mathrm{i}$ és $1 - \mathrm{i}$. Ezek nem esnek bele sem a 0-közepű, 1-sugarú sem a 2 közepű 1-sugarú Gersgorin-körbe (ld. 8.4 *a)*, *b)* ábra).

► Az előző megjegyzésnek megfelelően nem lehet úgy keresni a sajátértékeket, hogy minden főátlóbeli elemhez a sor- és oszlopösszegek közül a kisebbiket választjuk. Helyesen a tétel *a)* és *b)* pontjaiban konstruált halmazok metszetét kell venni, ami például esetünkben a 8.4 *c)* ábrán látható.

8.43. PÉLDA (GERSGORIN-KÖRÖK HASZNÁLATA). *Mutassuk meg a Gersgorin-körök segítségével, hogy a*

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

mátrixnak minden sajátértéke valós.



8.5. ábra: A $\mathbf{B}$ mátrix sorösszeg és oszlopösszeg szerinti Gersgorin körei és ezek metszete. Utóbbi mutatja, hogy $\mathbf{B}$-nek három valós sajátértéke van.

MEGOLDÁS. Mivel valós elemű mátrix komplex gyökei párosával egymás konjugáltjai, ezért ha egy Gersgorin-kör diszjunkt a többitől, abban csak egy valós sajátérték lehet. A $\mathbf{B}$ mátrix sorok szerinti Gersgorin-körei azt mutatják, hogy az 1-közepű 1-sugarú körben egy valós sajátérték van. Mivel a másik két kör metszi egymást, ezért a másik két sajátérték még lehetne nem valós. Az oszlopok szerinti 9-középű 1-sugarú Geschgorin-kör viszont egy újabb valós sajátértéket garantál, így a harmadik is szükségképpen az. Ezt mutatja a sorok és oszlopok szerinti halmazok metszete is. A sajátértékek a $[0,2]$, $[3,7]$ és $[8,10]$ intervallumokba esnek (ld. 8.5 ábra). □

8.44. ÁLLÍTÁS (DOMINÁNS FŐÁTLÓJÚ MÁTRIX INVERTÁLHATÓSÁGA). *Bármely soronként domináns főátlójú valós vagy komplex mátrix invertálható. Hasonló igaz az oszloponként domináns főátlójú mátrixokra is.*

BIZONYÍTÁS. A 2.55. definíció szerint az $\mathbf{A}$ mátrix soronként domináns főátlójú, ha bármely főátlóbeli elemére $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Ez épp azt jelenti, hogy $\mathbf{A}$ minden Gersgorin-körének középpontja messzebb van az origótól, mint amekkora a sugara, azaz a 0 szám egyik Gersgorin-körben sincs benne, tehát a 0 nem sajátérték, így $\mathbf{A}$ invertálható. □

Hatványmódszer A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei, a négynél magasabb fokú polinomokra viszont nem létezik megoldóképlet, így elvileg sem létezhet olyan módszer, mely a sajátértékeket mindig pontosan ki tudja számolni. A sajátértékek teszőlegesen pontos közelítésére viszont hatékony algoritmusok lézteznek. Ezek legalapvetőbbike a hatványmódszer.

Négyzetes mátrix egy sajátértékét *szigorúan dominánsnak* nevezzük, ha egyszeres multiplicitású, és abszolút értékben nagyobb az összes többinél. A hozzá tartozó sajátvektort és sajátalteret *szigorúan domináns sajátvektornak, ill. sajátaltérnek*, a belőlük alkotott párt *szigorúan domináns sajátpárnak* nevezzük.

A *hatványmódszer* megadja négyzetes mátrix szigorúan domináns sajátpárját.

Tegyük fel, hogy az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak λ_1 szigorúan domináns sajátértéke. Összes sajátértékét indexeljük úgy, hogy fennálljon az

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_m|$$

összefüggés. Legyen $\mathbf{v}_i$ egy λ_i-hez tartozó sajátvektor. Világos, hogy λ_1 valós, egyébként $\bar{\lambda_1}$ egy tőle különböző, de azonos abszolút értékű sajátérték lenne.

Legyen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ egy olyan vektor, mely előáll a sajátvektorok lineáris kombinációjaként. Ha $\mathbf{A}$ diagonalizálható, akkor minden vektor ilyen. Legyen tehát $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m$. Ekkor tetszőleges k nemnegatív egészre

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^k\mathbf{x} &= c_1\mathbf{A}^k\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{A}^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{A}^k\mathbf{v}_m \\ &= c_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\lambda_m^k\mathbf{v}_m. \end{aligned}$$

Ekkor λ_1^k-val való osztás után $k \to \infty$ esetén

$$\frac{1}{\lambda_1^k}\mathbf{A}^k\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^k \mathbf{v}_m \to c_1\mathbf{v}_1,$$

ugyanis $(\lambda_i/\lambda_1)^k \to 0$, ha $i > 1$. Eszerint ha $c_1 \neq 0$, akkor $\mathbf{A}^k\mathbf{x}$ iránya tart a domináns sajátvektor irányához. Ezt egy példán szemléltetjük.

8.45. PÉLDA. *Tekintsük az*

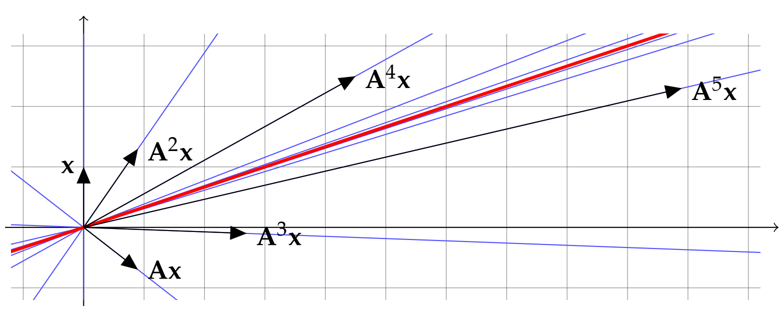
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.7 & 0.9 \\ 0.9 & -0.7 \end{bmatrix}$$

mátrixot! Határozzuk meg domináns sajátértékét és sajátalterét! Legyen $\mathbf{x} = (0, 1)$. *Számítsuk ki az* $\mathbf{A}^k\mathbf{x}$ *vektorokat néhány k értékre szemléltetve irányuknak a domináns sajátvektor irányához való tartását!*

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja $\det(\mathbf{A} - x\mathbf{I}) = x^2 - x - 2$, ennek gyökei $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, így a szigorúan domináns sajátérték $\lambda_1 = 2$. A hozzá tartozó sajátalteret a $(3, 1)$ vektor feszíti ki. Egy programmal kiszámoltuk az $\mathbf{A}^k\mathbf{x}$ vektorokat a $k = 0, 1, \ldots, 8$ értékekre:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbf{A}^k\mathbf{x}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.9 \\ -0.7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.9 \\ 1.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.7 \\ -0.1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9.9 \\ 2.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 18.9 \\ 7.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 38.7 \\ 11.9 \end{bmatrix}$

A vektorok hossza láthatóan végtelenhez konvergál, de az általuk kifeszített altereknek a domináns sajátaltérhez való tartása így is jól leolvasható a 8.6 ábráról.

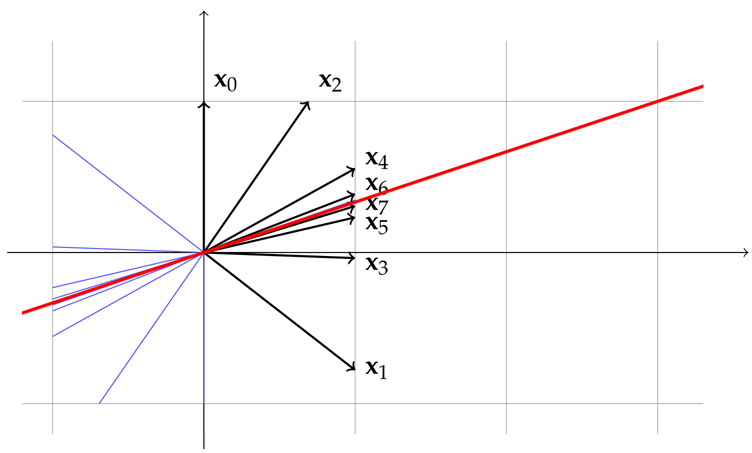


8.6. ábra: Az $\mathbf{A}^k\mathbf{x}$ vektorok ($k = 0, 1, \ldots, 5$) jelölt irányaik, valamint ezek határértéke: az $\mathbf{A}$ mátrix $\lambda = 2$ sajátértékhez tartozó sajátaltere (pirossal színezve).

Ha a domináns sajátérték abszolút értéke kisebb lenne 1-nél, akkor az $\mathbf{A}^k\mathbf{x}$ vektorsorozat a nullvektorhoz konvergálna. Ezért érdemes e sorozatot normálni, például osztani a hosszával. Még egyszerűbb elosztani a vektort a legnagyobb abszolút értékű koordinátájával. (Az így kapott vektorsorozat nem biztos, hogy konvergens lesz. Lehet, hogy pl. egy-egy koordinátahelyen alternáló divergens sorozatot kapunk. Ez elkerülhető, ha valamelyik nem nullához konvergáló koordináta előjelét egy esetleges -1-gyel szorzással mindig pozitívvá tesszük.) Jelölje $\mathbf{x}_k$ az $\mathbf{A}^k\mathbf{x}$ vektor legnagyobb koordinátájával való osztása után kapott vektort, és jelölje i ennek a koordinátának az indexét. Tehát $[\mathbf{x}_k]_i = 1$. Az alábbi táblázat az $\mathbf{x}_k$ és az $[\mathbf{A}\mathbf{x}_k]_i$ értékeket mutatja (utóbbi azt adja meg, hogy az 1 értékű koordináta hányszorosára változik az $\mathbf{A}$-val való szorzás után):

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1.000\\-0.778\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.692\\1.000\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1.000\\-0.037\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1.000\\0.556\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1.000\\0.232\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1.000\\0.386\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1.000\\0.307\end{bmatrix}$
$[\mathbf{A}\mathbf{x}_k]_i$		-0.700	1.000	-0.769	1.667	2.200	1.909	2.047

Az $\mathbf{x}_k$ vektorokat szemlélteti a 8.7 ábra. Sorozatuk határértéke az $(1, 1/3)$ vektor, ami a domináns sajátvektor. Általánosan is igaz,



8.7. ábra: Az $\mathbf{x}_k$ vektorok és a sajátaltér.

hogy az így kapott $\mathbf{x}_k$ sorozat elemei a szigorúan domináns sajátvektor becslését adják. Egyúttal a domináns sajátérték becslésére is kiadódik. Könnyen bizonyítható ugyanis, hogy ha $\mathbf{x}_k$ i-edik koordinátája 1, akkor $\mathbf{A}\mathbf{x}_k$ i-edik koordinátája a λ_1 egy becslését adja, pontosabban e sorozat határértéke λ_1. E konkrét példában a fenti táblázat alsó sora épp ezt a sorozatot tartalmazza, mely a $\lambda_1 = 2$ értékhez konvergál. □

8.46. TÉTEL (HATVÁNYMÓDSZER). *Ha λ_1 az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix szigorúan domináns sajátértéke, akkor létezik olyan $\mathbf{x}_0$ vektor, hogy az $\mathbf{A}^k\mathbf{x}_0$ vektorok által kifeszített alterek sorozata a domináns sajátaltérhez konvergál.*

E tételt fentebb bizonyítottuk abban a speciális esetben, amikor $\mathbf{x}_0$ a sajátvektorok lineáris kombinációja. Valójában elég csak azt kikötni, hogy az $\mathbf{x}_0$ vektornak a domináns sajátvektor irányába eső összetevője ne a zérusvektor legyen.

Feladatok

Gersgorin-körök

8.3. Mutassuk meg, hogy az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

mátrixnak legalább két sajátértéke valós.

8.4. Mutassuk meg, hogy az alábbi mátrixok minden sajátértéke valós! *a)* $\begin{bmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Megoldások

8.2. Karakterisztikus polinomja $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$, azaz $\lambda = -1$ háromszoros algebrai multiplicitású sajátérték. A sajátalteret az $(1, 2, 5)$ vektor feszíti ki, azaz a geometriai multiplicitás 1. $1 \neq 3$, így a mátrix nem diagonalizálható.

8.3. A 9-közepű 1-sugarú Gersgorin-körben csak 1 gyök lehet, így az valós. Mivel összesen 4 gyöke van és a komplexek párosan fordulnak elő, ezért kell még valós gyöknek lennie.

8.4. *a)* A sorokhoz tartozó Gersgorin-körök közül az 1-közepű, 1-sugarú kör diszjunkt a többitől, így ebben a körben egy van egy valós sajátérték, az oszlopokhoz tartozók közül a 9-közepű, 1-sugarú diszjunkt a többitől, így ebben a körben is van egy valós sajátérték, és ha két sajátérték valós, akkor a harmadik is. Az *a)*-beli mátrixban a sorokra, a *b)*-beliben az oszlopokra alkalmazva

9
Diagonalizálás ortonormált bázisban

Számtalan műszaki és tudományos probléma valós szimmetrikus mátrixok vizsgálatára vezet. Ezek szerencsés esetek, mert ilyenkor sajátvektorokból álló ortonormált bázis is található, és ez sok számítást egyszerűvé és numerikusan is stabilabbá tesz. A szimmetrikus mátrixok használatát a kvadratikus alakok jeírásán demonstráljuk.

Ortogonális és unitér diagonalizálás

Egy mátrixot diagonalizálni azzal ekvivalens, hogy a hozzá tartozó mátrixleképezéshez egy olyan bázist találni, melyben mátrixa diagonális. Különösen szerencsés, ha e bázis még ortonormált is.

Valós mátrixok ortogonális diagonalizálása, valós spektráltétel Megmutatjuk, hogy a valós mátrixok közt pontosan a szimmetrikusak azok, amelyekhez található olyan ortonormált bázis, melyben az diagonális alakot ölt.

A 8.25. tétel szerint a diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltétele, hogy létezzék a mátrix rendjével egyező számú független sajátvektora. Ha e vektorok ortonormált rendszert alkotnak, akkor a belőlük alkotott mátrix ortogonális mátrix.

9.1. DEFINÍCIÓ (ORTOGONÁLIS DIAGONALIZÁLHATÓSÁG). *Az* $\mathbf{A}$ *mátrix* ortogonálisan diagonalizálható*, ha találunk egy ortogonális* $\mathbf{Q}$ *és egy diagonális* $\mathbf{\Lambda}$ *mátrixot, hogy* $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$.

► A definícióbeli egyenlőséggel ekvivalens alak: $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^\mathsf{T}$.

► Az nyilvánvaló, hogy ha egy mátrix ortogonálisan diagonalizálható, akkor szimmetrikus, ha ugyanis $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^\mathsf{T}$, akkor

$$\mathbf{A}^\mathsf{T} = (\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = (\mathbf{Q}^\mathsf{T})^\mathsf{T}\mathbf{\Lambda}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{A}.$$

E fejezet fő célja az állítás megfordításának igazolása. Ennek érdekében először megmutatjuk, hogy szimmetrikus mátrix sajátalterei nem csak függetlenek egymástól, de merőlegesek is egymásra.

9.2. TÉTEL (SZIMMETRIKUS MÁTRIX SAJÁTALTEREI). *Szimmetrikus mátrix bármely két különböző sajátaltere merőleges egymásra.*

BIZONYÍTÁS. Két különböző sajátaltér két különböző sajátértékhez tartozik. Megmutatjuk, hogy az egyik altér bármelyik vektora merőleges a másik altér bármely vektorára. Legyen tehát $(\lambda, \mathbf{x})$ és $(\mu, \mathbf{y})$ két sajátpár, ahol $\lambda \neq \mu$ két különböző sajátértéke $\mathbf{A}$-nak. Így $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ és $\mathbf{Ay} = \mu\mathbf{y}$. Ebből adódik, hogy

$$\lambda(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{x})^\mathsf{T}\mathbf{y} = (\mathbf{Ax})^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{Ay} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mu\mathbf{y} = \mu(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{y}).$$

Eszerint $(\lambda - \mu)(\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{y}) = 0$, de $\lambda - \mu \neq 0$, ezért $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$, azaz a két vektor merőleges egymásra. □

9.3. TÉTEL (VALÓS SPEKTRÁLTÉTEL). *A valós* $\mathbf{A}$ *mátrix pontosan akkor diagonalizálható ortogonálisan, ha szimmetrikus.*

BIZONYÍTÁS. Az állítás egyik felét megmutattuk a 9.1. definíció után. A másik felét az $\mathbf{A}$ mátrix rendjére vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. $n = 1$ esetén nincs mit bizonyítani, ekkor $\mathbf{A}$ szimmetrikus és diagonális alakú. Tegyük fel, hogy minden legföljebb $n-1$-edrendű mátrixra igaz az állítás, azaz hogy ha szimmetrikus, akkor ortogonálisan hasonló egy diagonális mátrixhoz. Mivel $\mathbf{A}$ szimmetrikus, ezért minden sajátértéke valós. Legyen ezek egyike λ, a hozzá tartozó egyik egységnyi hosszú sajátvektor $\mathbf{u}_1$. Egészítsük ki $\mathbf{u}_1$-et a teljes tér egy $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ ONB-ává. Ekkor a $\mathbf{Q}_0 = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \ldots\ \mathbf{u}_n]$ mátrix ortogonális, és

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_0^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 &= \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1^\mathsf{T}\\ \mathbf{u}_2^\mathsf{T}\\ \vdots\\ \mathbf{u}_n^\mathsf{T}\end{bmatrix} \mathbf{A}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \ldots & \mathbf{u}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1^\mathsf{T}\\ \mathbf{u}_2^\mathsf{T}\\ \vdots\\ \mathbf{u}_n^\mathsf{T}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathbf{Au}_1 & \mathbf{Au}_2 & \ldots & \mathbf{Au}_n\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1^\mathsf{T}\\ \mathbf{u}_2^\mathsf{T}\\ \vdots\\ \mathbf{u}_n^\mathsf{T}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\lambda\mathbf{u}_1 & \mathbf{Au}_2 & \ldots & \mathbf{Au}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda & *\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1\end{bmatrix} = \mathbf{B},
\end{aligned} \tag{9.1}$$

ugyanis $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ ONB, így $\mathbf{u}_1^\mathsf{T}(\lambda\mathbf{u}_1) = \lambda(\mathbf{u}_1^\mathsf{T}\mathbf{u}_1) = \lambda$, és $i > 1$ esetén $\mathbf{u}_i^\mathsf{T}(\lambda\mathbf{u}_1) = \lambda(\mathbf{u}_i^\mathsf{T}\mathbf{u}_1) = 0$. A $\mathbf{B}$ blokkmátrixban tehát $\mathbf{A}_1$ egy $(n-1) \times (n-1)$-es valós mátrix. Másrészt

$$\mathbf{B}^\mathsf{T} = (\mathbf{Q}_0^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q}_0)^\mathsf{T} = \mathbf{Q}_0^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}_0^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 = \mathbf{B},$$

azaz $\mathbf{B} = \left[\begin{smallmatrix}\lambda & *\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1\end{smallmatrix}\right]$ szimmetrikus, tehát $\mathbf{B} = \left[\begin{smallmatrix}\lambda & \mathbf{0}^\mathsf{T}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1\end{smallmatrix}\right]$, és $\mathbf{A}_1$ is szimmetrikus!

Mivel $\mathbf{B}$ hasonló $\mathbf{A}$-hoz, ezért sajátértékeik megegyeznek, tehát $\mathbf{A}_1$ minden sajátértéke $\mathbf{A}$-nak is sajátértéke. A teljes indukció miatt viszont $\mathbf{A}_1$-hez létezik olyan $\mathbf{Q}_1$ ortogonális és $\mathbf{\Lambda}_1$ diagonális mátrix, hogy $\mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{Q}_1^\mathsf{T}$. Ekkor viszont a $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0\left[\begin{smallmatrix}1 & \mathbf{0}^\mathsf{T}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1\end{smallmatrix}\right]$ mátrix ortogonális, hisz két ortogonális mátrix szorzata, és $\mathbf{A}$-t hasonlóvá teszi egy diagonális mátrixhoz:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q} &= \left(\mathbf{Q}_0\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}^\mathsf{T}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1\end{bmatrix}\right)^\mathsf{T}\mathbf{A}\left(\mathbf{Q}_0\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}^\mathsf{T}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}^\mathsf{T}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1\end{bmatrix}^\mathsf{T}\mathbf{Q}_0^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q}_0\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}^\mathsf{T}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}^\mathsf{T}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1\end{bmatrix}^\mathsf{T}\begin{bmatrix}\lambda & \mathbf{0}^\mathsf{T}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}^\mathsf{T}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\lambda & \mathbf{0}^\mathsf{T}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1^\mathsf{T}\mathbf{A}_1\mathbf{Q}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda & \mathbf{0}^\mathsf{T}\\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_1\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Ezzel bizonyítottuk, hogy a szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix is ortogonálisan diagonalizálható. □

► A tétel bizonyítása egyúttal ötletet ad a diagonalizálás megvalósításához is. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix egy λ_1 sajátértékét, és állítsuk elő a

$$\mathbf{Q}_0 \quad \text{és az} \quad \begin{bmatrix}\lambda & \mathbf{0}^\mathsf{T}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1\end{bmatrix}$$

mátrixokat. A következő lépésben az $\mathbf{A}_1$-ből egy λ_2 sajátértékét használva a $\mathbf{Q}_1$, majd az

$$\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}^\mathsf{T}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1\end{bmatrix} \quad \text{és az} \quad \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \mathbf{0}^\mathsf{T}\\ 0 & \lambda_1 & \mathbf{0}^\mathsf{T}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_2\end{bmatrix}$$

mátrixokat. Hasonlóan folytatva az $(n-i)\times(n-i)$ méretű $\mathbf{A}_i$ mátrixok sorozatából a $\mathbf{Q}_i$ mátrixok sorozatát ($i = 1, 2, \dots, n-2$), majd azokból az ortogonális

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & \mathbf{0}^\mathsf{T}\\ 0 & 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \mathbf{0}^\mathsf{T}\\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{0}^\mathsf{T}\\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{0}^\mathsf{T}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}_3\end{bmatrix}\cdots$$

mátrixot kapjuk.

► A bizonyításban szereplő (9.1) képlet, azaz hogy $\mathbf{Q}_0^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 = \left[\begin{smallmatrix}\lambda & *\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1\end{smallmatrix}\right]$ minden számolás nélkül is látható, hisz a jobb oldalon álló mátrix az $\mathbf{A}$ mátrix alakja a $\mathbf{Q}_0$ oszlopai alkotta bázisban, az első oszlopában tehát $\mathbf{u}_1$ képe áll, de $\mathbf{u}_1$ koordinátás alakja e bázisban $(1, 0, \dots, 0)$. Mivel ez sajátvektor, képe $(\lambda, 0, \dots, 0)$.

9.4. PÉLDA (MÁTRIX ORTOGONÁLIS DIAGONALIZÁLÁSA). *Diagonalizáljuk az alábbi mátrixot ortogonálisan!*

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg az áttérés mátrixát a standardról arra a bázisra, melyben e mátrix diagonális alakot vesz fel!

MEGOLDÁS. A karakterisztikus polinom:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20,$$

melynek gyökei 2, 2 és 5. Tehát a diagonális alak $\operatorname{diag}(2,2,5)$. Az áttérés mátrixához szükségünk lesz a sajátvektorokra. $\lambda = 2$ esetén:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

az $x+y+z=0$ egyenletrendszer megoldása pedig $(x,y,z) = (-1,1,0)s + (-1,0,1)t$. Ennek az altérnek egy bázisa tehát a $(-1,1,0)$ és a $(-1,0,1)$ vektorokból áll. A $\lambda = 5$ esetén:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

amely egyenletrendszer megoldása $(x,y,z) = (1,1,1)t$. A két különböző sajátaltérből való vektorok merőlegesek egymásra, de a $\lambda = 2$-höz tartozó sajátaltér két sajátvektora nem alkot ortogonális rendszert, ezért az általuk kifeszített térben új bázist keresünk, egy ortonormáltat. Legyen az $\mathbf{a} = (-1,1,0)/\sqrt{2}$ vektor az egyik, ekkor

$$(-1,0,1) - \left((-1,0,1) \cdot \frac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}}\right) \frac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right).$$

Ezt normálva kapjuk a $\mathbf{b} = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$ vektort, végül a $\lambda = 5$-höz tartozó normált vektor $\mathbf{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. A standard bázisra való áttérés mátrixa tehát az $[\mathbf{a}|\mathbf{b}|\mathbf{c}]$ mátrix. Ennek inverze lesz a standard bázisról való áttérés mátrixa, mely – ortogonális mátrixról lévén szó – a transzponáltja, azaz

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

□

*Schur-felbontás** Olyan ortonormált bázist találni, melyben egy mátrix egyszerűbb alakú, akkor is fontos, ha az az alak nem a diagonális. Ilyen például a felsőháromszög-mátrix-alak.

A valós spektráltétel bizonyításának csekély változtatása egy másik hasznos tételre vezet. Az ott konstruált $\mathbf{B}$ mátrixban ugyanis elimináltuk az $\mathbf{A}$ első oszlopának főátló alatti elemeit. Ezt a lépést ismételve elérhető, hogy a mátrixot felső háromszög-alakra hozzuk.

9.5. TÉTEL (SCHUR-FELBONTÁS).

a) Minden valós négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix, melynek összes sajátértéke valós, ortogonálisan hasonló egy $\mathbf{T}$ felső háromszögmátrixhoz, azaz van olyan $\mathbf{Q}$ ortogonális mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}$.

b) Minden komplex négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix unitéren hasonló egy $\mathbf{T}$ felső háromszögmátrixhoz, azaz van olyan $\mathbf{U}$ unitér mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}$.

► A tétel valós és komplex mátrixokra vonatkozó része közt csak annyi a különbség, hogy valós mátrixoknál megköveteltük a sajátértékek valós voltát, míg komplexeknél nem tettünk semmi kikötést – nyilván azért, mert komplex mátrix sajátértékei mindig komplexek.

BIZONYÍTÁS. A bizonyítást csak a valós esetre írjuk le, a komplex eset tárgyalása lényegében azonos. Teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 1$ esetén az állítás nyilván igaz. A feltételek szerint $\mathbf{A}$ minden sajátértéke valós, legyen ezek egyike λ, a hozzá tartozó egységnyi sajátvektorok egyike $\mathbf{u}_1$. Innen a 9.3. tétel bizonyítását megismételjük egészen a (9.1) mátrix előállításáig, azaz kapjuk, hogy az $\mathbf{u}_1$ vektort kiegészítve a teljes tér egy $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ ONB-ává, az ortogonális $\mathbf{Q}_0 = [\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \dots\ \mathbf{u}_n]$ mátrixszal

$$\mathbf{Q}_0^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{B}.$$

$\mathbf{B}$ hasonló $\mathbf{A}$-hoz, ezért sajátértékeik megegyeznek, tehát $\mathbf{A}_1$ minden sajátértéke $\mathbf{A}$-nak is sajátértéke. A teljes indukció miatt viszont $\mathbf{A}_1$-hez létezik olyan $\mathbf{Q}_1$ ortogonális és $\mathbf{T}_1$ felső háromszög mátrix, hogy $\mathbf{A}_1 = \mathbf{Q}_1\mathbf{T}_1\mathbf{Q}_1^{\mathsf{T}}$. A $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0\left[\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix ortogonális, hisz két ortogonális mátrix szorzata, és $\mathbf{A}$-t hasonlóvá teszi egy felsőháromszög-mátrixhoz:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{Q} &= \left(\mathbf{Q}_0\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}\right)^{\mathsf{T}} \mathbf{A} \left(\mathbf{Q}_0\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \mathbf{Q}_0^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1^{\mathsf{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^{\mathsf{T}}\mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_1^{\mathsf{T}}\mathbf{A}_1\mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{v}^{\mathsf{T}}\mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

□

9.6. PÉLDA (SCHUR-FELBONTÁS). *Hozzuk ortogonális hasonlósági transzformációval felső háromszögalakra az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & -3 \\ 3 & 17 & -6 \\ -12 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixot!

MEGOLDÁS. A karakterisztikus polinom $-x^3 + 28x^2 - 245x + 686 = (7-x)^2(14-x)$. A 7 kétszeres sajátérték, a sajátaltér 1-dimenziós, sajátvektor $\mathbf{x}_1 = (2,3,6)$, a 14-hez tartozó sajátvektor $\mathbf{x}_2 = (9,17,13)$, diagonalizálni nem lehet, mivel a geometriai multiplicitások összege (2) kisebb az algebraiak összegénél (3).

Az első sajátvektorhoz választunk egy ortonormált bázist, abból képezzük a $\mathbf{Q}_0$ és a $\mathbf{Q}_0^T\mathbf{A}\mathbf{Q}_0$ mátrixot:

E példa mátrixához található racionális elemű ortogonális mátrix, mi a számítások könnyebb követhetősége érdekében ezt adtuk meg. Ilyen mátrix keresése nem része a példának, mivel a gyakorlatban nemigen találkozni ilyen speciális esettel.

$$\mathbf{Q}_0 = [\mathbf{x}_1|\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_3] = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 3 & -2 & -6 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_0^T\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 = \left[\begin{array}{c|cc} 7 & 0 & -21 \\ \hline 0 & 14 & 0 \\ 0 & 7 & 7 \end{array}\right]$$

tehát

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}.$$

A 7 sajátértékhez tartozó sajátvektor $(0,1)$, rá merőleges a $(1,0)$. Így

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{Q}_1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Innen

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -2 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \text{ amiből}$$

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 7 & -21 & 0 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

□

A Schur-felbontás valós mátrixokra akkor is használható, ha komplex sajátértékei is vannak, de ekkor csak azt tudjuk garantálni, hogy a mátrix hasonló egy olyanhoz, melynek szubdiagonális elemei alatt minden elem 0.

9.7. ÁLLÍTÁS (VALÓS MÁTRIX KOMPLEX SAJÁTÉRTÉKE). *Legyen* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Ha* $(\lambda, \mathbf{x})$ *egy sajátpár, ahol* $\lambda = a + \mathrm{i}b$, $b \neq 0$, $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathrm{i}\mathbf{v}$, *ahol* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, *akkor*

a) $(\bar{\lambda}, \bar{\mathbf{x}})$ *szintén sajátpár,*
b) $\mathbf{u}$ *és* $\mathbf{v}$ *lineárisan függetlenek,*
c) $\mathbf{A}$ *hasonló egy*

$$\begin{bmatrix} a & b & * \\ -b & a & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \tag{9.2}$$

alakú mátrixhoz.

BIZONYÍTÁS. Mivel $\mathbf{A}$ valós karakterisztikus polinomja valós együtthatós, ezért minden komplex sajátértékének konjugáltja is az.

a) Ha $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, akkor $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}}$ nyilvánvalóan fennáll.

b) $\mathbf{x}$ és $\bar{\mathbf{x}}$ lineárisan függetlenek, különben $\mathbf{x}$ nem csak λ-nak, de a tőle különböző $\bar{\lambda}$-nak is sajátvektora lenne. Ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ nem lenne lineárisan független, akkor pl. $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$ esetén $\mathbf{x} = \mathbf{v}(1 + c\mathrm{i})$, $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(1 - c\mathrm{i})$ lenne, ami ellentmond az előzőknek. Az

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathrm{i}\mathbf{v}) &= (a + \mathrm{i}b)(\mathbf{u} + \mathrm{i}\mathbf{v}) = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}\mathrm{i} + a\mathbf{v}\mathrm{i} - b\mathbf{v}, \\ \mathbf{A}(\mathbf{u} - \mathrm{i}\mathbf{v}) &= (a - \mathrm{i}b)(\mathbf{u} - \mathrm{i}\mathbf{v}) = a\mathbf{u} - b\mathbf{u}\mathrm{i} - a\mathbf{v}\mathrm{i} - b\mathbf{v}, \end{aligned}$$

egyenletekből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{u} &= a\mathbf{u} - b\mathbf{v}, \\ \mathbf{A}\mathbf{v} &= b\mathbf{u} + a\mathbf{v}, \end{aligned} \quad \text{azaz} \quad \mathbf{A}[\mathbf{u}|\mathbf{v}] = [\mathbf{u}|\mathbf{v}] \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

c) Egészítsük ki az $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorokat bázissá, a belőlük alkotott mátrixot jelölje $\mathbf{C}$. E bázisban $\mathbf{A}\mathbf{u}$ koordinátás alakja $(a, -b, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{A}\mathbf{v}$ alakja $(b, a, 0, \ldots, 0)$, azaz

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} a & b & * \\ -b & a & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-1}. \qquad \square$$

9.8. TÉTEL (VALÓS SCHUR-FELBONTÁS). *Legyen* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

a) Létezik olyan invertálható $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *mátrix, és egy olyan*

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_1 & * & \ldots & * \\ 0 & \mathbf{\Lambda}_2 & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathbf{\Lambda}_k \end{bmatrix}, \tag{9.3}$$

alakú felső blokkháromszögmátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{C}^{-1}$*, és ahol* $\mathbf{\Lambda}_j$ *(*$j = 1, \ldots, k$*) vagy egy* 1×1*-es mátrix, melynek egyetlen eleme* $\mathbf{A}$ *egy valós sajátértéke, vagy egy olyan* 2×2*-es* $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right]$ *alakú mátrix, ahol* $a \pm b\mathrm{i}$ *az* $\mathbf{A}$ *két nem valós sajátértéke.*

b) Létezik olyan ortogonális $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *mátrix és egy olyan* $\mathbf{T}$ *felső blokkháromszögmátrix, hogy* $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^{\mathsf{T}}$*, és* $\mathbf{T}$ *minden diagonális eleme vagy az*

A *egy valós sajátértékét tartalmazó* 1×1*-es mátrix, vagy egy olyan* 2×2*-es mátrix, melynek két nem valós sajátértéke egymás komplex konjugáltja.*

Bizonyítás. Az első állítás indukcióval bizonyítható. Ha λ valós sajátérték, akkor a Schur-felbontás bizonyítását követve **A** ortogonálisan hasonló egy $\left[\begin{smallmatrix}\lambda & \mathbf{*} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1\end{smallmatrix}\right]$ alakú mátrixhoz, ha λ komplex, akkor hasonló (nem feltétlenül ortogonálisan) egy (9.2) alakú mátrixhoz. E lépések ismétlése végül a $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC} = \mathbf{T}$ mátrixot adják, mely a (9.3) alakú.

Tekintsük a $\mathbf{C} = \mathbf{QR}$ QR-felbontást, ahol **Q** ortogonális, **R** felső háromszögmátrix. Így $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{AQR} = \mathbf{T}$, azaz $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{AQ} = \mathbf{RTR}^{-1}$. Blokkosítsuk **R**-et a **T** főátlójának blokkméretei szerint, a főátlóbeli blokkokat jelölje $\mathbf{R}_j$, $j = 1, 2, \dots, k$. Ekkor

$$\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{AQ} = \mathbf{R}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Lambda}_1 & * & \dots & * \\ 0 & \boldsymbol{\Lambda}_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \boldsymbol{\Lambda}_k\end{bmatrix}\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix}\mathbf{R}_1\boldsymbol{\Lambda}_1\mathbf{R}_1^{-1} & * & \dots & * \\ 0 & \mathbf{R}_2\boldsymbol{\Lambda}_2\mathbf{R}_2^{-1} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{R}_k\boldsymbol{\Lambda}_k\mathbf{R}_k^{-1}\end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{\Lambda}_j \sim \mathbf{R}_j\boldsymbol{\Lambda}_j\mathbf{R}_j^{-1}$, ami igazolja a második állítást. □

► Az általában nem igaz, hogy egy valós mátrix ortogonálisan hasonló egy olyan mátrixhoz, melynek főátlójában a 2×2-es blokkok $\left[\begin{smallmatrix}a & b \\ -b & a\end{smallmatrix}\right]$ alakúak, ahol $\lambda = a \pm ib$ az **A** sajátértéke. Hogy ez is fönnálljon, az **A** mátrixnak egy további feltételt is teljesítenie kell.

*Mátrixok unitér diagonalizálása** A valós mátrixok ortogonális diagonalizálhatóságának megfelelője a komplex mátrixok közt azok unitér diagonalizálhatósága.

9.9. definíció (Unitér diagonalizálhatóság). *Az* **A** *mátrix* unitéren diagonalizálható, *ha találunk egy* **U** *unitér és egy* $\boldsymbol{\Lambda}$ *diagonális mátrixot, melyre* $\mathbf{U}^\mathsf{H}\mathbf{AU} = \boldsymbol{\Lambda}$ *(illetve* $\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{U}^\mathsf{H}$*).*

► A szimmetrikus és önadjungált mátrixok közti analógai alapján azt várjuk, hogy az önadjungált mátrixok lesznek az unitéren diagonalizálhatók. (A valós spektráltétel bizonyításának első része, azaz a $\Rightarrow$ irány bizonyítása nem vihető át valós szimmetrikus mátrixokról komplex önadjungált mátrixokra, mivel $\boldsymbol{\Lambda}^\mathsf{H} = \boldsymbol{\Lambda}$ csak valós diagonális mátrixokra igaz.) A valóságban mátrixok egy jóval tágabb köre fog az unitéren diagonalizálhatók közé tartozni: ezek lesznek a normális mátrixok.

9.10. definíció (Normális mátrix). *Azt mondjuk, hogy az* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ *mátrix* normális, *ha* $\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A} = \mathbf{AA}^\mathsf{H}$*, azaz ha felcserélhető saját adjungáltjával.*

► Könnyen ellenőrizhető, hogy normális az összes komplex önadjungált, ferdén önadjungált és unitér, valamint az összes valós szimmetrikus, ferdén szimmetrikus és ortogonális mátrix.

► Vannak olyan normális mátrixok is, melyek nem tartoznak a fenti listában felsoroltak közé. Pédául az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix normális, mert

$$\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

► A normális mátrixok sok szép tulajdonsággal rendelkeznek, melyekre a továbbiakban visszatérünk, a legfontosabbat a következő tétel mondja ki.

9.11. TÉTEL (UNITÉR DIAGINALIZÁLHATÓSÁG). *Az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor unitéren diagonalizálható, ha normális.*

BIZONYÍTÁS. ($\Rightarrow$) Tegyük fel, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}$, azaz $\mathbf{A}$ unitéren diagonalizálható. Mivel bármely komplex z számra $\bar{z}z = z\bar{z}$, ezért minden komplex diagonális mátrix normális, így $\mathbf{\Lambda}^{\mathsf{H}}\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^{\mathsf{H}}$. Eszerint

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A} &= (\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}}(\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}) = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{\mathsf{H}}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} \\ &= \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}^{\mathsf{H}} = (\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}})(\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}. \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) A Schur-felbontás szerint minden komplex négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix előáll

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}$$

alakban, ahol $\mathbf{U}$ unitér, $\mathbf{T}$ felsőháromszög-mátrix. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ normális. Ekkor $\mathbf{T}$ is normális, ugyanis a fenti levezetéshez hasonlóan

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{\mathsf{H}}\mathbf{T} &= (\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{U})^{\mathsf{H}}(\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{U}) = \mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{U}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{U} \\ &= \mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{U} = \mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{U}\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{U} = (\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{U})(\mathbf{U}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{U})^{\mathsf{H}} = \mathbf{T}\mathbf{T}^{\mathsf{H}}. \end{aligned}$$

A $\mathbf{T}$ mátrix alakja

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix},$$

ezért $[\mathbf{T}^{\mathsf{H}}\mathbf{T}]_{11} = |t_{11}|^2$, $[\mathbf{T}\mathbf{T}^{\mathsf{H}}]_{11} = |t_{11}|^2 + |t_{12}|^2 + \dots + |t_{1n}|^2$, amiből $t_{12} = \dots = t_{1n} = 0$ adódik. Hasonlóan fölírva a $[\mathbf{T}^{\mathsf{H}}\mathbf{T}]_{22}$ és a $[\mathbf{T}\mathbf{T}^{\mathsf{H}}]_{22}$ elemeket kapjuk, hogy $t_{23} = \dots = t_{2n} = 0$, stb. Tehát $\mathbf{T}$ diagonális. □

*Valós normális mátrixok** A valós normális mátrixok unitéren diagonalizálhatók, aminek következtében ortogonálisan blokkdiagonalizálhatók, legföljebb 2×2-es blokkokkal.

9.12. TÉTEL (VALÓS NORMÁLIS MÁTRIXOK BLOKKDIAGONALIZÁLHATÓSÁGA). *Legyen* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. $\mathbf{A}$ *pontosan akkor normális, ha van olyan* $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *ortogonális mátrix, hogy*

$$\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{\Lambda}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{\Lambda}_k \end{bmatrix}, \tag{9.4}$$

ahol $\mathbf{\Lambda}_j$ *(*$j = 1, 2, \dots, k$*) vagy* 1×1*-es és eleme az* $\mathbf{A}$ *egy sajátértéke, vagy* 2×2*-es valós mátrix, alakja*

$$\begin{bmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{bmatrix},$$

ahol $a_j \pm b_j\mathrm{i}$ *a* $\mathbf{\Lambda}_j$ *két sajátértéke.*

BIZONYÍTÁS. ($\Leftarrow$) Ha egy mátrix (9.4) alakú, akkor normális (ellenőrizzük), így normális a hozzá ortogonálisan hasonló $\mathbf{A}$ is.

($\Rightarrow$) Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ valós normális. Mivel valós, ezért ortogonálisan hasonló egy blokk felsőháromszög-mátrixhoz, melynek diagonális blokkjai 1×1-es vagy 2×2-es méretűek. Mivel normális, a két szorzat összevetéséből adódik, hogy a diagonális blokkok fölötti elemek mindegyik 0, tehát a mátrix blokkdiagonális.

Könnyen igazolható, hogy egy blokkdiagonális mátrix pontosan akkor normális, ha minden diagonális blokkja normális (ld. 9.1. feladat). Egy 1×1-es valós mátrix egyetlen eleme a sajátértéke. Egy 2×2-es normális mátrix alakja $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^2$, ahol $b \neq 0$ (ld. 9.2. feladat). Ez bizonyítja a tételt. □

9.13. KÖVETKEZMÉNY (ORTOGONÁLISAN BLOKKDIAGONALIZÁLHATÓ MÁTRIXOK). *Legyen* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) $\mathbf{A}$ *pontosan akkor szimmetrikus, ha ortogonálisan hasonló egy diagonális mátrixhoz. A diagonális elemek* $\mathbf{A}$ *sajátértékei. Két szimmetrikus mátrix pontosan akkor hasonló ortogonálisan egymáshoz, ha azonosak a sajátértékeik.*

b) $\mathbf{A}$ *pontosan akkor ferdén szimmetrikus, ha ortogonálisan hasonló egy olyan blokkdiagonális mátrixhoz, melynek diagonális blokkjai* $[0]$ *vagy* $\left[\begin{smallmatrix} 0 & b_j \\ -b_j & 0 \end{smallmatrix}\right]$ *alakúak, ahol utóbbi mátrix a tiszta imaginárius* $\pm b_j\mathrm{i}$ *sajátértékekhez tartozik. Két ferdén szimmetrikus mátrix pontosan akkor hasonló ortogonálisan egymáshoz, ha azonosak a sajátértékeik.*

c) $\mathbf{A}$ *pontosan akkor ortogonális, ha ortogonálisan hasonló egy olyan* *blokkdiagonális mátrixhoz, melynek diagonális blokkjai* $[1]$, $[-1]$ *vagy* $\left[\begin{smallmatrix} \cos\varphi_j & \sin\varphi_j \\ -\sin\varphi_j & \cos\varphi_j \end{smallmatrix}\right]$ *alakúak. Sajátértékei* ± 1, $\cos\varphi_j \pm \mathrm{i}\sin\varphi_j$. *Két ortogonális mátrix pontosan akkor hasonló ortogonálisan, ha sajátértékei azonosak.*

Feladatok

9.1. Mutassuk meg, hogy ha **A** blokkdiagonális, az átlóban négyzetes mátrixokkal, akkor **A** pontosan akkor normális, ha minden diagonális blokkja normális.

9.2. Tegyük fel, hogy az $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^2$ mátrix normális, és két sajátértéke nem valós. Ekkor $c = -b \neq 0$ és $d = a$.

Kvadratikus alakok

A csupa másodfokú tagot tartalmazó többváltozós polinomok mátrixok sajátértékeinek és sajátvektorainak ismeretében egyszerűbb alakra hozhatók, így könnyebben vizsgálhatók. E témának számtalan lineáris algebrán kívüli matematikai és matematikán kívüli alkalmazása is van.

Homogén másodfokú polinomok mátrixszorzatos alakja Egy polinom egy tagja *másodfokú*, ha abban az ismeretlenek fokszámainak összege 2. Például az x, y és z változókban másodfokú tagok az alábbiak: $3x^2$, axy, $2b^3xz$, $-\pi^2z^2$. Az olyan többváltozós polinomot, melyben csak másodfokú tagok vannak, többváltozós *homogén másodfokú polinomnak* nevezzük. Például $2x^2+4xy-y^2$ egy 2-változós homogén másodfokú polinom. A $4xy = 2xy + 2yx$ felbontással e polinom egy szimmetrikus mátrixszal való mátrixszorzatos alakba írható:

$$2x^2+2xy+2yx-y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Általában is igaz, hogy

$$ax^2+2bxy+cy^2 = ax^2+bxy+byx+cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Hasonlóképp a háromváltozós homogén másodfokú polinomok is mátrixszorzatos alakba írhatók egy szimmetrikus mátrixszal:

$$\begin{aligned} &ax^2+2bxy+2cxz+dy^2+2eyz+fz^2 \\ =\ &ax^2+bxy+cxz+byx+dy^2+eyz+czx+ezy+fz^2 \\ =\ &\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

9.14. PÉLDA (MÁSODFOKÚ POLINOM MÁTRIXSZORZATOS ALAKJA). *Írjuk fel az $x_1^2+2x_2^2+2x_3^2-5x_1x_2-3x_2x_1+5x_1x_3-x_3x_1$ kifejezést mátrixszorzatos alakban szimmetrikus mátrixszal!*

MEGOLDÁS. A vegyes tagokat először összevonva, majd két egyenlő együtthatójú részre bontva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 + 4x_1x_3 \\
&= x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_1 + 2x_1x_3 + 2x_3x_1 \\
&= x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_1 + 2x_2^2 + 0x_2x_3 + 2x_3x_1 + 0x_3x_2 + 2x_3^2 \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$ □

A fentieket követve az $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektor koordinátáitól függő valós homogén másodfokú polinomok mindegyike

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x}$$

alakra hozható, ahol $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrix.

A komplexek körében hasonló állítás nem igaz, ha a homogén másodfokú polinomot analóg módon az $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{x}$ képlettel definiáljuk. Például

$$\begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \bar{x}x + 2\bar{x}y + \bar{y}y \quad \text{és}$$
$$\begin{bmatrix} \bar{x} & \bar{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \bar{x}x + \bar{x}y + x\bar{y} + \bar{y}y$$

két különböző függvény! Másrészt viszont ha $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ önadjungált, akkor $\mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{x}$ valós értékű, ugyanis

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} = \overline{\mathbf{x} \cdot \mathbf{A}\mathbf{x}}.$$

Bizonyítható az is, hogy ha egy komplex kvadratikus alak valós értékű, akkor mátrixa önadjungált, más néven Hermite-féle (ld.9.6. feladat).

9.15. DEFINÍCIÓ (KVADRATIKUS ALAK). *Valós* kvadratikus alaknak *(vagy* kvadratikus formának*) nevezzük azt az*

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$$

függvényt, ahol $\mathbf{A}$ *valós szimmetrikus mátrix.* Komplex kvadratikus alakon *a*

$$\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}; \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{x}$$

függvényt értjük, ahol $\mathbf{A}$ *komplex négyzetes mátrix.*

► Látjuk, hogy komplex esetben nem tettünk feltételt az $\mathbf{A}$ mátrixra, míg valós esetben kikötöttük, hogy $\mathbf{A}$ legyen szimmetrikus. Ennek oka, hogy valós esetben – mint láttuk – bármely $\mathbf{A}$ mátrixhoz van olyan szimmetrikus $\mathbf{B}$, melyre $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{B}\mathbf{x}$. Komplex esetben hasonló állítás nem igaz sem szimmetrikus sem önadjungált mátrixokra. Az önadjungált eset más szempontból lesz érdekes.

► Egy komplex kvadratikus alakot *Hermite-félének* nevezünk, ha $\mathbf{A}$ önadjungált. Mint a 13.45. tételben látni fogjuk, ez azzal ekvivalens, hogy a komplex kvadratikus alak valós értékű.

E szakaszban a továbbiakban kvadratikus alakon – ha mást nem mondunk – valós kvadratikus alakot értünk.

Főtengelytétel Egy kvadratikus alakhoz tartozó szimmetrikus mátrix diagonalizálásával a kvadratikus alak is egyszerű alakra hozható.

A spektráltétel szerint minden valós szimmetrikus mátrix ortogonálisan diagonalizálható, azaz létezik egy olyan ortogonális $\mathbf{Q}$ mátrix, és egy diagonális $\mathbf{\Lambda}$ mátrix, melyre $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$. Tudjuk, hogy az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ mátrixleképezés mátrixa a $\mathbf{Q}$ oszlopvektorai által alkotott $\mathcal{Q}$ ortonormált bázisban $\mathbf{\Lambda}$. Ha egy tetszőleges $\mathbf{x}$ vektor alakja e bázisban $\mathbf{y}$, akkor $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$. E helyettesítést elvégezve ugyanennek a függvénynek a $\mathcal{Q}$ bázisban fölírt alakját kapjuk:

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{Q}\mathbf{y})^\mathsf{T}\mathbf{A}(\mathbf{Q}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{y} = \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{y}.$$

Eszerint a kvadratikus alak e bázisban nagyon egyszerűvé válik, csak négyzetes tagokat tartalmaz: $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$, ahol $\mathbf{\Lambda} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Ezzel bizonyítottuk az alábbi tételt:

9.16. TÉTEL (FŐTENGELYTÉTEL). *Legyen $\mathbf{A}$ egy n-edrendű valós szimmetrikus mátrix, melyet a $\mathbf{Q}$ mátrix ortogonálisan diagonalizál, azaz $\mathbf{Q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda}$ diagonális. Ekkor az $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ helyettesítés az $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus alakot az $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{y}$ kvadratikus alakba transzformálja, mely kifejtve csak négyzetes tagokat tartalmaz, azaz*

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2, \tag{9.5}$$

ahol λ_1, λ_2,…, λ_n az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei.

► A tétel nevét később fogjuk részletesen megmagyarázni, most csak annyit, hogy az $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = c$ egyenletű felületnek a $\mathcal{Q}$ bázis vektorai mind szimmetriatengelyei, melyeket főtengelyeknek is nevezünk.
► Mivel $\mathbf{Q}$ ortogonális mátrix, ezért $\det \mathbf{Q} = 1$ vagy $\det \mathbf{Q} = -1$. Gyakorlati (például bizonyos 3-dimenziós) alkalmazásokban fontos lehet, hogy a $\mathcal{Q}$ bázis is jobbsodrású legyen, azaz hogy $\det \mathbf{Q} = 1$ legyen. Így a standard bázis beleforgatható az új bázisba. Ez elérhető, ha $\det \mathbf{Q} = -1$ esetén $\mathbf{Q}$ bármelyik oszlopát -1-szeresére változtatjuk. Ez a kvadratikus alakot nem befolyásolja, hisz abban csak a sajátértékek szerepelnek.
► A főtengelytétel alkalmazását egy kvadratikus alakon *főtengely-transzformációnak* nevezzük.

9.17. PÉLDA (FŐTENGELY-TRANSZFORMÁCIÓ). *Végezzük el a főtengely-transzformációt az*

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 8xy + 4xz$$

kvadratikus alakon. Keressünk olyan jobbsodrású ortonormált bázist, melyben épp ez a kvadratikus alak alakja. Mi az áttérés mátrixa?

MEGOLDÁS. A kvadratikus alak mátrixszorzat-alakja

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Mátrixának karakterisztikus polinomja $-\lambda^3 + 5\lambda^2 + 12\lambda - 36$, ennek gyökei, azaz a sajátértékek 6, -3, 2, a hozzájuk tartozó sajátvektorok rendre $(2, -2, 1)$, $(-5, -4, 2)$, $(0, 1, 2)$. Így a keresett kvadratikus alak

$$\begin{bmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = 6\xi^2 - 3\eta^2 + 2\zeta^2.$$

A sajátvektorokat normálva megkapjuk az ortonormált bázist, melynek vektoraiból képzett determináns

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{5}{3\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = -1,$$

tehát egy megfelelő ortonormált bázis: $(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, $(\frac{5}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, -\frac{2}{3\sqrt{5}})$, $(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$. □

Kvadratikus alakok és mátrixok definitsége A főtengelytétel könnyen áttekinthetővé teszi a kvadratikus alak által fölvett értékek lehetséges előjelét. Ez lehetővé teszi a kvadratikus alakok egy fontos osztályozását.

9.18. DEFINÍCIÓ (KVADRATIKUS ALAKOK ÉS MÁTRIXOK DEFINITSÉGE). *Azt mondjuk, hogy az $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus alak*
a) pozitív definit, *ha $f(\mathbf{x}) > 0$,*
b) pozitív szemidefinit, *ha $f(\mathbf{x}) \geq 0$,*
c) negatív definit, *ha $f(\mathbf{x}) < 0$,*
d) negatív szemidefinit, *ha $f(\mathbf{x}) \leq 0$*
bármely $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor esetén, és azt mondjuk, hogy f
e) indefinit, *ha pozitív és negatív értékeket is fölvesz.*
A szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrixot pozitív/negatív definitnek/szemidefinitnek, illetve indefinitnek nevezzük, ha a hozzá tartozó kvadratikus alak az.

► Ha $\mathbf{A}$ negatív definit, akkor $-\mathbf{A}$ pozitív definit. Hasonló állítás igaz a szemidefiniségre is.

► Ha $\mathbf{A} = [a]$, azaz ha az $\mathbf{A}$ mátrix 1×1-es, akkor $\mathbf{A}$ pontosan akkor pozitív definit, ha $a > 0$.

► Az identikus mátrix pozitív definit, ugyanis $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2$, ami pozitív, ha $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

► Tetszőleges $\mathbf{A}$ valós mátrix esetén $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit, ugyanis

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = |\mathbf{A}\mathbf{x}|^2 \geqslant 0. \tag{9.6}$$

► Világos, hogy ha egy kvadratikus alakban csak négyzetes tagok szerepelnek, akkor azonnal leolvasható definitségének típusa. Például az $f(x,y) = x^2 + 2y^2$, $g(x,y) = x^2 - 2y^2$, $h(x,y) = -x^2 - 2y^2$, $k(x,y,z) = x^2 + 2y^2$ formákról látható, hogy f pozitív definit, hisz az $(x,y) \neq (0,0)$ esetén értéke mindig pozitív, g indefinit, h negatív definit, és k pozitív szemidefinit, hisz értéke $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ esetén is lehet 0 (ha $x = y = 0$, de $z \neq 0$). Miután a főtengelytétel szerint minden kvadratikus alak egyenlő a változók négyzeteinek a sajátértékekkel vett lineáris kombinációjával, ezért a definitség típusa pusztán csak a sajátértékek előjeleinek ismeretében eldönthető.

► Tekintsük az $a(x,y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2$, $b(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$ és $c(x,y) = x^2 + 4xy + 3y^2$ kvadratikus alakokat, illetve a hozzájuk tartozó szimmetrikus

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrixokat! Az a kvadratikus alak, illetve az $\mathbf{A}$ mátrix pozitív definit, mert $a(x,y) = x^2 + y^2 + (x+y)^2 > 0$, ha $(x,y) \neq (0,0)$. A b és a $\mathbf{B}$ pozitív szemidefinit, mert $b(x,y) = (x+y)^2$, ami sosem negatív, de a $(x,y) = (1,-1)$ helyen 0. A c és a $\mathbf{C}$ indefinit, mert $c(1,0) > 0$, $c(-2,1) < 0$. E mátrixok vizsgálatára lásd a 9.3. feladatot!

► Komplex esetben Hermite-féle kvadratikus alak definitsége a fentiekhez hasonlóan definiálható, hisz e kvadratikus alakok valós értékűek. Például az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixok közül $\mathbf{A}$ pozitív definit (sajátértékei 3 és 1), $\mathbf{B}$ pozitív szemidefinit (sajátértékei 2 és 0) és $\mathbf{C}$ indefinit (sajátértékei 2 és -1).

9.19. PÉLDA (DEFINITSÉG MEGHATÁROZÁSA A SAJÁTÉRTÉKEKBŐL). *Határozzuk meg az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

mátrixok definitségének típusát!

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei 1, 1 és 4. Így a főtengely-transzformáció után kapott

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi & \eta & \zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \xi^2 + \eta^2 + 4\zeta^2$$

alakból látható, hogy e kvadratikus alak minden értéke pozitív, ha a változók nem mindegyike 0. Tehát e kvadratikus alak pozitív definit. Hasonlóképp a $\mathbf{B}$ sajátértékei -1, -1 és 2, a főtengely-transzformáció után kapott alak $-\xi^2 - \eta^2 + 2\zeta^2$. Ez negatív értéket vesz fel például az $(1,0,0)$ helyen, és pozitívat a $(0,0,1)$ helyen, tehát indefinit. Végül $\mathbf{C}$ sajátértékei -3, -3 és 0, így a főtengely-transzformáció után kapott alak $-3\xi^2 - 3\eta^2 + 0\zeta^2 = -3\xi^2 - 3\eta^2$. Ennek értéke a $(0,0,1)$ helyen 0, és pozitív értéket nem vesz fel, tehát negatív szemidefinit. □

9.20. TÉTEL (DEFINITSÉG MEGHATÁROZÁSA A SAJÁTÉRTÉKEKBŐL). *A valós szimmetrikus* $\mathbf{A}$ *mátrix, illetve az* $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ *kvadratikus alak pontosan akkor*
a) pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ *minden sajátértéke pozitív;*
b) pozitív szemidefinit, ha $\mathbf{A}$ *minden sajátértéke nemnegatív;*
c) negatív definit, ha $\mathbf{A}$ *minden sajátértéke negatív;*
d) negatív szemidefinit, ha $\mathbf{A}$ *minden sajátértéke nempozitív;*
e) indefinit, ha $\mathbf{A}$*-nak van pozitív és negatív sajátértéke is.*

Pozitív (szemi)definit mátrixok faktorizációi A pozitív definit mátrixokkal való számításokat segíti, hogy akár a sajátfelbontásából, akár az LU-felbontásából $\mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}$ alakú felbontás származik.

9.21. TÉTEL (POZITÍV SZEMIDEFINIT MÁTRIXOK FAKTORIZÁCIÓI). *Legyen az* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mátrix szimmetrikus. A következő állítások ekvivalensek:*
a) $\mathbf{A}$ *pozitív szemidefinit,*
b) van olyan szimmetrikus pozitív szemidefinit $\mathbf{B}$ *mátrix, hogy* $\mathbf{A} = \mathbf{B}^2$*.*
c) van olyan $\mathbf{C}$ *mátrix, hogy* $\mathbf{A} = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}$*,*
A $\mathbf{B}$ *mátrix egyértelmű, vagyis egy pozitív szemidefinit mátrixnak egyetlen négyzetgyöke van a pozitív szemidefinit mátrixok közt.*

BIZONYÍTÁS. *a)* $\Rightarrow$ *b)*: Egy szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix ortogonális $\mathbf{Q}$ mátrixszal diagonalizálható, azaz $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Q}^\mathsf{T}$, ahol $\boldsymbol{\Lambda}$ diagonális. Ha $\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit is, akkor minden sajátértéke nemnegatív, így $\boldsymbol{\Lambda}$ minden főátlóbeli eleméből négyzetgyököt lehet vonni. A $\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}} = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ és a $\mathbf{B} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^\mathsf{T}$ jelölésekkel $\mathbf{B}\mathbf{B} = (\mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^\mathsf{T})(\mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^\mathsf{T}) = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{A}$.

Az egyértelműség bizonyításához legyen $\mathbf{B}$ pozitív szemidefinit, melyre $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$. $\mathbf{B}$ ortogonálisan diagonalizálható, ONB-ának vektorai legyenek $\mathbf{q}_i$, a hozzá tartozó sajátérték $\beta_i \geqslant 0$. Ekkor $\mathbf{B}\mathbf{q}_i = \beta_i \mathbf{q}_i$ és $\mathbf{q}_i$ az $\mathbf{A}$-nak is sajátvektora: $\mathbf{A}\mathbf{q}_i = \beta_i^2 \mathbf{q}_i$. Az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ leképezés hatása a $\mathbf{q}_i$ bázisvektorokon tehát egyértelműen megadja az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{B}\mathbf{x}$ hatását is, így annak mátrixát is.

b) $\Rightarrow$ *c)*: $\mathbf{B}$ szimmetrikus, így $\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B} = \mathbf{B}^2$, tehát a $\mathbf{C} = \mathbf{B}$ választás megfelel, de kevesebb számolással járót is találni: a $\mathbf{C} = \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^\mathsf{T}$ mátrixra $\mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{A}$.

c) $\Rightarrow$ *a)*: Ha $\mathbf{A} = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}$ valamely $\mathbf{C}$ mátrixra, akkor tudjuk, hogy $\mathbf{A}$ szimmetrikus, másrészt

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}\mathbf{x} = (\mathbf{C}\mathbf{x})^\mathsf{T}(\mathbf{C}\mathbf{x}) = |\mathbf{C}\mathbf{x}|^2 \geqslant 0, \qquad \square$$

tehát $\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit.

9.22. PÉLDA (FELBONTÁS $\mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}$ ÉS $\mathbf{B}^2$ SZORZATTÁ). *Legyen*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix}.$$

Vannak-e olyan $\mathbf{C}$ és olyan pozitív szemidefinit $\mathbf{B}$ mátrixok, melyekre $\mathbf{A} = \mathbf{B}^2 = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}$? Adjunk több megoldást is arra, amelyikre lehet!

MEGOLDÁS. $\mathbf{A}$ szimmetrikus, karakterisztikus polinomja $x^2 - 25x$, sajátértékei nemnegatívak (25, 0), tehát pozitív szemidefinit, így ilyen $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrixok léteznek. $\mathbf{A}$ sajátfelbontása, a $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrix:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/5 & -12/5 \\ -12/5 & 16/5 \end{bmatrix}.$$

Ilyen pozitív szemidefinit $\mathbf{B}$ csak egy van, de $\mathbf{C}$-re jó a $\mathbf{C} = \mathbf{B}$ mátrix is. $\square$

9.23. TÉTEL (POZITÍV DEFINIT MÁTRIXOK FAKTORIZÁCIÓI). *Legyen az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix szimmetrikus. A következő állítások ekvivalensek:*

a) *$\mathbf{A}$ pozitív definit,*

b) *az $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ LU-felbontásban $\mathbf{U}$ minden főátlóbeli eleme pozitív,*

c) *van olyan valós $\mathbf{R}$ felsőháromszög-mátrix, melynek minden főátlóbeli eleme pozitív, és $\mathbf{A} = \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R}$,*

d) *van olyan invertálható valós $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}$,*

e) *van olyan szimmetrikus pozitív definit $\mathbf{B}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{B}^2$ és e mátrix egyértelmű.*

A c) pont szerinti $\mathbf{R}$ *mátrix egyértelmű, az* $\mathbf{A} = \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R}$ *felbontást az* $\mathbf{A}$ *mátrix Cholesky-felbontásának nevezzük.*

BIZONYÍTÁS. *a)* $\Leftrightarrow$ *d)* $\Leftrightarrow$ *e)*: bizonyítása lényegében azonos a 9.21. tétel bizonyításával, csak itt minden mátrix invertálható.

a) $\Rightarrow$ *b)*: Ha $\mathbf{A}$ pozitív definit, akkor a 0 nem sajátértéke, így invertálható. Invertálható mátrix LU-felbontása egyértelmű (ld. 5.37. tétel). Legyen $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$. Ekkor $\mathbf{e}_i^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i^\mathsf{T}\mathbf{LU}\mathbf{e}_i = u_{ii} > 0$, ahol u_{ii} az $\mathbf{U}$ főátlóbeli eleme, ami tehát mind pozitív.

b) $\Rightarrow$ *c)*: Az

$$\mathbf{U} = \mathbf{D}\hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12}/u_{11} & \dots & u_{1n}/u_{11} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n}/u_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

felbontással olyan $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\hat{\mathbf{U}}$ felbontást kaptunk, ahol $\mathbf{L}$ alsó, $\hat{\mathbf{U}}$ felső egységháromszög-mátrix. Mivel $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}$ azaz $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}^\mathsf{T}\mathbf{D}\hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{U}}^\mathsf{T}\mathbf{D}^\mathsf{T}\mathbf{D}\mathbf{L}^\mathsf{T}$, és e felbontás is egyértelmű, ezért $\mathbf{L} = \hat{\mathbf{U}}^\mathsf{T}$, azaz $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^\mathsf{T}$. $\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}$-del jelölve a $\mathbf{D}$ négyzetgyökeiből álló mátrixot, kapjuk, hogy az $\mathbf{R} = \mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{L}^\mathsf{T}$ mátrixszal $\mathbf{A} = \mathbf{R}^\mathsf{T}\mathbf{R}$.

Bónuszként azt is megkaptuk, hogy e felbontás egyértelmű.

c) $\Rightarrow$ *d)*: Ha $\mathbf{R}$ minden főátlóbeli eleme pozitív, akkor $\mathbf{R}$ invertálható, így $\mathbf{C} = \mathbf{R}$ megfelel.

d) $\Rightarrow$ *a)*: Ha $\mathbf{A} = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}$, akkor az előző 9.21. tétel szerint $\mathbf{A}$ pozitív szemidefinit. Ha viszont $\mathbf{C}$ invertálható, akkor $\mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}$ is, így $\mathbf{A}$ egyetlen sajátértéke sem 0, tehát $\mathbf{A}$ pozitív definit. □

9.24. PÉLDA (CHOLESKY-FELBONTÁS). *Adjuk meg az* $\mathbf{A}$ *mátrix Cholesky-felbontását, ahol*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{A}$ mátrix pozitív definit (pl. mert $\chi_\mathbf{A}(x) = -x^3 + 8x^2 - 12x + 4$ értéke 0-ban pozitív, deriváltjának zérushelyei pozitívak, így a lokális szélsőértékhelyek, s ennek következtében a zérushelyek is). Mivel az LU-felbontás

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

amiből a $\operatorname{diag}(1,4,1) = \operatorname{diag}(1,2,1)\operatorname{diag}(1,2,1)$ és az $\mathbf{R} = \operatorname{diag}(1,2,1)\mathbf{L}^\mathsf{T}$

összefüggésekből

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Definitség és főminorok Mátrix definitsége gyakran könnyen eldönthető főminorainak vagy vezető főminorainak értékéből.

Válasszuk ki egy négyzetes mátrix néhány sorát, és ugyanannyiadik sorszámú oszlopát, a többi sort és oszlopot hagyjuk el. Az így kapott négyzetes részmátrix determinánsát a mátrix *főminorának* nevezzük. Ha az első k sort és az első k oszlopot választjuk ki, *vezető főminorról* beszélünk, pontosabban a k-adrendű vagy k-adik vezető főminorról. A vezető főminor másik elnevezése *sarokaldetermináns*.

Ha egy mátrix diagonális alakú és pozitív definit, azaz minden sajátértéke pozitív, akkor minden főminora is pozitív, ha pozitív szemidefinit, akkor minden főminora nemnegatív. Ha e diagonális mátrix minden sajátértéke negatív, akkor vezető főminorai felváltva $- + - + - + \ldots$ előjelűek. E megfigyelések átvihetők nem diagonális alakú mátrixokra is.

9.25. TÉTEL (A DEFINITSÉG ÉS A FŐMINOROK KAPCSOLATA). *A valós szimmetrikus* $\mathbf{A}$ *mátrix, illetve az* $\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x}$ *kvadratikus alak pontosan akkor*

a) pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ *minden vezető főminora pozitív;*

b) pozitív definit, ha $\mathbf{A}$ *minden főminora pozitív;*

c) negatív definit, ha $\mathbf{A}$ *minden páratlan rendű vezető főminora negatív, páros rendű vezető főminora pozitív.*

d) pozitív szemidefinit, ha $\mathbf{A}$ *minden főminora nemnegatív;*

BIZONYÍTÁS. *a)* Ha $\mathbf{A}$ pozitív definit, akkor LU-felbontásában az $\mathbf{U}$ minden főátlóbeli eleme pozitív. Jelölje az $\mathbf{A}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{U}$ mátrix első k sorának és első k oszlopának kereszteződésében álló részmátrixot $\mathbf{A}_k$, $\mathbf{L}_k$, illetve $\mathbf{U}_k$. Az LU-felbontás e részmátrixokkal blokkosítva

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k & * \\ * & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_k & \mathbf{O} \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_k & * \\ \mathbf{O} & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_k\mathbf{U}_k & * \\ * & * \end{bmatrix},$$

azaz $\mathbf{A}_k = \mathbf{L}_k\mathbf{U}_k$, így a k-adik vezető főminor $|\mathbf{A}_k| = |\mathbf{L}_k||\mathbf{U}_k| = u_{11}u_{22}\ldots u_{kk} > 0$.

Fordítva, ha $\mathbf{A}$ minden főminora pozitív, azaz $\det(\mathbf{A}_k) > 0$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), akkor $u_{kk} = \det(\mathbf{A}_k)/\det(\mathbf{A}_{k-1}) > 0$, így a 9.23. tétel *b)* pontja szerint $\mathbf{A}$ pozitív definit.

b) Ha $\mathbf{P}$ egy olyan permutáló mátrix, mely $\mathbf{A}$ egy adott főminorához tartozó sorokat az első sorokba permutálja, akkor a $\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^\mathsf{T}$ mátrixban e főminor vezető főminorrá válik, e mátrix pedig hasonló $\mathbf{A}$-hoz és szimmetrikus, így azonos definitségű. Tehát **A**-nak pontosan akkor pozitív minden főminora, ha minden vezető főminora az.

c) Ha **A** negatív definit, akkor $-\mathbf{A}$ pozitív definit, így az $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ felbontásban minden i-re $u_{ii} < 0$, ami igazolja az állítást.

d) Ha az **A** pozitív szemidefinit, az $\leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$ sor- és oszlopindexekhez tartozó **B** részmátrix is pozitív szemidefinit, hisz bármely $\hat{\mathbf{x}}^\mathsf{T}\mathbf{B}\hat{\mathbf{x}}$ szorzatban $\hat{\mathbf{x}}$ kiegészíthető nullákkal úgy, hogy $[\hat{\mathbf{x}}]_j = [\mathbf{x}]_{i_j}$ legyen, így $\hat{\mathbf{x}}^\mathsf{T}\mathbf{B}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} \geqslant 0$.

Fordítva: tegyük fel, hogy **A** minden főminora nemnegatív. Megmutatjuk, hogy ekkor bármely $\varepsilon > 0$ esetén $\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{I}$ pozitív definit, mert sarokaldeterminánsai pozitívak. Így $\mathbf{x}^\mathsf{T}(\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{I})\mathbf{x} > 0$ minden $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorra, amiből

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathbf{x}^\mathsf{T}(\mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} \geqslant 0.$$

.... □

► A tétel vezető főminorokra vonatkozó pontjai nem vihetők át minden további feltétel nélkül szemidefinit mátrixokra. Az ugyan igaz, hogy ha egy mátrix pozitív szemidefinit, akkor vezető főminorainak sorozata egy darabig pozitív, majd onnan 0. Ennek megfordítása viszont már nem igaz. Például a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix főminorainak sorozata 1, 0, 0, de a mátrix indefinit.

Szélsőérték A többváltozós függvények szélsőértékének első és második parciális deriváltjaira vonatkozó feltételei azonnal érthetővé válnak a definitség fogalmának segítségével.

A függvényanalízisből ismert Taylor tételének többváltozós alakja szerint egy legalább kétszer differenciálható $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény a következő alakban írható fel:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})(x_i - a_i) + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j) + \sum_{i,j} \varepsilon_{ij}(\mathbf{x})(x_i - a_i)(x_j - a_j),$$

ahol $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ az f értelemzési tartományának egy belső pontja.

Feladatok

9.3. A sajátértékek kiszámításával döntsük el az alábbi mátrixok definitségét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

9.4. FELBONTÁS $\mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}$ ÉS $\mathbf{B}^2$ SZORZATTÁ Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Vannak-e olyan $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrixok, melyekre $\mathbf{A} = \mathbf{B}^2 = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{C}$, és ha igen, adjunk meg ilyeneket! Amelyikre több megoldás is van, adjunk meg legalább kettőt!

9.5. Az $a(x,y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2$, $b(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$ és $c(x,y) = x^2 + 4xy + 3y^2$ kvadratikus alakokat állítsuk elő két teljes négyzet $+1$, 0 vagy -1 együtthatós összegeként! (Ezek az előző feladatbeli mátrixokhoz tartozó kvadratikus alakok.)

9.6. Igazoljuk, hogy a $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus alak pontosan akkor valós értékű, ha $\mathbf{A}$ önadjungált!

Megoldások

9.1. $\operatorname{diag}(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k) \operatorname{diag}(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k)^\mathsf{T} =$
$= \operatorname{diag}(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k)^\mathsf{T} \operatorname{diag}(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k) \iff$
$\operatorname{diag}(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_1^\mathsf{T}, \ldots, \mathbf{A}_k\mathbf{A}_k^\mathsf{T}) = \operatorname{diag}(\mathbf{A}_1^\mathsf{T}\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k^\mathsf{T}\mathbf{A}_k)$.

9.2. $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]^\mathsf{T} \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]^\mathsf{T}$ pontosan akkor igaz, ha $b^2 = c^2$ és $ab + cd = ac + bd$. $c = b$ nem lehet, mert akkor a mátrix szimmetrikus lenne, és annak valósak a sajátértékei, így $c = -b \neq 0$. Innen $ab - bd = -ab + bd$, azaz $a = d$.

9.3. **A** pozitív definit, mert sajátértékei 3 és 1. **B** pozitív szemidefinit, mert sajátértékei 2 és 0. **C** indefinit, mert karakterisztikus polinomja $x^2 - 4x - 1$, így egyik sajátértéke pozitív, másik negatív.

9.4. **A** szimmetrikus, sajátértékei nemnegatívak (9, 9, 0), tehát pozitív szemidefinit, ilyen **B** és **C** mátrixok léteznek. **A** sajátfelbontása, a **C** és a **B** mátrix:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

9.5. $a(x,y) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 = (\sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}y)^2$, $b(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 + 0$ és $c(x,y) = x^2 + 4xy + 3y^2 = (x+2y)^2 - y^2$.

10
Szinguláris érték

A szimmetrikus mátrix ortogonális diagonalizálását fogjuk általánosítani tetszőleges mátrixra, egy helyett két ortonormált bázis megkeresésével. Úgy is fogalmazhatunk, hogy a $\mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris transzformációk ortogonális diagonalizálását fogjuk általánosítani $\mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ lineáris leképezésekre. E diagonalizálás a mátrixok, illetve a lineáris leképezések további fontos tulajdonságainak leírását segítik, példaként a mátrixnormákat fogjuk vizsgálni. E téma alkalmazásai közül kiemelkednek az információtömörítéssel kapcsolatosak, de az egyenletrendszerek megoldásához használt leghatékonyabbak közé tartozó algoritmusok is ide sorolhatók.

Szinguláris érték, szinguláris vektor, SVD

Az ortogonális diagonalizációt általánosítjuk, melyben a sajátértékek szerepét a szinguláris értékek veszik át, a sajátfelbontásét a szinguláris érték szerinti felbontás (SVD).

Szinguláris érték, szinguláris vektor Azt tudjuk, hogy egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixhoz tartozó mátrixleképezés kölcsönösen egyértelmű a sortér és az oszloptér között. Indulásként e két altérben keresünk ortonormált bázisokat, melyek közt a leképezés mátrixa diagonális alakot ölt. Ezeket kiegészítjük az $\mathbb{R}^n$ és az $\mathbb{R}^m$ ortonormált bázisává. A komplex terekben mindez hasonlóképp megvalósítható.

Az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrixhoz olyan ortonormált $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset \mathbb{R}^n$ és $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\} \subset \mathbb{R}^m$ bázisokat keresünk, melyekben $\mathbf{A}$ mátrixa diagonálissá válik. Ez azt jelenti, hogy léteznek olyan σ_i valósok, hogy $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$, ahol $1 \leqslant i \leqslant \min(m, n)$. Eszerint olyan egymásra merőleges vektorokat keresünk, melyek képei is merőlegesek egymásra. Ehhez ad ötletet a következő állítás:

10.1. ÁLLÍTÁS. *Ha az egymásra merőleges* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *vektorok legalább egyike az* $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ *sajátvektora, akkor az* $\mathbf{Ax}, \mathbf{Ay} \in \mathbb{R}^m$ *vektorok is merőlegesek egymásra.*

BIZONYÍTÁS. A feltételek szerint $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$, és legyen például $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Ay} = \lambda\mathbf{y}$. Ekkor

$$\mathbf{Ax} \cdot \mathbf{Ay} = (\mathbf{Ax})^\mathsf{T}\mathbf{Ay} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Ay} = \mathbf{x} \cdot (\lambda\mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = 0. \qquad \square$$

Tudjuk, hogy az $A\colon \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezés kölcsönösen egyértelmű a sortér és az oszloptér között. Így először csak e két altérben keressünk megfelelő bázist. Közös dimenziójuk a ranggal egyenlő, jelölje ezt r.

Mivel $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ szimmetrikus és pozitív szemidefinit, ezért ortogonálisan diagonalizálható és a sajátértékei nem negatívak. A sajátvektorokból kiválasztható $\mathbb{R}^n$ egy ortonormált bázisa, melyek közül a pozitív sajátértékekhez tartozók kifeszítik a nulltér, azaz az $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$ tér merőleges kiegészítő alterét, tehát a sorteret.

Jelölje a sortér e bázisát $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$. E vektorok egyike sincs a nulltérben, és $\mathbf{A}$ általi képeik páronként merőlegesek egymásra, így az $\mathbf{Av}_i$ vektorok ortogonális bázist alkotnak az oszloptérben. Ha $\mathbf{v}_i$ az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ mátrix $\lambda_i > 0$ sajátértékéhez tartozó egységnyi sajátvektora, akkor $|\mathbf{Av}_i| = \sqrt{\lambda_i}$, ugyanis

$$|\mathbf{Av}_i|^2 = \mathbf{v}_i^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Av}_i = \lambda_i|\mathbf{v}_i|^2 = \lambda_i.$$

Legyen $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ és $\mathbf{u}_i = \mathbf{Av}_i/\sigma_i$. Ekkor az $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ ortonormált bázist alkotnak az oszloptérben. Mindezek a következő definíciókhoz vezetnek:

10.2. DEFINÍCIÓ (SZINGULÁRIS ÉRTÉK). *Az r rangú $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m\times n}$ mátrix* szinguláris értékeinek *nevezzük az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ mátrix pozitív sajátértékeinek négyzetgyökeit, melyeket σ_1, σ_2,…, σ_r jelöl. (Általában az indexelés követi a nagyság szerinti rendezést: $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \dots \geqslant \sigma_r > 0$.) Az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ mátrix valamely σ^2 sajátértékéhez tartozó egységnyi $\mathbf{v}$ sajátvektorát az $\mathbf{A}$* jobb szinguláris vektorának, *az $\mathbf{u} = \frac{1}{\sigma}\mathbf{Av}$ egységvektort pedig a $\mathbf{v}$-hez tartozó* bal szinguláris vektorának *nevezzük.*

A *szinguláris érték* fogalmát 1907-ben Erhard Schmidt vezette be, de ő még *sajátértéknek* nevezte. Mai nevét 1937-ben kapta, mert különösen akkor tűnt hasznos eszköznek – például az egyenletrendszerek megoldásában –, amikor az együtthatómátrix szinguláris.

► E definíció fontos következménye, hogy mivel $|\mathbf{u}_i| = 1$ $(i = 1, 2, \dots, r)$, ezért $|\mathbf{Av}_i| = \sigma_i$.

► A szinguláris érték fogalma úgy is definiálható, hogy ha $k = \min(m, n)$, akkor a szinguláris értékek száma k, és értékük nem negatív. Ekkor a nagyság szerinti rendezésüket megtartva $\sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = \sigma_k = 0$.

► Ha σ t-szeres multiplicitású szinguláris értéke $\mathbf{A}$-nak, akkor σ^2 az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$-nak t-szeres algebrai (és t-szeres geometriai) multiplicitású sajátértéke, így a σ-hoz tartozó jobb szinguláris vektorok a sortérben, a hozzá tartozó bal szinguláris vektorok pedig az oszloptérben t-dimenziós alteret feszítenek ki.

▶ Ha $\mathbf{Av} = \sigma\mathbf{u}$, akkor $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \frac{1}{\sigma}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Av} = \frac{1}{\sigma}\sigma^2\mathbf{v} = \sigma\mathbf{v}$, tehát az

$$\mathbf{Av} = \sigma\mathbf{u}, \quad \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u} = \sigma\mathbf{v} \tag{10.1}$$

összefüggések párba állítják a jobb és bal szinguláris vektorokat.
▶ Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, akkor (a 7.97. tételben a komplex terek kitüntetett altereiről mondottakat követve) a sortér helyett a sortér konjugáltjával, azaz az $\mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{H})$ altérrel, transzponálás helyett adjungálással, tehát $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ helyett az $\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A}$ mátrixszal igazak maradnak a fentiek.

10.3. PÉLDA (SZINGULÁRIS ÉRTÉKEK ÉS VEKTOROK). *Határozzuk meg az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4/13 & 6 \\ 111/13 & -4 \end{bmatrix}$$

mátrix szinguláris értékeit, és keressünk a jobb szinguláris vektorok közt egy ortonormált bázist, és adjuk meg a megfelelő bal szinguláris vektorokból álló ONB-t is.

MEGOLDÁS. Mivel

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 73 & -36 \\ -36 & 52 \end{bmatrix},$$

melynek karakterisztikus polinomja $\chi(x) = x^2 - 125x + 2500$, és annak gyökei $\lambda_1 = 100$, $\lambda_2 = 25$, ezért az $\mathbf{A}$ szinguláris értékei $\sigma_1 = 10$, $\sigma_2 = 5$.

Az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ sajátpárjai egységnyi sajátvektorokkal: $(100, (4/5, -3/5))$, $(25, (3/5, 4/5))$. Az $\mathbf{A}$ jobb szinguláris vektorai tehát $\mathbf{v}_1 = (4/5, -3/5)$ és $\mathbf{v}_2 = (3/5, 4/5)$. Mivel

$$\begin{bmatrix} -4/13 & 6 \\ 111/13 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{bmatrix} = 10\begin{bmatrix} -5/13 \\ 12/13 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -4/13 & 6 \\ 111/13 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 12/13 \\ 5/13 \end{bmatrix},$$

ezért $\mathbf{u}_1 = (-5/13, 12/13)$ és $\mathbf{u}_2 = (12/13, 5/13)$ a hozzájuk tartozó bal szinguláris vektorok.

Látható, hogy $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ és $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ egyaránt ortonormált bázisai a sor-, illetve oszloptérnek, hisz e terek megegyeznek $\mathbb{R}^2$-tel. □

Szinguláris felbontás Egy mátrix szinguláris értékei és vektorai egy mátrixfelbontást adnak, ezt fogjuk szinguláris érték szerinti felbontásnak nevezni.

Képezzük a szinguláris értékekből a diagonális

$$\mathbf{\Sigma}_1 = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma_r \end{bmatrix}$$

mátrixot, valamint a szinguláris vektorokból az $\mathbf{U}_1 = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ és a $\mathbf{V}_1 = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ mátrixokat. Ekkor az $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma\mathbf{u}_i$ egyenlőségek az

$$\mathbf{A}\mathbf{V}_1 = \mathbf{U}_1\mathbf{\Sigma}_1, \tag{10.2}$$

azaz az

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_r\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r\end{bmatrix} \tag{10.3}$$

alakot öltik. Mivel $\mathbf{V}_1$ szemiortogonális, és oszlopvektorai a sortér ONB-át alkotják, ezért $\mathbf{V}_1\mathbf{V}_1^\mathsf{T}$ a sortérre való merőleges vetítés mátrixa, így $\mathbf{A}\mathbf{V}_1\mathbf{V}_1^\mathsf{T} = \mathbf{A}$ (ld. még a **??** feladatot), ezért jobbról szorozva a (10.2) egyenletet $\mathbf{V}_1^\mathsf{T}$-tal kapjuk, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{U}_1\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^\mathsf{T}$.

10.4. DEFINÍCIÓ (REDUKÁLT SZINGULÁRIS FELBONTÁS ÉS DIADIKUS ALAKJA). *A valós (komplex)* $\mathbf{A}$ *mátrix*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_1\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^\mathsf{T} \quad (\mathbf{A} = \mathbf{U}_1\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^\mathsf{H})$$

felbontását redukált szinguláris felbontásnak *nevezzük, ha* $\mathbf{\Sigma}_1$ *négyzetes, diagonális mátrix, főátlójában monoton csökkenően rendezett pozitív valós számokkal,* $\mathbf{U}_1$ *és* $\mathbf{V}_1$ *szemiortogonálisak (komplex esetben* $\mathbf{U}_1^\mathsf{H}\mathbf{U}_1 = \mathbf{V}_1^\mathsf{H}\mathbf{V}_1 = \mathbf{I}_r$*). Ha ezt a szorzatot az* $\mathbf{U}_1\mathbf{\Sigma}_1$ *oszlopvektorokra és a* $\mathbf{V}_1^\mathsf{T}$ *sorvektorokra blokkosított alakjára írjuk fel, akkor az* $\mathbf{A}$ *mátrix egy diadikus felbontását kapjuk, melyet* szinguláris érték szerinti diadikus felbontásnak *nevezünk:*

$$\mathbf{A} = \sigma_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^\mathsf{T} + \sigma_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^\mathsf{T} + \dots + \sigma_r\mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^\mathsf{T}.$$

(komplex esetben transzponált helyett adjungálttal).

Egészítsük ki a $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ vektorrendszert a teljes n-dimenziós tér ONB-ává. Jelöljük a belőlük képzett $n \times n$-es ortogonális (unitér) mátrixot $\mathbf{V}$-vel, $n > r$ esetén az új vektorokból képzett mátrixot $\mathbf{V}_2$-vel, azaz $\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_{r+1} & \dots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix}$. Mivel $\mathbf{V}_2$ oszlopvektorai merőlegesek a sortérre (komplex esetben $\mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{H})$-ra), ezért a nulltérben vannak, tehát $r < i \le n$ esetén $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$.

Hasonlóképp az előzőkhöz, egészítsük ki az $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ vektorrendszert a teljes m-dimenziós tér ONB-ává, és jelöljük e vektorokból képzett $m \times m$-es mátrixot $\mathbf{U}$-val. $m > r$ esetén legyen $\mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_{r+1} & \dots & \mathbf{u}_m\end{bmatrix}$. Végül a $\mathbf{\Sigma}_1 = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ mátrixot egészítsük ki egy $m \times n$-es mátrixszá nullblokkok hozzávételével, jelölje e mátrixot $\mathbf{\Sigma}$, tehát $\mathbf{\Sigma} = \left[\begin{smallmatrix}\mathbf{\Sigma}_1 & \mathbf{O}\\ \mathbf{O} & \mathbf{O}\end{smallmatrix}\right]$. Ekkor a (10.3) egyenlőség a következőképp módosítható:

$$\begin{aligned}
\mathbf{AV} &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{Av}_1 & \dots & \mathbf{Av}_r & \mathbf{Av}_{r+1} & \dots & \mathbf{Av}_n \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1\mathbf{u}_1 & \dots & \sigma_r\mathbf{u}_r & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_r & \mathbf{u}_{r+1} & \dots & \mathbf{u}_m \end{array}\right]
\left[\begin{array}{cccc|ccc}
\sigma_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \sigma_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \sigma_r & 0 & \dots & 0 \\ \hline
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0
\end{array}\right] \\
&= \mathbf{U\Sigma}.
\end{aligned}$$

A mátrixok méreteit is kiírva $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{V}_{n\times n} = \mathbf{U}_{m\times m}\mathbf{\Sigma}_{m\times n}$, blokkmátrix alakba átírva

$$\mathbf{A}\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{\Sigma}_1 & \mathbf{O} \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{array}\right].$$

Ha $r = n$, illetve $r = m$, akkor $\mathbf{V}_2$, illetve $\mathbf{U}_2$ üresek, azaz 0 számú oszlopból állnak, ami értelemszerűen változtat e képleten. Mivel a négyzetes $\mathbf{V}$ mátrix oszlopvektorai ONB-t alkotnak, ezért valós esetben $\mathbf{V}$ ortogonális, így $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^\mathsf{T}$ (komplex esetben unitér, és $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^\mathsf{H}$). Ezt fölhasználva, az $\mathbf{AV} = \mathbf{U\Sigma}$ egyenlőségből kapjuk, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T}$ ($\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{H}$).

10.5. definíció (Szinguláris felbontás). *A valós (komplex)* **A** *mátrix*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T} \quad (\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{H})$$

alakú felbontását **A** szinguláris érték szerinti felbontásának*, vagy röviden* szinguláris felbontásának *nevezzük, ha* **U** *és* **V** *ortogonális (unitér) és* **Σ** *diagonális, főátlójában monoton csökkenően rendezett nem negatív valós számokkal.*

10.6. példa (Szinguláris felbontás meghatározása). *Számítsuk ki az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix szinguláris értékeit, és írjuk fel szinguláris felbontásának összes változatát!

MEGOLDÁS. A szinguláris értékek megegyeznek $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ nemnulla saját-értékeinek gyökeivel.

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 20 & -14 & 4 \\ -14 & 17 & -10 \\ 4 & -10 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ennek karakterisztikus polinomja $x^3 - 45x^2 + 324x$, melynek gyökei 36, 9 és 0. Tehát a szinguláris értékek 6 és 3. Az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ mátrix egységnyi sajátvektorai:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 36 & \mathbf{v}_1 &= (2/3, -2/3, 1/3) \\ \lambda_2 &= \ \ 9 & \mathbf{v}_2 &= (2/3, 1/3, -2/3) \\ \lambda_3 &= \ \ 0 & \mathbf{v}_3 &= (1/3, 2/3, 2/3). \end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i$, ezért $\mathbf{u}_i = \mathbf{A}\mathbf{v}_i/\sigma_i$. Így kiszámolható $\mathbf{u}_1$ és $\mathbf{u}_2$ is:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \frac{\mathbf{A}\mathbf{v}_1}{\sigma_1} = \frac{(2,-4,4)}{6} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ \mathbf{u}_2 &= \frac{\mathbf{A}\mathbf{v}_2}{\sigma_2} = \frac{(-2,1,2)}{3} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

Az $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ rendszert még ki kell egészítenünk $\mathbb{R}^3$ bázisává. Egyik módszer az lehet, hogy mivel $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ az oszloptér bázisa, ezért a merőleges kiegészítő altérnek – vagyis $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ nullterének – bázisát keressük. A másik módszer a vektori szorzást alkalmazza, ami ilyen kis méretű példákban egyszerűbb lehet: $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = (-2/3, -2/3, -1/3)$. A szinguláris, a redukált szinguláris felbontás és annak diadikus alakja:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= 6\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4/3 & -4/3 & 2/3 \\ -8/3 & 8/3 & -4/3 \\ 8/3 & -8/3 & 4/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4/3 & -2/3 & 4/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 4/3 & 2/3 & -4/3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A felírásban az $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ mátrixból is kiemeltünk $\frac{1}{3}$-ot, de ez is a mátrixhoz tartozik – egyébként nem lenne ortogonális. □

Az $\mathbf{U}$ mátrix meghatározására egy további módszer is adódik. Az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ helyett vizsgáljuk meg az $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ mátrixot.

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\mathsf{T}(\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\mathsf{T}\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^\mathsf{T}\mathbf{U}^\mathsf{T} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}^\mathsf{T}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^\mathsf{T}.$$

Eszerint a szinguláris értékek az $\mathbf{AA}^\mathsf{T}$ mátrixból is meghatározhatók. Ennek pozitív sajátértékekhez tartozó sajátvektorai az $\mathbf{U}$ mátrix első r oszlopát adják.

Mivel $\mathbf{v}_i$ az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ mátrix σ_i^2 értékhez tartozó sajátvektora, ezért $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i^2\mathbf{v}_i$, másrészt $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i\mathbf{u}_i$, így e két összefüggést összevetve kapjuk, hogy $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \mathbf{A}^\mathsf{T}(\sigma_i\mathbf{u}_i) = \sigma_i^2\mathbf{v}_i$, azaz

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u}_i = \sigma_i\mathbf{v}_i, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u}_i}{\sigma_i}.$$

Érdemes lehet az $\mathbf{AA}^\mathsf{T}$ pozitív sajátértékekhez tartozó sajátvektorait keresni, ha $m < n$, mert ekkor csak m-dimenziós vektorokkal kell számolni (ld. a 10.3. feladatot).

10.7. tétel (Az SVD létezése és $\mathbf{\Sigma}$ egyértelműsége). *Minden valós vagy komplex mátrixnak létezik szinguláris érték szerinti felbontása. A szinguláris értékek monoton csökkenő sorozata egyértelmű, de a felbontás nem.*

Bizonyítás. Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ($\in \mathbb{C}^{m\times n}$), akkor $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix szimmetrikus ($\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A}$ önadjungált) és pozitív szemidefinit. Eszerint ortogonálisan (unitéren) diagonalizálható és a diagonális elemek nemnegatív valósok. A sajátvektorokból kiválasztható ortonormált bázis vektoraiból képzett $\mathbf{V}$ mátrix ortogonális (unitér). Korábban láttuk, hogy az $\mathbf{AV}$ nemnulla oszlopvektorai az $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$ egy ortonormált bázisával olyan $\mathbf{U}$ mátrixot adnak, melyekre $\mathbf{AV} = \mathbf{U\Sigma}$, azaz $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T}$ ($\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{H}$). $\mathbf{\Sigma}$ diagonális elemei az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ (komplex esetben $\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A}$) sajátértékeinek négyzetgyökei. Tehát a felbontás létezik.

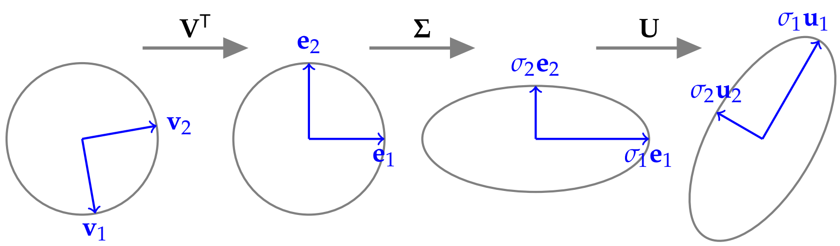
Másrészt, ha $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T}$ egy felbontás, akkor

$$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = (\mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T})^\mathsf{T}\mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T} = \mathbf{V\Sigma}^\mathsf{T}\mathbf{U}^\mathsf{T}\mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T} = \mathbf{V}(\mathbf{\Sigma}^\mathsf{T}\mathbf{\Sigma})\mathbf{V}^\mathsf{T},$$

tehát $\mathbf{V}$ elemei $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ ($\mathbf{A}^\mathsf{H}\mathbf{A}$) sajátvektorai, $\mathbf{\Sigma}$ elemei pedig a sajátértékeinek gyökei, ugyanis $\mathbf{\Sigma}^\mathsf{H}\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}^\mathsf{T}\mathbf{\Sigma} = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_r^2, 0, \ldots, 0)$. A sajátértékek egyértelműek, így a szinguláris értékek is. Minthogy a sajátvektorokból többféleképp is kiválasztható bázis, sem a $\mathbf{V}$, sem az $\mathbf{U}$ nem egyértelmű. □

Szinguláris felbontás geometriai interpretációja A szinguláris felbontás segítségével jól szemléltethető, hogy egy lineáris leképezés hatására mi a képe egy egységgömbnek.

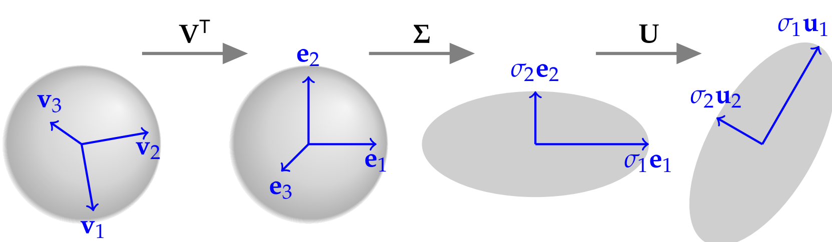
Először szemléltessük egy 2×2-es, valós, 2-rangú mátrix szinguláris felbontását, tényezőinek hatását ábrázolva. Mivel a felbontás $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T}$, először $\mathbf{V}^\mathsf{T}$ hat a sík vektoraira. $\mathbf{V}^\mathsf{T}$ ortogonális, tehát vagy egy forgatás, vagy egy tükrözés. Mivel $\mathbf{V}$ oszlopai épp a $\mathbf{v}_i$ vektorok, ezért $\mathbf{V}^\mathsf{T}\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i$. Ezután a $\mathbf{\Sigma}$ a két tengely irányában nyújt/összenyom:



10.1. ábra: Az egységkör képe. Legyen $\mathbf{A}$ egy 2×2-es, valós, 2-rangú mátrix. A $\mathbf{v}_i \mapsto \mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i\mathbf{u}_i$ leképezés hatása az egységkörön lépésenként jól szemléltethető: $\mathbf{V}^\mathsf{T}\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i$, $\mathbf{\Sigma}\mathbf{e}_i = \sigma_i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{U}\sigma\mathbf{e}_i = \sigma\mathbf{U}\mathbf{e}_i = \sigma\mathbf{u}_i$, azaz $\mathbf{V}^\mathsf{T}$ a $\{\mathbf{v}_i\}$ bázist a standardba viszi ortogonális leképezéssel, ott $\mathbf{\Sigma}$ tengelyirányban nyújtja/összenyomja, végül az ortogonális $\mathbf{U}$ hat rá.

$\mathbf{\Sigma}\mathbf{e}_i = \sigma_i\mathbf{e}_i$. Végül $\mathbf{U}$ ismét egy forgatás vagy tükrözés: $\mathbf{U}\sigma\mathbf{e}_i = \sigma\mathbf{U}\mathbf{e}_i = \sigma\mathbf{u}_i$.

Ezután szemléltessük egy 2×3-as, valós, 2-rangú mátrix szinguláris felbontását. Először $\mathbf{V}^\mathsf{T}$ hat a tér vektoraira. $\mathbf{V}^\mathsf{T}$ ortogonális, és a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ortonormált bázist a standard bázisba viszi: $\mathbf{V}^\mathsf{T}\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Ezután a $\mathbf{\Sigma}$ a két első tengely irányában nyújt/összenyom: $\mathbf{\Sigma}\mathbf{e}_i = \sigma_i\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2)$, azonban a harmadik tengely irányával párhuzamosan vetít: $\mathbf{\Sigma}\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$. A kép itt nem egy ellipszisvonal, hanem a teljes általa határolt tartomány. Végül az ortogonális $\mathbf{U}$ ezt elforgatja vagy tükrözi egy egyenesre.



10.2. ábra: Az egységgömb képe. Legyen $\mathbf{A}$ egy 2×3-as, valós, 2-rangú mátrix. A $\mathbf{v}_i \mapsto \mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i\mathbf{u}_i$ leképezés hatása az egységgömb felületén: $\mathbf{V}^\mathsf{T}\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2, 3)$, $\mathbf{\Sigma}\mathbf{e}_i = \sigma_i\mathbf{e}_i$ $(i = 1, 2)$, $\mathbf{U}\sigma\mathbf{e}_i = \sigma\mathbf{U}\mathbf{e}_i = \sigma\mathbf{u}_i$, azaz $\mathbf{V}^\mathsf{T}$ a $\{\mathbf{v}_i\}$ bázist a standardba viszi, ott $\mathbf{\Sigma}$ az első két tengelyirányban nyújtja/összenyomja, de a harmadik tengelyirányban vetít, így a gömbfelület képe egy ellipszistartomány, amire végül $\mathbf{U}$ hat.

10.8. TÉTEL (EGYSÉGGÖMB KÉPE). *Legyen $\mathbf{A}$ egy r-rangú, $m \times n$-es valós mátrix. Az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ leképezés $\mathbb{R}^n$ egységgömbjének felületét, azaz az $\mathbf{e}^\mathsf{T}\mathbf{e} = 1$ egyenletet kielégítő pontokat az $\mathbb{R}^m$ egy r-dimenziós altere*

a) egy ellipszoidjának felületére képzi, ha $r = n$, és

b) egy ellipszoidja által határolt tartományára képzi, ha $r < n$.

BIZONYÍTÁS. Tekintsük $\mathbf{A}$ szinguláris felbontásának diadikus alakját:

$$\mathbf{A} = \sigma_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^\mathsf{T} + \sigma_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^\mathsf{T} + \cdots + \sigma_r\mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^\mathsf{T}.$$

Ha $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ egy egységvektor, akkor $\mathbf{V}^\mathsf{T}\mathbf{e}$ is egységvektor, azaz $(\mathbf{v}_1^\mathsf{T}\mathbf{e})^2 + (\mathbf{v}_2^\mathsf{T}\mathbf{e})^2 + \cdots + (\mathbf{v}_n^\mathsf{T}\mathbf{e})^2 = 1$, hisz $\mathbf{V}$ ortogonális mátrix. Így a fenti diadikus alakot használva

$$\begin{aligned}\mathbf{Ae} &= \sigma_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1^\mathsf{T}\mathbf{e} + \sigma_2\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2^\mathsf{T}\mathbf{e} + \cdots + \sigma_r\mathbf{u}_r\mathbf{v}_r^\mathsf{T}\mathbf{e}\\ &= (\sigma_1\mathbf{v}_1^\mathsf{T}\mathbf{e})\mathbf{u}_1 + (\sigma_2\mathbf{v}_2^\mathsf{T}\mathbf{e})\mathbf{u}_2 + \cdots + (\sigma_r\mathbf{v}_r^\mathsf{T}\mathbf{e})\mathbf{u}_r\\ &= x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \cdots + x_r\mathbf{u}_r,\end{aligned}$$

ahol $x_i = \sigma_i\mathbf{v}_i^\mathsf{T}\mathbf{e}$ ($i = 1, 2, \ldots, r$). Legyen $x_i = 0$, ha $i = r+1, \ldots, m$ és $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ értékadással kapjuk, hogy $\mathbf{Ae} = \mathbf{Ux}$. Így $\mathbf{U}$ ortogonalitása miatt $|\mathbf{Ae}| = |\mathbf{Ux}| = |\mathbf{x}|$. Ennek alapján fölírható az az egyenlet, melyet $\mathbf{Ae}$ pontjai kielégítenek, mivel

$$\begin{aligned}\left(\frac{x_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sigma_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_r}{\sigma_r}\right)^2 &= (\mathbf{v}_1^\mathsf{T}\mathbf{e})^2 + (\mathbf{v}_2^\mathsf{T}\mathbf{e})^2 + \cdots + (\mathbf{v}_r^\mathsf{T}\mathbf{e})^2\\ &\le (\mathbf{v}_1^\mathsf{T}\mathbf{e})^2 + (\mathbf{v}_2^\mathsf{T}\mathbf{e})^2 + \cdots + (\mathbf{v}_n^\mathsf{T}\mathbf{e})^2 = 1.\end{aligned}$$

Eszerint az egyenlet

$$\begin{aligned}\left(\frac{x_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sigma_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_r}{\sigma_r}\right)^2 &= 1, \quad \text{ha } r = n,\\ \left(\frac{x_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sigma_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_r}{\sigma_r}\right)^2 &\le 1, \quad \text{ha } r < n.\end{aligned}$$ □

Polárfelbontás A komplex számok exponenciális alakja – azaz az $re^{i\varphi}$ alak – egy nemnegatív nyújtási tényező (r) és egy egységnyi abszolút értékű komplex szám ($e^{i\varphi}$, ami a komplex síkon φ-vel való forgatás) szorzata. A komplex síkon e szám polárkoordinátás alakja (r, φ). Az analóg mátrixfelbontás több mérnöki alkalmazásban, pl. az anyagtranszformációk leírásánál használható.

Polárfelbontáson egy négyzetes mátrixnak egy pozitív szemidefinit és egy ortogonális mátrix szorzatára való felbontását értjük.

10.9. tétel (Polárfelbontás). *Bármely komplex (valós) négyzetes* $\mathbf{A}$ *mátrix előáll*

$$\mathbf{A} = \mathbf{PQ}$$

alakban, ahol $\mathbf{P}$ *pozitív szemidefinit önadjungált (szimmetrikus) mátrix,* $\mathbf{Q}$ *pedig unitér (ortogonális). Ha* $\mathbf{A}$ *invertálható, akkor* $\mathbf{P}$ *pozitív definit, és a felbontás egyértelmű.*

Bizonyítás. A felbontás az $\mathbf{A}$ szinguláris felbontásából megkapható:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{H} = \mathbf{U\Sigma U}^\mathsf{H}\mathbf{UV}^\mathsf{H} = (\mathbf{U\Sigma U}^\mathsf{H})(\mathbf{UV}^\mathsf{H}),$$

ahonnan $\mathbf{P} = \mathbf{U\Sigma U}^\mathsf{H}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{UV}^\mathsf{H}$. $\mathbf{P}$ önadjungált, hisz $(\mathbf{U\Sigma U}^\mathsf{H})^\mathsf{H} = \mathbf{U\Sigma}^\mathsf{H}\mathbf{U}^\mathsf{H} = \mathbf{U\Sigma U}^\mathsf{H}$. A $\mathbf{P}$ pozitív szemidefinit, hisz hasonló a pozitív szemidefinit $\mathbf{\Sigma}$ mátrixhoz. Amennyiben $\mathbf{A}$ invertálható, akkor $\mathbf{\Sigma}$ pozitív definit.

$\mathbf{Q}$ unitér (ortogonális), hisz két unitér (ortogonális) mátrix szorzata. A $\mathbf{P}$ egyértelmű (nem csak akkor, ha pozitív definit), ugyanis

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}} = \mathbf{P}\mathbf{Q}\mathbf{Q}^{\mathsf{H}}\mathbf{P}^{\mathsf{H}} = \mathbf{P}\mathbf{P}^{\mathsf{H}} = \mathbf{P}^2,$$

azaz $\mathbf{P} = \sqrt{\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}}$, és pozitív szemidefinit önadjungált mátrix négyzetgyöke egyértelmű az önadjungált pozitív szemidefinit mátrixok körében (ld. a pozitív szemidefinit mátrixok faktorizációiról szóló 9.21. tétel *b)* pontját). Ha $\mathbf{P}$ pozitív definit, akkor invertálható, így $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}$ is egyértelmű. □

► A polárfelbontás nem csak analóg a komplex számok exponenciális alakjával, de még determinánsa is épp ezt az alakot adja: ha $\det \mathbf{P} = r$, $\det \mathbf{Q} = e^{i\varphi}$ (hisz $\mathbf{Q}$ unitér, így determinánsának abszolút értéke 1), akkor $\det \mathbf{A} = re^{i\varphi}$.

► Hasonló állítás mondható fordított sorrenddel is, ráadásul azonos unitér (ortogonális) mátrixszal, hisz

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathsf{H}} = \mathbf{U}\mathbf{V}^{\mathsf{H}}\mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathsf{H}} = (\mathbf{U}\mathbf{V}^{\mathsf{H}})(\mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathsf{H}}) = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{P}},$$

azaz létezik olyan pozitív szemidefinit önadjungált $\hat{\mathbf{P}}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{P}}$.

► Valós térben a polárfelbontás geometriai jelentése az, hogy minden mátrixleképezés két olyan leképezés kompozíciójaként áll elő, amelyekből az egyik forgatja vagy forgatva tükrözi a teret ($\mathbf{Q}$), a másik pedig egy ortonormált bázis tengelyei mentén nyújtja/összenyomja a teret minden tengelyirányban egy-egy nemnegatív tényező szerint.

10.10. PÉLDA (POLÁRFELBONTÁS KISZÁMÍTÁSA). *Számítsuk ki a 10.6. példában is szereplő*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix $\mathbf{PQ}$ *és* $\mathbf{Q}\hat{\mathbf{P}}$ *alakú polárfelbontását!*

MEGOLDÁS. A 10.6. példában megadtuk a valós $\mathbf{A}$ mátrix szinguláris felbontását. Így a $\mathbf{P} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{U}^{\mathsf{T}}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{U}\mathbf{V}^{\mathsf{T}}$, $\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{V}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{\mathsf{H}}$ képletekbe való helyettesítés megadja a választ:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} = \mathbf{PQ} &= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4/9 & -8/9 & 1/9 \\ -4/9 & 1/9 & -8/9 \\ 7/9 & -4/9 & -4/9 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{Q}\hat{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} -4/9 & -8/9 & 1/9 \\ -4/9 & 1/9 & -8/9 \\ 7/9 & -4/9 & -4/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Ha azonban figyelmesen nézzük az eredményt, más megoldást is találunk, hisz $\mathbf{P}$ és $\hat{\mathbf{P}}$ az $\mathbf{A}$-ból sor- és oszlopcserékkel is megkapható:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Pszeudoinverz A szinguláris felbontás egy új lehetőséget ad a pszeudoinverz kiszámítására.

A 7.62. *e)* pontjának azonnali következménye, hogy ha $\mathbf{\Sigma}$ az $\mathbf{A}$ mátrix diagonális alakja a szinguláris felbontásában, akkor $\mathbf{\Sigma}^+$ főátlójának i-edik eleme $1/\sigma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, minden más elem 0.

10.11. tétel (A pszeudoinverz kiszámítása). *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy valós mátrix és legyen a redukált szinguláris felbontása* $\mathbf{A} = \mathbf{U}_1\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^\mathsf{T}$, *a szinguláris felbontása* $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{T}$. *Ekkor*

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}_1\mathbf{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{U}_1^\mathsf{T} = \mathbf{V\Sigma}^+\mathbf{U}^\mathsf{T}.$$

Bizonyítás. Az $\mathbf{A} = \mathbf{U}_1(\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^\mathsf{T})$ felbontásban $\mathbf{U}_1$ teljes oszloprangú, $\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^\mathsf{T}$ teljes sorrangú, így alkalmazható $\mathbf{A}$-ra a (7.15) képlet. Eszerint

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^+ &= (\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^\mathsf{T})^\mathsf{T}\left(\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^\mathsf{T}(\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^\mathsf{T})^\mathsf{T}\right)^{-1}\left(\mathbf{U}_1^\mathsf{T}\mathbf{U}_1\right)^{-1}\mathbf{U}_1^\mathsf{T} = \mathbf{V}_1\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{\Sigma}_1^{-2}\mathbf{U}_1^\mathsf{T} \\ &= \mathbf{V}_1\mathbf{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{U}_1^\mathsf{T}.\end{aligned}$$

Ebből következik a másik egyenlőség is, mivel

$$\mathbf{V\Sigma}^+\mathbf{U}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_1^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{U}_2^\mathsf{T} \end{bmatrix} = \mathbf{V}_1\mathbf{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{U}_1^\mathsf{T}. \qquad \square$$

► Komplex mátrixokra is definiálható a pszeudoinverz, és a kiszámítására vonatkozó képlet használható a transzponált adjungáltra cserélésével. Így ha $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^\mathsf{H} = \mathbf{U}_1\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{V}_1^\mathsf{H}$ az $\mathbf{A}$ két szinguláris felbontása, akkor $\mathbf{A}^+ = \mathbf{V\Sigma}^+\mathbf{U}^\mathsf{H} = \mathbf{V}_1\mathbf{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{U}_1^\mathsf{H}$.

10.12. példa (A pszeudoinverz kiszámítása SVD-ből). *Számítsuk ki a 10.6. példában szereplő* $\mathbf{A}$ *mátrix pszeudoinverzét!*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Érdemes a redukált alakot használni, mert kevesebb számolást igényel. A 10.6. példában meghatároztuk az $\mathbf{A}$ mátrix redukált szinguláris felbontását:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

amiből a pszeudoinverzet megadó $\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}_1\mathbf{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{U}_1^\mathsf{T}$ képlettel

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & 0 & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \end{bmatrix}. \square$$

Feladatok

10.1. Szinguláris felbontások Az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix}1&1&0\\1&1&0\end{smallmatrix}\right]$ mátrixnak egyetlen szinguláris értéke van, $\sigma_1 = 2$. Igazoljuk, hogy az

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|cc}2&0&0\\\hline 0&0&0\end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\hline -\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\hline 0&0&1\end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}[2]\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\end{bmatrix}$$

felbontások az $\mathbf{A}$ mátrix szinguláris és redukált szinguláris felbontásai. (Segítségül a szinguláris felbontásban a blokkstruktúrát is jelöltük.)

10.2. Számítsuk ki az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0&1\\1&1\\1&0\end{bmatrix}$$

mátrix szinguláris érték szerinti felbontását!

10.3. Számítsuk ki a

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

mátrix szinguláris érték szerinti felbontását!

10.4. Számítsuk ki a 10.2. feladatban szereplő

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}0&1\\1&1\\1&0\end{bmatrix}$$

mátrix pszeudoinverzét!

Vektor- és mátrixnorma

A vektorokhoz hasonlóan a mátrixok bizonyos tulajdonságainak – például sorozataik konvergenciájának – vizsgálatában is hasznosak az olyan mennyiségek, melyek a köztük lévő különbségeket a távolságra emlékeztető módon mérik. Ehhez az abszolút érték fogalmának általánosításán keresztül vezet út. A mátrixnormák intim kapcsolatban vannak a szinguláris értékekkel.

Vektornorma

Vektor abszolút értéke – az euklideszi norma A 2- és 3-dimenziós vektorok abszolút értékéről a vektor megadásáról szóló paragrafusban beszéltünk először, majd az n-dimenziós terekre is kiterjesztettük e fogalmat. Ennek segítségével két vektor távolságát is definiálni tudtuk. A következőkben olyan – az alkalmazásokban is fontos – függvényeket definiálunk, amelyek az abszolút érték „origótól való távolság” tulajdonságát általánosítják. E függvényeket *normának* nevezzük. Mindenekelőtt ilyen nevet adunk a vektor abszolút értékének is, és egyúttal valós vektorokról komplexekre is kiterjesztjük a definíciót.

10.13. DEFINÍCIÓ (EUKLIDESZI NORMA). *Az* $\mathbf{x}$ *vektor* euklideszi normája *vagy más néven abszolút értéke*

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x}}, \qquad \text{ha } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{10.4}$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{\mathbf{x}^\mathsf{H}\mathbf{x}}, \qquad \text{ha } \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n. \tag{10.5}$$

Például az $\mathbf{x} = (1+\mathrm{i}, 1-2\mathrm{i}, 3)$ vektor euklideszi normája

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i}) + (1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i}) + 3^2} = \sqrt{2+5+9} = 4.$$

► Vektor euklideszi normájára az $|.|$, $\|.\|$ és a $\|.\|_2$ jelölések egyaránt használatosak.

► A komplex vektorokra adott definíciónak a valós speciális esete, így akár ez az egy is megfelelne.

► Ha $\mathbf{x}$ egy tetszőleges nemzérus vektor, akkor $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|_2$ egységvektor. Egy vektorból az azonos irányú egységvektor ilyen módon való képzését *normálásnak* nevezzük, és azt mondjuk, hogy az $\mathbf{x}$ vektort *normáljuk*.

A p-norma Két pont közti távolság mérésére néha egészen szokatlan mértéket kell használnunk. Ha egy négyzethálós utcaszerkezetű város egy kereszteződésében állunk, akkor egy x háznyival keletre és y

háznyival északra fekvő ponthoz vezető legrövidebb út hossza gyalog vagy taxival $x + y$ háznyi. E „mérték” szerint az origóból az (x, y) koordinátájú kereszteződéshez vezető legrövidebb út hossza $|x| + |y|$. Mivel itt csak a koordináta-rendszer rácsvonalain haladhatunk, szokás e normát *rácsnormának* nevezni (angolszász tankönyvekben *Manhattan norm* vagy *taxicab norm*).

Egy másik normához jutunk a következő számítógépes képméretező feladattal. Ki van jelölve egy kép közepe. Egy (x, y) képpont tőle való távolsága legyen az a legkisebb c szám, hogy e pont a $(-c, -c)$ és (c, c) pontok által meghatározott négyzetbe még épp beleférjen. Világos, hogy $c = \max\{|x|, |y|\}$. E normát *maximum normának* is nevezik.

Az euklideszi norma, a rácsnorma és a maximum norma is származtatható a következő általánosabb normából:

10.14. DEFINÍCIÓ (p-NORMA). *A $p \geq 1$ valósra az $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ vektor p-normája $\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$, míg ennek határértéke a ∞-norma, azaz $\|\mathbf{x}\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|\mathbf{x}\|_p$.*

Például $\|(3,4,5)\|_3 = \sqrt[3]{27+64+125} = 6$, $\|(1+\mathrm{i}, \mathrm{i}, 0)\|_1 = 1 + \sqrt{2}$.

► Világos, hogy a 2-norma megegyezik az euklideszi-normával, az 1-norma a rácsnormával.

► A maximum norma megegyezik a ∞-normával, azaz

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|\mathbf{x}\|_p = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} = \max_i |x_i|.$$

Ennek bizonyításához jelöljük a legnagyobb abszolút értékű koordinátát $x_{\max}$-szal. Ekkor minden x_i koordinátára $|x_i|/|x_{\max}| \leq 1$, és így

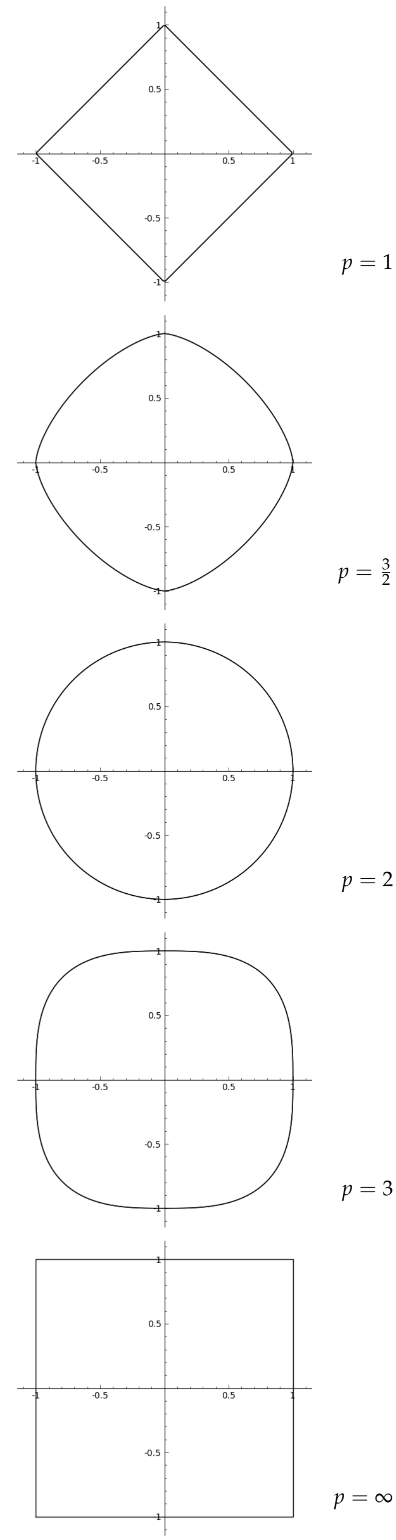
$$1 \leq \sum_{i=1}^n |x_i/x_{\max}|^p \leq n.$$

Mindegyik kifejezést $1/p$-edik hatványra emelve, majd $|x_{\max}|$-szal beszorozva kapjuk, hogy

$$|x_{\max}| \leq |x_{\max}| \left(\sum_{i=1}^n \left|\frac{x_i}{x_{\max}}\right|^p\right)^{1/p} \leq |x_{\max}| n^{1/p},$$

és $n^{1/p} \to 1$, ha $p \to \infty$, ami bizonyítja az állítást.

► Érdekes megtekinteni az origótól valamely normában egységnyi távolságra lévő pontok halmazát, vagyis az egységgömböt. A 10.3 ábra az 1-, $\frac{3}{2}$-, 2-, 3- és ∞-normához tartozó egységköröket (2-dimenziós egységgömböket) mutatja.



10.3. ábra: Az 1-normájú pontok mértani helye, azaz az egységkörök $p = 1$, $p = 3/2$, $p = 2$, $p = 3$ és $p = \infty$ esetén.

A norma általános fogalma Az előzőekben az abszolút értékhez – vagyis az origótól való távolsághoz – kerestünk hasonló függvényt. Kérdés azonban, hogy milyen tulajdonságok fontosak a számunkra, melyeket akarunk megőrizni. Az abszolút értékkel definiált távolság használatakor a következő tulajdonságok tűnnek lényegesnek:

(a) $|\mathbf{x}| \geq 0$, azaz vektor abszolút értéke *nem negatív*.

(b) $|\mathbf{x}| = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ennek fontos tartalma, hogy a $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ képlettel definiált távolságfüggvény *szeparálja a pontokat*, azaz két különböző pont távolsága sosem 0.

(c) $|c\mathbf{x}| = |c||\mathbf{x}|$, ami a lineáris leképezéseknél megismert homogenitásra emlékeztető tulajdonság: szokás *pozitív homogenitásnak* nevezni.

(d) $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$, amit *háromszög-egyenlőtlenség* néven ismerünk.

E tulajdonságok a következő definícióhoz vezetnek:

10.15. DEFINÍCIÓ (NORMA). *Egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, vagy $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ függvényt* normának *nevezünk, ha fennállnak a következők:*

1. *$f(\mathbf{x}) \geq 0$ minden $\mathbf{x}$ vektorra, és $f(\mathbf{x}) = 0$ pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,*
2. *$f(c\mathbf{x}) = |c| f(\mathbf{x})$ minden $\mathbf{x}$ vektorra,*
3. *$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$.*

Az $f(\mathbf{x})$ értéket $\mathbf{x}$ normájának nevezzük.

► A normát általában az abszolút értékre emlékeztető $\| \ \|$ zárójellel jelöljük, azaz $\mathbf{x}$ normáját $\|\mathbf{x}\|$ jelöli. E jelöléssel tehát a norma egy $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, vagy $\|.\| : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ függvény.

► $\|\mathbf{x}\| = \|-\mathbf{x}\|$ bármely $\|.\|$ normára igaz, hisz $\|-\mathbf{x}\| = |-1| \, \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$.

► Hasznos a háromszög-egyenlőtlenség különbségre fölírt következő alakja:

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| \geq \Big| \|\mathbf{z}\| - \|\mathbf{x}\| \Big| \tag{10.6}$$

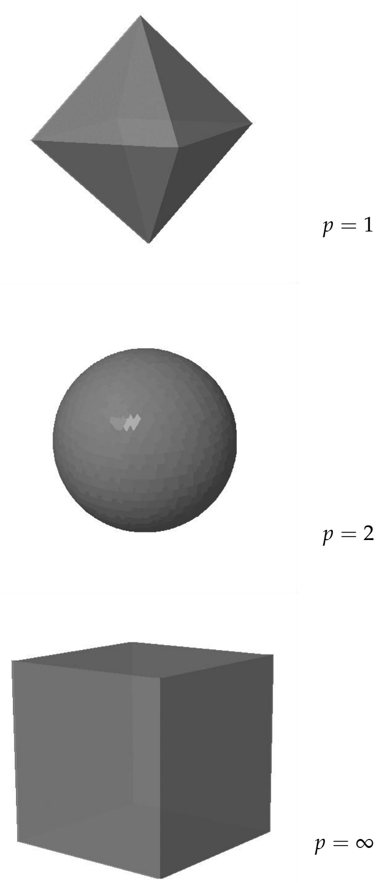
Ez a következőképp igazolható: legyen $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, ekkor a háromszög-egyenlőtlenségből kapjuk, hogy $\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| \geq \|\mathbf{z}\| - \|\mathbf{x}\|$, de $\mathbf{x}$ és $\mathbf{z}$ szerepét fölcserélve $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| \geq \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{z}\|$ is igaz, így $\|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|$ igazolja az egyenlőtlenséget.

► Axiomatikus felépítésben kevesebb is megkövetelhető a norma definíciójában, nevezetesen az első pont egyszerűbbre cserélhető:

1′ ha $f(\mathbf{x}) = 0$, akkor $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,
2′ $f(c\mathbf{x}) = |c| f(\mathbf{x})$ minden $\mathbf{x}$ vektorra,
3′ $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$.

A definíció utolsó két tulajdonságából adódik, hogy bármely $\mathbf{x}$ vektorra $f(\mathbf{x}) \geq 0$, és $f(\mathbf{0}) = 0$, így 1.–3. ekvivalens 1′–3′-vel (ld. a 10.6. feladat).

► A p-norma minden $1 \leq p \leq \infty$ esetben norma. Ennek bizonyítása meglehetősen technikai jellegű, ezért csak a feladatok közt közöljük (ld. 10.15.). A bizonyítás két nevezetes egyenlőtlenségre – a Hölder- és a Minkowski-egyenlőtlenségre – épül, melyeket ugyancsak feladat-



10.4. ábra: Az 1-normájú pontok mértani helye a térben, azaz az egységgömbök $p = 1$, $p = 2$ és $p = \infty$ esetén.

ként tűzünk ki (ld. 10.13., 10.14.). Valójában a *Minkowski-egyenlőtlenség* maga a háromszög-egyenlőtlenség:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_p \le \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p \,. \tag{10.7}$$

A *Hölder-egyenlőtlenség* a CBS-egyenlőtlenség általánosítása:

$$|\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{y}| \le \|\mathbf{x}\|_p \, \|\mathbf{y}\|_q \,, \text{ ahol } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{10.8}$$

► A legfontosabb esetekben, vagyis a $p=1$, $p=2$ és $p=\infty$ esetben annak bizonyítása, hogy a p-norma norma, eddigi ismereteinket felhasználva egyszerű, ezért annak meggondolását minden olvasónak ajánljuk (ld. 10.7., 10.8. feladatok).
► Normából további normák származtathatóak. Ha $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$ egy norma, és A egy egy-egy értelmű lineáris leképezés, akkor az $\mathbf{x} \mapsto \|A\mathbf{x}\|$ leképezés is norma (10.11. feladat), továbbá norma az

$$\mathbf{x} \mapsto \sup_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}$$

függvény is (ld. 10.12.).
► Azonnal látszik, hogy

$$\max_i\{|x_i|\} \le \sqrt{|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2} \le |x_1|+\cdots+|x_n|$$

azaz

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_2 \le \|\mathbf{x}\|_1 \,. \tag{10.9}$$

Másrészt az is könnyen igazolható (ld. 10.9., hogy

$$\|\mathbf{x}\|_1 \le \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_2 \,, \; \|\mathbf{x}\|_2 \le \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_\infty \text{ és } \|\mathbf{x}\|_1 \le n\,\|\mathbf{x}\|_\infty \,. \tag{10.10}$$

Ezek az egyenlőtlenségek vezetnek a normák ekvivalenciájának fogalmához, ami a következő paragrafus témája.
► Minden norma folytonos függvény. Ez például a a (10.6) egyenlőtlenségnek és a (10.10) első becslésének következménye (ld. 10.10. feladat).

Vektornormák ekvivalenciája A (10.9) és a (10.10) egyenlőtlenségek szerint

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_1 \text{ és } \|\mathbf{x}\|_1 \le n\,\|\mathbf{x}\|_\infty \,,$$

vagyis mindkét normának felső korlátját adja a másik egy megfelelő konstansszorosa. Ez azt jelenti, hogy például a konvergenciakérdések eldöntésében e két norma egyformán viselkedik, vagyis egy vektorsorozat pontosan akkor konvergens az egyik szerint, ha a másik szerint is.

10.16. DEFINÍCIÓ (NORMÁK EKVIVALENCIÁJA). *Azt mondjuk, hogy az* $\|.\|_a$ *és* $\|.\|_b$ *normák ekvivalensek, ha van olyan c és d pozitív valós szám, hogy* $\|.\|_a \le c\,\|.\|_b$ *és* $\|.\|_b \le d\,\|.\|_a$.

► Könnyen látható, hogy a normák ekvivalenciája valóban ekvivalencia reláció.

► A (10.9) és a (10.10) egyenlőtlenségek azt mutatják, hogy az 1-, 2- és ∞-normák mind ekvivalensek.

10.17. TÉTEL (MINDEN VEKTORNORMA EKVIVALENS). *Legyen* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *vagy* $\mathbb{R}$. *A* $\mathbb{K}^n$ *téren értelmezett bármely két norma ekvivalens.*

BIZONYÍTÁS. Megmutatjuk, hogy tetszőleges $\mathbb{K}^n$-en értelmezett $\|.\|$ norma ekvivalens az 1-normával. Ebből azonnal következik, hogy bármely két norma ekvivalens egymással.

A háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazva az $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$ felbontásra kapjuk, hogy

$$\|\mathbf{x}\| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,\|\mathbf{e}_i\| \le c\sum_{i=1}^{n} |x_i| = c\,\|\mathbf{x}\|_1\,,$$

ahol $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ a standrad bázis, és $c = \max_i \|\mathbf{e}_i\|$. Ezzel bizonyítottuk, hogy $\|\mathbf{x}\| \le c\,\|\mathbf{x}\|_1$.

Az $\|\mathbf{x}\|_1 \le d\,\|\mathbf{x}\|$ egyenlőtlenség bizonyításához meg kell mutatnunk, hogy $\|\mathbf{x}\|_1 / \|\mathbf{x}\|$ felülről korlátos a nemnulla vektorok halmazán. Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy van olyan $\{\mathbf{x}_k\}$ sorozat, hogy $\|\mathbf{x}_k\|_1 / \|\mathbf{x}_k\| \to \infty$, ha $k \to \infty$. Ekkor $\|\mathbf{x}_k\| / \|\mathbf{x}_k\|_1 \to 0$, azaz az $\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k / \|\mathbf{x}_k\|_1$ olyan sorozat, hogy $\|\mathbf{y}_k\| \to 0$, és $\|\mathbf{y}_k\|_1 = 1$. Mivel az 1-normájú egységgömb korlátos, ezért feltételezhető, hogy az $\mathbf{y}_k$ sorozat konvergens (egyébként vegyük egy konvergens részsorozatát), melynek $\mathbf{y}$-nal jelölt határértéke is az egységgömbön van, azaz $\|\mathbf{y}\|_1 = 1$, így $\mathbf{y} \ne \mathbf{0}$. Másrészt $\|.\|$ folytonos, így $\|\mathbf{y}_k\| \to \|\mathbf{y}\|$, tehát $\|\mathbf{y}\| = 0$, ami ellentmondás. □

► Fölvetődik a kérdés, hogy ha az összes norma ekvivalens, akkor mi értelme bevezetni normák ekvivalenciájának fogalmát. A válasz az, hogy az ekvivalenciát csak véges dimenziós terekre bizonyítottuk, és valóban, végtelen dimenziós terekben nem teljesül. Az viszont fontos következmény, hogy véges dimenziós terekben vektorok konvergenciakérdéseinek eldöntéséhez mindig olyan normát választhatunk, ami a legkényelmesebben használható, hisz az eredmény a normaválasztástól független.

Mátrixnorma

Vektornormák mátrixokon Egy $m \times n$-es mátrix tekinthető egy mn-dimenziós vektornak is, így a vektorokra definiált normák mátrixokra is alkalmazhatók. Ezek között legfontosabb a 2-norma mátrixokra való kiterjesztése, mely több ekvivalens alakban is felírható.

10.18. DEFINÍCIÓ (FROBENIUS-NORMA). *Az* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *mátrix* Frobenius-normája

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \|\mathbf{A}_{i*}\|_2^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \|\mathbf{A}_{*j}\|_2^2}.$$

Itt azért nem a 2-norma elnevezést használjuk, mert azt más normára tartogatjuk. A Frobenius-norma további módokon is számolható:

10.19. TÉTEL (FROBENIUS-NORMA EKVIVALENS ALAKJAI).

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\operatorname{trace}(\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i^2}. \tag{10.11}$$

BIZONYÍTÁS. Az első alak azonnal következik a nyom definíciójából, hisz $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$ átlójának j-edik eleme éppen $\|\mathbf{A}_{*j}\|_2^2$-tel egyezik meg. Egy mátrix nyoma megegyezik sajátértékeinek összegével, az $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$ sajátértékei pedig megegyeznek az $\mathbf{A}$ szinguláris értékeinek négyzeteivel, ami bizonyítja az állítás második egyenlőségét. □

Egy vektornorma akkor nyújthat igazán hasznos információt a mátrixokról is, ha valamilyen módon kapcsolatban van a mátrix olyan sajátosságaival, ami mn-dimenziós vektorként nehezen leírható. A mátrixszal való szorzás például ilyen. A vektorok 2-normája és a mátrixok Frobenius-normája közt például a következő összefüggés áll fenn:

10.20. ÁLLÍTÁS. *Bármely* $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ *vektorra és* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *mátrixra*

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 \le \|\mathbf{A}\|_F \|\mathbf{x}\|_2 . \tag{10.12}$$

BIZONYÍTÁS. Igazolására a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenséget alkalmazzuk:

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{A}_{i*}\mathbf{x}|^2 \le \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{A}_{i*}\|_2^2 \|\mathbf{x}\|_2^2 = \|\mathbf{A}\|_F^2 \|\mathbf{x}\|_2^2 .$$

□

► E tulajdonság általában nem igaz minden mátrixokra alkalmazott vektornormára. Tekintsük a maximum normát, melyet a következőképp vihetünk át mátrixokra:

$$\|\mathbf{A}\|_{\max} = \max_{i,j}\{|a_{ij}|\}.$$

Az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix maximum normája 2. E mátrix különböző vektorokkal vett szorzatának normája és a normák szorzata közt mindhárom reláció fennállhat. Például az

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

szorzatokban a normákra a $2 \cdot 1 > 1$, $2 \cdot 1 = 2$, $2 \cdot 1 < 3$ relációk teljesülnek.

► A (10.12) tulajdonság azonnali következménye, hogy

$$\|\mathbf{AB}\|_F \le \|\mathbf{A}\|_F \|\mathbf{B}\|_F$$

igaz bármely $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ és $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times k}$ mátrixokra. E tulajdonság meg fog jelenni a mátrixnorma általános definíciójában.

A mátrixnorma általános fogalma A vektornormák alkalmazhatók mátrixokra is. Sok könyv azonban – és így teszünk mi is – egy normát csak akkor tekint mátrixnormának, ha a vektornorma axiómái mellett egy mátrixszorzásra vonatkozónak is eleget tesz.

10.21. DEFINÍCIÓ (MÁTRIXNORMA). *Legyen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$. Egy $\mathbb{K}$ fölötti mátrixokon értelmezett valós értékű $\|.\|$ függvény* mátrixnorma*, ha tetszőleges azonos méretű $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixra és összeszorozható $\mathbf{A}$ és $\mathbf{C}$ mátrixra*

1. $\|\mathbf{A}\| \ge 0$, *és* $\|\mathbf{A}\| = 0$ *pontosan akkor áll fenn, ha* $\mathbf{A} = \mathbf{O}$,
2. $\|c\mathbf{A}\| = |c|\,\|\mathbf{A}\|$,
3. $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\| \le \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$,
4. $\|\mathbf{AC}\| \le \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{C}\|$.

A korábbiak szerint tehát a Frobenius-norma mátrixnorma, míg a maximum normát nem tekintjük mátrixnormának.

10.22. DEFINÍCIÓ. *Azt mondjuk, hogy a $\|.\|_M$ mátrixnorma valamint a $\|.\|_a$ vektornorma* illeszkedik *vagy* konzisztensek*, ha tetszőleges $\mathbf{A}$ mátrixra és megfelelő dimenziójú $\mathbf{x}$ vektorra*

$$\|\mathbf{Ax}\|_a \le \|\mathbf{A}\|_M \|\mathbf{x}\|_a .$$

Például (10.12) szerint a Frobenius-norma illeszkedik a 2-normához.

Indukált norma E paragrafusban vektornormákból kiindulva újabb mátrixnormákhoz jutunk.

10.23. DEFINÍCIÓ (INDUKÁLT NORMA). *Legyen $\|.\|$ egy tetszőleges vektornorma. Ekkor az*

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{Ax}\| \tag{10.13}$$

egyenlőséggel definiált függvényt a vektornorma által indukált *mátrixnormának nevezzük.*

▶ Az indukált mátrixnormára a vektornorma jelölését szokás használni, így például a mátrix p-norma definíciója

$$\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p .$$

▶ Ha mátrix helyett lineáris leképezésre értelmezzük a fenti definíciót, *operátornormáról* beszélünk.
▶ A normák ekvivalenciájából következik, hogy bármely normában az egységgömb korlátos és zárt. Így a rajta értelmezett folytonos $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ függvénynek van maximuma és minimuma, tehát a definíció értelmes.
▶ Az előző megjegyzést is figyelembe véve könnyen igazolható, hogy a definíció a következő ekvivalens alakokba is átírható:

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\|\mathbf{x}\|\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}. \tag{10.14}$$

Ez abból következik, hogy az $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ jelöléssel

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{y}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{y}\| = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \left\|\mathbf{A}\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right)\right\| = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

▶ Azt még igazolnunk kell, hogy a mátrixnorma elnevezés e függvényre valóban jogos.

10.24. tétel (Indukált norma tulajdonságai). *Legyen $\|.\|$ egy tetszőleges vektornorma, ekkor a (10.13) képlettel definiált mátrixfüggvény*
a) mátrixnorma, azaz fennáll a 10.21. definíció mind a négy feltétele,
b) illeszkedik az indukáló vektornormához, azaz

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{x}\| .$$

Bizonyítás. Először az illeszkedést igazoljuk. Ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, akkor az egyenlőtlenség teljesül, hisz mindkét oldalán $\mathbf{0}$ áll. Ha $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, akkor a (10.14) szerint

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\mathbf{z}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{z}\|}{\|\mathbf{z}\|} \geq \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|},$$

azaz $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{x}\|$.

A mátrixnormát definiáló négy feltétel közül az első három nyilvánvalóan teljesül. A negyedik igazolásához legyen $\mathbf{y}$ egy olyan vektor, amelyben az $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{x}\|$ felveszi a maximumát az egységgömbön, azaz amelyre $\|\mathbf{y}\| = 1$, és

$$\|\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{y}\| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{B}\| .$$

Ekkor az illeszkedés kétszeri alkalmazásával

$$\|\mathbf{A}\mathbf{B}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{B}\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{B}\| \, \|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{A}\| \, \|\mathbf{B}\| . \qquad \square$$

Az 1-, 2- és ∞-norma mátrixokra A fönt definiált p-normák közül mátrixokra is az 1-, 2- és a ∞-norma a legfontosabb. Kiszámításukra a definíciónál egyszerűbb módszer is adódik.

10.25. TÉTEL (1-, 2- ÉS ∞-NORMA KISZÁMÍTÁSA). *Legyen* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, *ekkor*

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \textit{legnagyobb abszolút oszlopösszeg}, \tag{10.15}$$

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| = \textit{legnagyobb abszolút sorösszeg}, \tag{10.16}$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \left\|\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\right\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \max_{\|\mathbf{y}\|_2=1} |\mathbf{y}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x}| = \sigma_1, \tag{10.17}$$

ahol σ_1 *az* $\mathbf{A}$ *legnagyobb szinguláris értéke, azaz* $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$ *legnagyobb sajátértékének gyöke. Ha az* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *mátrix invertálható, akkor*

$$\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \frac{1}{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2} = \frac{1}{\min\limits_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2} = \frac{1}{\sigma_n}, \tag{10.18}$$

ahol σ_n *az* $\mathbf{A}$ *legkisebb (pozitív) szinguláris értéke.*

BIZONYÍTÁS. $p = 1$: Bármely $\mathbf{x}$ vektorra $\|\mathbf{x}\|_1 = 1$ esetén a skalárokra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_1 &= \sum_{i=1}^{m} \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \\ &\le \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|\right) \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|\end{aligned}$$

Ez a maximum el is érhető, mert ha a k-adik oszlopban a legnagyobb az abszolút értékek összege, akkor $\|\mathbf{A}\mathbf{e}_k\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$.

$p = \infty$: Bármely $\mathbf{x}$ vektorra $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$ esetén

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_\infty = \max_i \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \le \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||x_j| \le \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Ez a maximum el is érhető, mert ha a k-adik sorban a legnagyobb az abszolút értékek összege, akkor az

$$\mathbf{x} = \left(\frac{\overline{a_{k1}}}{|a_{k1}|}, \frac{\overline{a_{k2}}}{|a_{k2}|}, \dots, \frac{\overline{a_{kn}}}{|a_{kn}|}\right)$$

vektorra $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$ és $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

$p = 2$: A CBS-egyenlőtlenség szerint $|\mathbf{y}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x}| \le \|\mathbf{y}\|_2 \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2$, így

$$\max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \max_{\|\mathbf{y}\|_2=1} |\mathbf{y}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x}| \le \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{A}\|_2 .$$

Így csak azt kell megmutatni, hogy van olyan $\mathbf{x}_0$ és $\mathbf{y}_0$ egységvektor, melyre az előbbi egyenlőtlenségben egyenlőség áll. Legyen $\mathbf{x}_0$ az a vektor, melyben $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2$ a maximumot adja, és $\mathbf{y}_0$ ennek normált képe, azaz

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}_0\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{A}\|_2\,, \quad \mathbf{y}_0 = \frac{\mathbf{A}\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{A}\mathbf{x}_0\|_2} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{A}\|_2}.$$

Ekkor

$$\mathbf{y}_0^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \frac{\mathbf{x}_0^{\mathsf{H}}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{A}\|_2} = \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}_0\|_2^2}{\|\mathbf{A}\|_2} = \frac{\|\mathbf{A}\|_2^2}{\|\mathbf{A}\|_2} = \|\mathbf{A}\|_2\,.$$

Az $\|\mathbf{A}\|_2 = \sigma_1$ igazolásához a következő maximumot keressük:

$$\|\mathbf{A}\|_2^2 = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2}{\|\mathbf{x}\|_2^2} = \max_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{x}}.$$

Mivel $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$ önadjungált, ezért létezik sajátvektoraiból álló ortonormált bázisa. Vektorai legyenek $\mathbf{v}_1,\dots,\ \mathbf{v}_n$, a hozzájuk tartozó sajátértékek $\lambda_1,\dots,\ \lambda_n$, melyek közül λ_1 legyen a legnagyobb. Ekkor egyrészt

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{v}_1^{\mathsf{H}}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1^{\mathsf{H}}\mathbf{v}_1},$$

másrészt bármely $\mathbf{x} = \sum_j c_j \mathbf{v}_j \neq \mathbf{0}$ vektorra

$$\lambda_1 - \frac{\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\mathbf{x}} = \lambda_1 - \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j c_j^2}{\sum_{j=1}^n c_j^2} = \frac{\sum_{j=1}^n (\lambda_1 - \lambda_j) c_j^2}{\sum_{j=1}^n c_j^2} \geq 0,$$

tehát $\|\mathbf{A}\|_2^2 = \lambda_1$, azaz $\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_1} = \sigma_1$.

$p = 2$ esetén $\mathbf{A}^{-1}$ normája is egyszerűen számolható:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\min\limits_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2} &= \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \frac{1}{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2} = \max_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{1}{\left\|\mathbf{A}\frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}}{\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}\|_2}\right\|_2} = \max_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}\|_2}{\|\mathbf{y}\|_2}\\ &= \max_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \left\|\mathbf{A}^{-1}\left(\frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|_2}\right)\right\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \left\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}\right\| = \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|_2.\end{aligned}$$

Mivel $\mathbf{A}^{-1}$ szinguláris értékei az $\mathbf{A}$ szinguláris értékeinek reciprokai, ezért $\mathbf{A}^{-1}$ legnagyobb szinguláris értéke az $\mathbf{A}$ legkisebb szinguláris értékének reciproka. □

► Az 1-, a ∞- és a 2-normára szokásos másik elnevezés: *oszlopnorma*, *sornorma* és *spektrálnorma*.

Kis rangú approximáció A szinguláris érték szerinti felbontás egy érdekes és hasznos alkalmazása a mátrixok adott, kis rangú mátrixszal való közelítésére vonatkozó eredmény.

10.26. TÉTEL (KIS RANGÚ APPROXIMÁCIÓ TÉTELE – ECKART–YOUNG-TÉTEL). *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy* r*-rangú mátrix. Jelölje a* k*-adik szinguláris értékét* σ_k*, a hozzá tartozó jobb és bal szinguláris vektort* $\mathbf{v}_k$ *és* $\mathbf{u}_k$*. Legyen*

$$\mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^{\mathsf{T}}.$$

Ekkor $\mathbf{A}_k$ *az* $\mathbf{A}$ *mátrix legjobb legföljebb* k*-rangú közelítése Frobenius- és* 2*-normában is, azaz*

$$\min_{\mathrm{r}(\mathbf{B})\leqslant k} \|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|_F = \|\mathbf{A}-\mathbf{A}_k\|_F = \sqrt{\sum_{i=k+1}^{r} \sigma_i^2},$$
$$\min_{\mathrm{r}(\mathbf{B})\leqslant k} \|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|_2 = \|\mathbf{A}-\mathbf{A}_k\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

BIZONYÍTÁS. Legyen $\mathbf{A} = \mathbf{U\Sigma V}^{\mathsf{T}}$ a szinguláris érték szerinti felbontás, és legyen $\mathbf{C} = \mathbf{VBU}^{\mathsf{T}}$, azaz $\mathbf{B} = \mathbf{UCV}^{\mathsf{T}}$, ahol $\mathbf{C} = [c_{ij}]$. Ekkor – kihasználva hogy hasonló mátrixok nyoma azonos –, kapjuk hogy

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|_F^2 &= \left\|\mathbf{U\Sigma V}^{\mathsf{T}} - \mathbf{UCV}^{\mathsf{T}}\right\|_F^2 = \left\|\mathbf{U}(\mathbf{\Sigma}-\mathbf{C})\mathbf{V}^{\mathsf{T}}\right\|_F^2 \\
&= \operatorname{trace}\left((\mathbf{U}(\mathbf{\Sigma}-\mathbf{C})\mathbf{V}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}(\mathbf{U}(\mathbf{\Sigma}-\mathbf{C})\mathbf{V}^{\mathsf{T}})\right) \\
&= \operatorname{trace}\left(\mathbf{V}(\mathbf{\Sigma}-\mathbf{C})^{\mathsf{T}}(\mathbf{\Sigma}-\mathbf{C})\mathbf{V}^{\mathsf{T}}\right) \\
&= \operatorname{trace}\left((\mathbf{\Sigma}-\mathbf{C})^{\mathsf{T}}(\mathbf{\Sigma}-\mathbf{C})\right) = \|\mathbf{\Sigma}-\mathbf{C}\|_F^2 \\
&= \sum_i |\sigma_i - c_{ii}|^2 + \sum_{i\neq j} |c_{ij}|^2
\end{aligned}$$

Ez az összeg akkor a legkisebb, ha $\mathbf{C}$ főátlóján kívül minden elem 0, a főátlóban pedig $c_{ii} = \sigma_i$, ha $i = 1, 2, \dots, r$, a többi elem pedig a főátlóban is 0. Ez bizonyítja a Frobenius-normára vonatkozó állítást.

A 2-normában való egyenlőség igazolásához tegyük fel, hogy $\mathrm{r}(\mathbf{B}) \leqslant k$, így $\mathcal{N}(\mathbf{B}) \geqslant n-k$. Legyen $\mathcal{V} = \operatorname{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{k+1})$ a legnagyobb $k+1$ szinguláris értékhez tartozó jobb szinguláris vektorok által kifeszített altér. Ha $k \geqslant r$, akkor kész vagyunk, $\mathbf{A}$ legjobb közelítését saját maga adja, és ekkor $\sigma_{k+1} = 0$. Feltehető tehát, hogy $r > k$, így $\dim \mathcal{N}(\mathbf{B}) + \dim VT \geqslant (n-k) + (k+1) = n+1 > n$, tehát $\mathcal{N}(\mathbf{B}) \cap \mathcal{V}$ nem üres. Legyen $\mathbf{w} \in \mathcal{N}(\mathbf{B}) \cap \mathcal{V}$, $\|\mathbf{w}\|_2 = 1$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|_2^2 &\geqslant \|(\mathbf{A}-\mathbf{B})\mathbf{w}\|_2^2 = \|\mathbf{Aw}\|_2^2 \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i^2 |\mathbf{v}_i^{\mathsf{T}}\mathbf{w}|^2 \geqslant \sigma_{k+1}^2 \sum_{i=1}^{k+1} |\mathbf{v}_i^{\mathsf{T}}\mathbf{w}|^2 = \sigma_{k+1}^2
\end{aligned}$$

Másrészt $\|\mathbf{A}-\mathbf{A}_k\|_2 = \sigma_{k+1}$, így $\|\mathbf{A}-\mathbf{B}\|_2 \leqslant \|\mathbf{A}-\mathbf{A}_k\|_2$. □

Feladatok

10.5. Számítsuk ki az alábbi vektorok megadott normáit!

1. $\mathbf{x} = (\sqrt{3} - \mathrm{i}, 6\mathrm{i}, 3)$, $\mathbf{y} = (0.1, -0.2, -0.2)$, $p = 1, 2, \infty$;
2. $(1,2,2)$, $(2,3,6)$, $(1,4,8)$, $(4,4,7)$, $p = 2$;
3. $(\mathrm{i}, 2, \sqrt{2} - \sqrt{2}\mathrm{i}, -4i)$, $p = 1, 2, \infty$;
4. $(3,4,5)$, $(11,12,13,14)$, $p = 3$;
5. $\|(95800, 217519, 414560)\|_4$, $\|(27, 84, 110, 133)\|_5$.

10.6. Mutassuk meg, hogy a 10.15. definíció 1.–3. pontja és az utána következő megjegyzés 1′–3′ pontja ekvivalensek.

10.7. Mutassuk meg, hogy az 1-norma norma.

10.8. Mutassuk meg, hogy az ∞-norma norma.

10.9. Mutassuk meg, hogy $\|\mathbf{x}\|_p \le c\,\|\mathbf{x}\|_q$, ahol c a következő táblázatból kiolvasható, ahol p értékei a sorok, q értékei az oszlopok fejlécében vannak.

	1	2	∞
1		$\sqrt{n}$	n
2	1		$\sqrt{n}$
∞	1	1	

10.10. Mutassuk meg, hogy minden norma folytonos függvény.

10.11. Mutassuk meg, hogy ha $\|.\|$ egy norma, és A egy egy-egy értelmű lineáris leképezés, akkor az $\mathbf{x} \mapsto \|A\mathbf{x}\|$ leképezés is norma.

10.12. Mutassuk meg, hogy ha $\|.\|$ egy norma, akkor az

$$\mathbf{x} \mapsto \sup_{\mathbf{y}\neq\mathbf{0}} \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|}$$

függvény is az. E normát duálnormának is szokás nevezni.

10.13. Hölder-egyenlőtlenség Igazoljuk, hogy bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ vektor és $p, q \ge 1$ valósok esetén

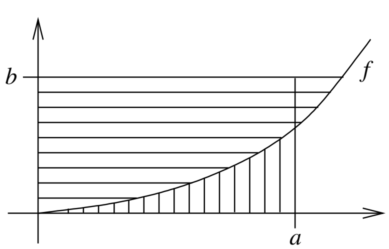
$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \le \|\mathbf{x}\|_p \|\mathbf{y}\|_q, \text{ ahol } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{10.19}$$

A következő lépéseket javasoljuk:

1. Igazoljuk, hogy $a, b > 0$, $p, q \ge 1$ és $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ esetén

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Ennek igazolására határozzuk meg az $f : x \mapsto x^{p-1}$ függvényhez tartozó két alábbi satírozott tartomány területét!



2. Az előző egyenlőtlenségben végezzük el az

$$a = \frac{|x_i|}{\|\mathbf{x}\|_p}, \; b = \frac{|y_i|}{\|\mathbf{y}\|_q}$$

helyettesítéseket, majd ezzel igazoljuk a Hölder-egyenlőtlenség (10.19) alakját.

3. Végül bizonyítsuk a Hölder-egyenlőtlenség (10.8) alakját is.

10.14. Minkowski-egyenlőtlenség Igazoljuk, hogy bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ vektor és $p \ge 1$ valós esetén

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p \le \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p. \tag{10.20}$$

A következő lépéseket javasoljuk:

1. Igazoljuk, majd alkalmazzuk az x_i, y_i számokra az

$$|a+b|^p = |a+b||a+b|^{p/q} \le |a||a+b|^{p/q} + |b||a+b|^{p/q}$$

egyenlőtlenséget, ahol $1/p + 1/q = 1$.

2. Alkalmazzuk a Hölder-egyenlőtlenséget a $\sum_{i=1}^{n} |x_i||x_i + y_i|^{p/q}$ kifejezésre.

10.15. Mutassuk meg, hogy a p-norma norma.

10.16. Számítsuk ki az alábbi mátrixok Frobenius-, 1-, 2- és ∞-normáját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

10.17. Számítsuk ki az alábbi mátrixok Frobenius-, 1-, 2- és ∞-normáját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

10.18. Konstruáljunk olyan $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrixokat, hogy maximum normájukra $\|\mathbf{AB}\|_{\max} < \|\mathbf{A}\|_{\max} \|\mathbf{B}\|_{\max}$, $\|\mathbf{AC}\|_{\max} = \|\mathbf{A}\|_{\max} \|\mathbf{C}\|_{\max}$ és $\|\mathbf{BC}\|_{\max} > \|\mathbf{B}\|_{\max} \|\mathbf{C}\|_{\max}$ legyen.

10.19. Igazoljuk, hogy minden indukált $\|.\|$ mátrixnormára $\|\mathbf{I}\| = 1$, ugyanakkor $\|\mathbf{I}\|_F = \sqrt{n}$.

10.20. Igazoljuk, hogy tetszőleges mátrixnormára

$$\rho(\mathbf{A}) \le \|\mathbf{A}\|,$$

ahol $\rho(\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ spektrálsugara.

10.21. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{A}$ normális ($\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{H}}$), akkor $\|\mathbf{A}\|_2 = \rho(\mathbf{A})$.

Megoldások

10.1. Ellenőriznünk kell, hogy
a) az egyenlőség fennáll,
b) az $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ ortogonális mátrixok, $\mathbf{\Sigma}$ diagonális,
c) az $\mathbf{u}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ és a $\mathbf{v}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ vektorokra $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{u}_1$.

Ezek mind nyilvánvalóak, vagyis az első felbontás szinguláris. Mivel $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = 1$, ezért $\mathbf{U}$ első oszlopát és $\mathbf{V}^\mathsf{T}$ első sorát, valamint $\mathbf{\Sigma}$ bal felső elemét meghagyva valóban a második alakot kapjuk.

10.2. $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$, melynek karakterisztikus polinomja $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$. Az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ sajátértékei 3 és 1, tehát $\mathbf{A}$ szinguláris értékei $\sqrt{3}$ és 1. A hozzájuk tartozó egységnyi hosszú sajátvektorok $\mathbf{v}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $\mathbf{v}_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Így

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{u}_i = \mathbf{A}\mathbf{v}_i/\sigma_i$ összefüggés alapján $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)$, $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$. Az előző példához hasonlóan $\mathbf{u}_3$ kiszámítható az $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$ képlettel is, de most inkább számoljunk úgy, hogy keressük $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ nullterének bázisát. A nulltér meghatározásához meg kell oldani a $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszert. Innen is az adódik, hogy $\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$. (Itt választhatnánk e vektor ellentettjét is, mert $\mathbf{A}\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$, vagyis az előjelnek nincs szerepe.)

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Tehát a szinguláris felbontás

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

10.3. A $\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B}$ mátrix karakterisztikus polinomja $-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda = -(\lambda - 3)(\lambda - 1)\lambda$, így sajátértékei 3, 1 és 0. A szinguláris értékek $\sqrt{3}$ és 1. A sajátvektorok számításához 3-dimenziós vektorokkal kell számolnunk. Talán jobban járunk, ha inkább a $\mathbf{B}\mathbf{B}^\mathsf{T}$ mátrixszal próbálkozunk. Mivel $\mathbf{B}\mathbf{B}^\mathsf{T} = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$, ezért a karakterisztikus polinom $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$. A szinguláris értékek tehát $\sqrt{3}$ és 1, összhangban az előbbi számítással. A hozzájuk tartozó egységnyi hosszú sajátvektorok most nem a $\mathbf{V}_1$, hanem $\mathbf{U}_1$ oszlopait adják: $\mathbf{u}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $\mathbf{u}_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. A $\mathbf{v}_i = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{u}_i/\sigma_i$ képletet használva a $\mathbf{V}$ mátrix is meghatározható. Tehát

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

a $\mathbf{B}$ mátrix szinguláris felbontása.

10.4. A 10.2. feladatban meghatároztuk az $\mathbf{A}$ mátrix redukált szinguláris felbontását:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix},$$

amiből a pszeudoinverz

$$\mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

10.5.
a) $\|\mathbf{x}\|_1 = 11$, $\|\mathbf{x}\|_2 = 7$, $\|\mathbf{x}\|_\infty = 6$, $\|\mathbf{y}\|_1 = 0.5$, $\|\mathbf{y}\|_2 = 0.3$, $\|\mathbf{x}\|_\infty = 0.2$.
b) Ezek az úgynevezett Pitagorászi számnégyesekből képzett vektorok, amelyekben a koordináták négyzetösszege négyzetszám, így a 2-normájuk egész. A normák 3, 7, 9, 9.
c) 9, 5, 4;
d) 6, 20;
e) e két példa a $p = 4$ és $p = 5$ értékre a legkisebb olyan $p - 1$-dimenziós pozitív egész vektor, melynek p-normája egész: $\|(95800, 217519, 414560)\|_4 = 422481$, $\|(27, 84, 110, 133)\|_5 = 144$. Euler még azt sejtette, hogy ilyen nincs.

10.16. $\|\mathbf{A}\|_F = 5$, $\|\mathbf{A}\|_1 = 6$, $\|\mathbf{A}\|_2 = 5$, $\|\mathbf{A}\|_\infty = 6$.
$\|\mathbf{B}\|_F = 5$, $\|\mathbf{B}\|_1 = 7$, $\|\mathbf{B}\|_2 = 5$, $\|\mathbf{B}\|_\infty = 4$.
$\|\mathbf{C}\|_F = \sqrt{13}$, $\|\mathbf{C}\|_1 = 4$, $\|\mathbf{C}\|_2 = 3$, $\|\mathbf{C}\|_\infty = 4$.

10.17. $\|\mathbf{A}\|_F = 9$, $\|\mathbf{A}\|_1 = 8$, $\|\mathbf{A}\|_2 = 8$, $\|\mathbf{A}\|_\infty = 8$.
$\|\mathbf{B}\|_F = 3\sqrt{3}$, $\|\mathbf{B}\|_1 = 5$, $\|\mathbf{B}\|_2 = 3$, $\|\mathbf{B}\|_\infty = 5$.
$\|\mathbf{C}\|_F = 3\sqrt{3}$, $\|\mathbf{C}\|_1 = 5$, $\|\mathbf{C}\|_2 = 5$, $\|\mathbf{C}\|_\infty = 5$.

10.18. Tekintsük például az alábbi három mátrixot:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ezek mindegyikében 2 az elemek maximuma, így bármely két mátrix maximum normájának szorzata 4. Szorzataik:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{BC} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ezek elemeinek maximuma rendre 2, 4, 6.

10.20. Ha λ egy tetszőleges sajátértéke $\mathbf{A}$-nak, és $\mathbf{x}$ a hozzá tartozó egyik sajátvektor, azaz $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, akkor

$$\mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{x}^{\mathsf{H}} = \lambda\mathbf{x}\mathbf{x}^{\mathsf{H}} \rightsquigarrow \|\mathbf{A}\| \left\|\mathbf{x}\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\right\| \geq \left\|\mathbf{A}\mathbf{x}\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\right\| = |\lambda| \left\|\mathbf{x}\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\right\|,$$

és mivel $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, így $\mathbf{x}\mathbf{x}^{\mathsf{H}} \neq \mathbf{O}$, azaz $\left\|\mathbf{x}\mathbf{x}^{\mathsf{H}}\right\| \neq 0$, vagyis leosztva vele $|\lambda| \leq \|\mathbf{A}\|$ adódik. Ez minden sajátértékre, így a spektrálsugárra is igaz.

10.21. Ha $\mathbf{A}$ normális, akkor unitéren hasonló egy diagonális $\mathbf{D}$ mátrixhoz, azaz $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{\mathsf{H}}$ valamely unitér $\mathbf{Q}$ mátrixszal. Ekkor $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A} \sim \mathbf{D}^{\mathsf{H}}\mathbf{D}$ is fönnáll, ugyanis $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A} = (\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}}(\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{\mathsf{H}}) = \mathbf{Q}\mathbf{D}^{\mathsf{H}}\mathbf{D}\mathbf{Q}^{\mathsf{H}}$, tehát $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}^{\mathsf{H}}\mathbf{D}$ sajátértékei megegyeznek. Másrészt $\mathbf{D}^{\mathsf{H}}\mathbf{D}$ minden sajátértéke $|\lambda|^2$ alakú, ahol λ az $\mathbf{A}$ valamely sajátértéke. Összegezve: mivel $\|\mathbf{A}\|_2 = \sigma_1$, azaz az $\mathbf{A}^{\mathsf{H}}\mathbf{A}$ legnagyobb sajátértékének gyöke, ami viszont megegyezik $\mathbf{A}$ legnagyobb sajátértékével, azaz a $\rho(\mathbf{A})$ spektrálsugárral.

11

Jordan-féle normálalak

Négyzetes mátrixok Jordan-féle normálalakja fontos klasszifikációs eszköz, de numerikus algoritmusok ritkán használják instabilitása miatt.

Normálalak és invariáns altér

Minden mátrix hasonló egy „majdnem diagonális" mátrixhoz, amelynek főátlójában a sajátértékek, fölötte nullák vagy egyesek, egyebütt nullák álnak.

Invariáns alterek Egy vektortér lineáris transzformációjának diagonalizálhatósága ekvivalens a tér sajátalterek direkt összegeként való előállíthatóságával. Ezt az állítást fogjuk általánosítani invariáns alterekre.

A 3-dimenziós térnek egy síkjára való tükrözése olyan lineáris transzformáció, melynek sajátalterei a sík, és a rá merőleges egyenes, és a tér e két sajátaltér direkt összege. A tér egyenes körüli $60°$-os elforgatása esetén csak egy sajátaltér van, a forgástengely, viszont a tér itt is előáll e tengely és a rá merőleges sík direkt összegeként. E két alteret az jellemzi, hogy ezeket a forgatás saját magába viszi, azaz mindkettő invariáns a forgatásra nézve.

11.1. DEFINÍCIÓ (INVARIÁNS ALTÉR). *Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ altér az $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris transzformáció (az $\mathbf{L}$ mátrix)* invariáns altere *(vagy $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ L-*invariáns altere*), ha minden $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ vektorra $L\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ ($\mathbf{Lx} \in \mathcal{U}$).*

Egy altér invariáns voltának eldöntéséhez elég ellenőrizni, hogy az altér egy bázisának elemeit L az altérbe viszi-e (ld. a 11.1. feladatot). Például az

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix, illetve a hozzá tartozó $(x, y, z) \mapsto (x + y, y, z)$ leképezés invariáns alterei $\{\mathbf{0}\}$, $\operatorname{span}(\mathbf{e}_1)$, $\operatorname{span}(\mathbf{e}_2)$, $\operatorname{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, $\operatorname{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

Invariáns alterek és blokkmátrixok Vizsgáljuk meg invariáns altérrel rendelkező lineáris transzformációk megfelelő bázisban felírt mátrixait.

11.2. TÉTEL (BLOKKMÁTRIXOK ÉS AZ INVARIÁNS ALTEREK). *Legyen $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris transzformáció, $\mathcal{U}, \mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$ alterek, $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$ és legyen a $\mathcal{V}$ tér $\mathcal{B}$ bázisa az $\mathcal{U}$ altér $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$ bázisának és a $\mathcal{W}$ altér $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$ bázisának uniója. Ha az $\mathcal{U}$ altér L-invariáns, akkor L mátrix alakja*

$$[L]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & * \\ \mathbf{O} & * \end{bmatrix},$$

ha $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ is L-invariáns alterek, akkor

$$[L]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{W} \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{U}$ az $\mathcal{U}$-ra, $\mathbf{W}$ a $\mathcal{W}$-re megszorított L mátrixa az altér bázisára nézve, azaz $\mathbf{U} = [L|_{\mathcal{U}}]_{\mathcal{B}_{\mathcal{U}}}$, $\mathbf{W} = [L|_{\mathcal{W}}]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}}$.

BIZONYÍTÁS. A második állítást igazoljuk, az első hasonlóan megy. Legyen $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ és $\mathcal{B}_{\mathcal{W}} = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-r}\}$. Ha $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ invariáns alterek, akkor $L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$ és $L\mathbf{w}_j \in \mathcal{W}$, így

$$\begin{aligned} L\mathbf{u}_i &= u_{i1}\mathbf{u}_1 + \cdots + u_{ir}\mathbf{u}_r + 0\mathbf{w}_1 + \cdots + 0\mathbf{w}_{n-r} \\ L\mathbf{w}_j &= 0\mathbf{u}_1 + \cdots + 0\mathbf{u}_r + w_{j,r+1}\mathbf{w}_1 + \cdots + w_{j,n}\mathbf{w}_{n-r} \end{aligned}$$

ahol $i = 1, \dots, r$, $j = r+1, \dots, n$. Tehát

$$[L]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} u_{11} & u_{21} & \dots & u_{r1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{1r} & u_{2r} & \dots & u_{rr} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & w_{r+1,r+1} & w_{r+2,r+1} & \dots & w_{n,r+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & w_{r+1,n} & w_{r+2,n} & \dots & w_{n,n} \end{array}\right],$$

ami bizonyítja az állítást. Egyúttal az $\mathbf{U} = [L|_{\mathcal{U}}]_{\mathcal{B}_{\mathcal{U}}}$, $\mathbf{W} = [L|_{\mathcal{W}}]_{\mathcal{B}_{\mathcal{W}}}$ összefüggések is leolvashatók a fenti kifejezésekből. □

► Igaz az általánosítása: ha $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k$ a $\mathcal{V}$ vektortér L-invariáns alterei, és $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{V}_k$, akkor L mátrixa blokkdiagonális minden olyan bázisban, mely az alterek bázisainak egyesítése (ld. 11.3. feladat).

► Evidens, hogy minden blokkdiagonális mátrixhoz találhatóak olyan standard bázisvektorok által kifeszített invariáns alterek, amelyek direkt összege az egész tér. Például az alábbi $\mathbf{L}$ mátrix esetén

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}, \\ \mathcal{U}_2 &= \{\mathbf{e}_4\}, \\ \mathcal{U}_3 &= \{\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6\}, \\ \mathcal{V} = \mathbb{R}^6 &= \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \mathcal{U}_3. \end{aligned}$$

Általánosított sajátvektorok és a Jordan-blokk A diagonalizálhatóság általánosításához jutunk, ha minden sajátértékhez egy algebrai multiplicitásával azonos dimenziójú invariáns alteret találunk. Ezek az invariáns alterek az $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ megfelelő hatványainak nullterei lesznek.

Példaként keressünk olyan 3×3-as mátrixot, melynek egyetlen sajátértéke van, és annak 1 a geometriai multiplicitása. Világos, hogy ekkor $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ rangja csak 2 lehet, mert csak így lehet az $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{0}$ megoldása 1-paraméteres. E feltételnek megfelel a 8.15. példabeli

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrix. Tekintsük hatását a standard bázis vektorain:

$$\begin{array}{lclcl} \mathbf{Ae}_1 = 4\mathbf{e}_1 & & (\mathbf{A}-4\mathbf{I})\mathbf{e}_1 = \mathbf{0} & & (\mathbf{A}-4\mathbf{I})\mathbf{e}_1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{Ae}_2 = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2, & \text{azaz} & (\mathbf{A}-4\mathbf{I})\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1, & \text{azaz} & (\mathbf{A}-4\mathbf{I})^2\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}. \\ \mathbf{Ae}_3 = \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3 & & (\mathbf{A}-4\mathbf{I})\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 & & (\mathbf{A}-4\mathbf{I})^3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0} \end{array}$$

Az $\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$ mátrix fenti hatását a következő diagrammal fogjuk szemléltetni:

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_1 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_2 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_3$$

Az $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k\mathbf{e}_k = \mathbf{0}$ összefüggések a következő definícióhoz vezetnek:

11.3. DEFINÍCIÓ (ÁLTALÁNOSÍTOTT SAJÁTVEKTOR). *Az* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *vektort a négyzetes* $\mathbf{A}$ *mátrix* λ *sajátértékéhez tartozó* általánosított sajátvektorának *nevezzük, ha valamilyen* k *természetes számra* $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k\mathbf{x} = \mathbf{0}$. $k = 1$ *esetén* $\mathbf{x}$ *sajátvektor. Az általánosított sajátvektorokból álló* $\mathbf{x}_i$ *(*$i = 1, 2, \ldots, k$*) sorozatot* Jordan-láncnak *nevezzük, ha* $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1}$ *és* $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$. *Egy tér diszjunkt Jordan-láncokból álló bázisát* Jordan-bázisnak *nevezzük.*

► A Jordan-lánc definíciója korrekt abban az értelemben, hogy ha $\mathbf{x}_k$ általánosított sajátvektor, melyre $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$, de $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-1}\mathbf{x}_k \neq \mathbf{0}$, akkor minden $i < k$ esetén $\mathbf{x}_{k-i} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^i\mathbf{x}_k$ $(i = 1, \ldots, k-1)$ is általánosított sajátvektor. Ez abból következik, hogy

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-i}\mathbf{x}_{k-i} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k-i}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^i\mathbf{x}_k = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$$

► A fent vizsgált $\mathbf{A}$ mátrix esetén a térnek sajátvektorokból álló bázisa nincs, hisz a sajátaltér csak 1-dimenziós, de a standard bázisvektorok Jordan-láncot alkotnak, mely egyúttal Jordan-bázis is.

11.4. ÁLLÍTÁS (JORDAN-LÁNC ÁLTAL KIFESZÍTETT ALTÉR). *Az* $\mathbf{A}$ *mátrix egy Jordan-lánca által kifeszített altér* $\mathbf{A}$*-invariáns, továbbá egy* λ *sajátértékhez tartozó általánosított sajátvektorok* $\mathbf{A}$*-invariáns alteret alkotnak. Hasonló állítás igaz az* A *lineáris transzformációra.*

BIZONYÍTÁS. Mivel $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1}$, ezért $\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1}+\lambda\mathbf{x}_i$, azaz bázisvektor képe az altérben van, ami bizonyítja, hogy a kifeszített altér $\mathbf{A}$-invariáns.

Ha c tetszőleges konstans, $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ a λ-hoz tartozó általánosított saját-vektorok, azaz $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^k\mathbf{x} = \mathbf{0}$ és $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^\ell\mathbf{y} = \mathbf{0}$, akkor

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{\max(k,\ell)}(c\mathbf{x}+\mathbf{y}) = c\mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

ami bizonyítja a második állítást. □

11.5. PÉLDA (JORDAN-LÁNC ÉS JORDAN-BÁZIS KERESÉSE). *Az alábbi két mátrix mindegyikének $(4-x)^3$ a karakterisztikus polinomja. Keressünk mindegyikükhöz egy Jordan-bázist és írjuk fel a mátrixot e bázisban!*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 10 & -4 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

MEGOLDÁS. Mindkét mátrixnak a $\lambda = 4$ háromszoros algebrai multiplicitású sajátértéke (ellenőrizzük!).

Az $\mathbf{A}$ mátrix esetén a sajátaltér 1-dimenziós, melyet az $\mathbf{x} = (1,-1,1)$ vektor feszít ki.

Mivel $(\mathbf{A}-4\mathbf{I})^3 = \mathbf{O}$, de $(\mathbf{A}-4\mathbf{I})^2 \neq \mathbf{O}$, ezért van olyan $\mathbf{x}_3$ vektor, melyre $(\mathbf{A}-4\mathbf{I})^2\mathbf{x}_3 \neq \mathbf{0}$. Mivel

$$(\mathbf{A}-4\mathbf{I})^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

így $(\mathbf{A}-4\mathbf{I})^2(x,y,z) = (-x+z, x-z, -x+z)$, ezért bármely $\mathbf{x}_3 = (x,y,z)$ vektor megfelel, ha $x \neq z$. Például legyen $x = 1$, $y = z = 0$, azaz $\mathbf{x}_3 = (1,0,0)$. Mivel $(\mathbf{A}-4\mathbf{I})^2\mathbf{x}_3 \neq \mathbf{0}$, ezért az $\mathbf{x}_2 = (\mathbf{A}-4\mathbf{I})\mathbf{x}_3$ szükségképpen olyan vektor, melyre $(\mathbf{A}-4\mathbf{I})\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$, de $(\mathbf{A}-4\mathbf{I})^2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, azaz az $\mathbf{x}_1 = (\mathbf{A}-4\mathbf{I})\mathbf{x}_2$ vektor sajátvektor. A fenti $\mathbf{x}_3$ vektor esetén a következő láncot kapjuk:

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_1 = (-1,1,-1) \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_2 = (2,-1,2) \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_3 = (1,0,0)$$

Az $\mathbf{A}$ mátrix alakja az $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ bázisban

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

ugyanis $\mathbf{A}\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2 + 4\mathbf{x}_3$, $\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + 4\mathbf{x}_2$, $\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = 4\mathbf{x}_1$, aminek mátrix-szorzat alakja:

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_3] = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_3] \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Így $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{J}$, ahol $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \,|\, \mathbf{x}_2 \,|\, \mathbf{x}_3]$, ami az általánosított sajátvektorok alkotta bázisról a standard bázisra való áttérés mátrixa. A konkrét adatokkal ellenőrizve:

$$\mathbf{J} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

A $\mathbf{C}$ mátrix esetén a sajátaltér 2-dimenziós, melyet az $(1, 0, 1)$ és $(0, 2, 3)$ vektorok feszítenek ki, tehát két láncot keresünk. Mivel $(\mathbf{C} - 4\mathbf{I})^2 = \mathbf{O}$, ezért legföljebb kettő hosszú láncra számíthatunk. Olyan $\mathbf{x}_2$ vektort keresünk, melyre $(\mathbf{C} - 4\mathbf{I})\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$. Mivel

$$\mathbf{C} - 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & -4 \\ 4 & 6 & -4 \end{bmatrix},$$

ezért pl. az $x = 1$, $y = z = 0$, azaz az $\mathbf{x}_2 = (1, 0, 0)$ választás megfelel. Ezt $\mathbf{C} - 4\mathbf{I}$ az $\mathbf{x}_1 = (-2, 4, 4)$ vektorba viszi. Ez nem egyezik meg a sajátalteret kifeszítő – fent megadott – vektorok egyikével sem, de szükségképpen sajátvektor (csak ellenőrzésképpen: $\mathbf{x}_1 = (-2, 4, 4) = -2(1, 0, 1) + 2(0, 2, 3)$). A másik Jordan-lánc tehát egyetlen vektorból áll, mely a sajátaltér bármelyik $\mathbf{x}_1$-től független vektora lehet. Pl. a következő két lánc megfelel:

$$\begin{aligned} &\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{C}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_1 = (-2, 4, 4) \xleftarrow{\mathbf{C}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_2 = (1, 0, 0) \\ &\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{C}-4\mathbf{I}} \mathbf{y}_1 = (1, 0, 1) \end{aligned}$$

A $\mathbf{C}$ mátrix alakja az általánosított sajátvektorok alkotta $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1\}$ bázisban

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

ugyanis $\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + 4\mathbf{x}_2$, $\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = 4\mathbf{x}_1$, $\mathbf{A}\mathbf{y}_1 = 4\mathbf{y}_1$, aminek mátrixszorzat alakja:

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}_1 \,|\, \mathbf{x}_2 \,|\, \mathbf{x}_3] = [\mathbf{x}_1 \,|\, \mathbf{x}_2 \,|\, \mathbf{x}_3] \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Hasonlóképp $\mathbf{A}$ alakja az $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ bázisban

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

□

Jordan-normálalak Nem hozható minden mátrix diagonális alakra, de egy ahhoz közeli alakra igen. Ebben csak közvetlenül a főátló fölött lehetnek nemnulla elemek, és azok is csak 1-esek.

11.6. DEFINÍCIÓ (JORDAN-BLOKK). *Azt a négyzetes mátrixot, melynek főátlójában azonos λ értékek, fölötte 1-esek, egyebütt 0-k állnak, azaz melynek*

$$\mathbf{J}_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{11.1}$$

az alakja, Jordan-blokknak *nevezzük. Egy blokkdiagonális mátrixot* Jordan-mátrixnak *nevezünk, ha diagonális blokkjai Jordan-blokkok.*

► Egy Jordan-blokknak a standard bázis minden vektora általánosított sajátvektora, ugyanis $i > 1$ esetén $\mathbf{J}_\lambda \mathbf{e}_i = \lambda \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i-1}$, azaz $(\mathbf{J}_\lambda - \lambda \mathbf{I})\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{i-1}$, és így e vektorok egyetlen Jordan-láncot alkotnak:

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} \mathbf{e}_1 \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} \mathbf{e}_2 \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} \dots \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}} \mathbf{e}_n$$

► Ennél több is igaz: ha egy mátrix Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrix, akkor a standard bázis Jordan-láncokból áll.

11.7. TÉTEL (JORDAN-NORMÁLALAK). *Bármely $\mathbb{C}^{n\times n}$-beli mátrix hasonló egy Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrixhoz, azaz minden $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixhoz létezik olyan $\mathbf{C}$ mátrix, hogy a $\mathbf{J} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$ mátrix alakja*

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{J}_k \end{bmatrix} \tag{11.2}$$

ahol k az $\mathbf{A}$ független sajátvektorainak maximális száma, és $\mathbf{J}_i$ minden i-re Jordan-blokk.

► A tételbeli (11.2) alakú $\mathbf{J}$ mátrixot az $\mathbf{A}$ mátrix *Jordan-féle normálalakjának* nevezzük.

► A különböző Jordan-blokkok különböző sajátvektorokhoz tartoznak, de mivel több sajátvektor is tartozhat ugyanahhoz a sajátértékhez, ezért egy sajátérték több Jordan-blokk főátlójában is szerepelhet.

► Az $\mathbf{A} = \mathbf{CJC}^{-1}$ alakú felbontást az $\mathbf{A}$ *Jordan-felbontásának* nevezzük.

► A tétel mátrixok hasonlóságáról szól, így lineáris leképezésekre is megfogalmazható: minden véges dimenziós komplex $\mathcal{V}$ vektortéren értelmezett lineáris transzformációhoz van olyan bázis, melyben mátrixa Jordan-normálalakú.

A tétel tetszőleges test fölötti mátrixokra, illetve lineáris leképezésekre is megfogalmazható:

11.8. TÉTEL (JORDAN-NORMÁLALAK). *Legyen $\mathbb{F}$ egy tetszőleges test, $\mathcal{V}$ egy $\mathbb{F}$ fölötti vektortér és $A : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ egy tetszőleges lineáris transzformáció (például egy $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ mátrixhoz tartozó mátrixleképezés, ha $\mathcal{V} = \mathbb{F}^n$). Tegyük fel, hogy a χ_A karakterisztikus polinom lineáris tényezők szorzatára bomlik $\mathbb{F}$ fölött. Ekkor van olyan bázisa $\mathcal{V}$-nek, melyben A mátrixa Jordan-mátrix.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $\mathcal{V}$ komplex vektortér, és $A : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ egy lineáris transzformáció (például az $\mathbf{A}$ mátrixhoz tartozó mátrixleképezés) és jelölje I az identikus leképezést. Megmutatjuk, hogy ha az A sajátalterei dimenzióinak összege k, azaz található k független sajátvektor, akkor található k Jordan-lánc is, melyek vektorai a tér bázisát adják, és ebben a bázisban a leképezés mátrixa a tételbeli Jordan-alakot ölti.

A tér dimenziójára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 1$ esetén az állítás nyilván igaz. Tegyük fel, hogy igaz az állítás minden n-nél kisebb dimenziós térre.

Legyen $(\lambda, \mathbf{x})$ az A egy sajátpárja. A λ-hoz tartozó sajátalteret – azaz a $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ teret – jelölje $\mathcal{N}_\lambda$, ennek dimenzióját r, és legyen $\mathcal{U}_\lambda = \operatorname{Im}(A - \lambda I)$.

Mivel $r > 0$, ezért a dimenziótétel miatt $\dim \mathcal{U}_\lambda = n - r < n$. Az $\mathcal{U}_\lambda$ invariáns altere A-nak, azaz $A(\mathcal{U}_\lambda) \leqslant \mathcal{U}_\lambda$, ugyanis $\mathcal{U}_\lambda$ elemei $(A - \lambda I)\mathbf{v}$ alakúak, ahol $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ tetszőleges, és $A(A - \lambda I)\mathbf{v} = (A^2 - \lambda A)\mathbf{v} = (A - \lambda I)(A\mathbf{v})$ ugyancsak eleme $\mathcal{U}_\lambda$-nak.

Az A tehát lineáris transzformáció $\mathcal{U}_\lambda$-n is. Mivel $\dim \mathcal{U}_\lambda = n - r$, ezért az indukciós feltevés szerint van Jordan-láncokból álló bázisa. A következő diagram e láncokat szemlélteti, és azt, hogy $A - \lambda_i I$ hogy hat rajtuk.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{0} & \xleftarrow{A-\lambda_1 I} & \mathbf{x}_1^1 & \xleftarrow{A-\lambda_1 I} & \dots & \xleftarrow{A-\lambda_1 I} & \mathbf{x}_{s_1}^1 \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{A-\lambda_2 I} & \mathbf{x}_1^2 & \xleftarrow{A-\lambda_2 I} & \dots & \xleftarrow{A-\lambda_2 I} & \mathbf{x}_{s_2}^2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{A-\lambda_p I} & \mathbf{x}_1^p & \xleftarrow{A-\lambda_p I} & \dots & \xleftarrow{A-\lambda_p I} & \mathbf{x}_{s_p}^p
\end{array}
$$

Itt az $\mathbf{x}_i^j$ vektor felső indexe a lánc sorszámát jelöli.

Legyen az $A - \lambda I$ kép- és magterének metszete $\mathcal{Q} = \mathcal{U}_\lambda \cap \mathcal{N}_\lambda$ és $q = \dim(\mathcal{Q})$. Ha $q = 0$, azaz $\mathcal{Q} = \{\mathbf{0}\}$, akkor kész vagyunk, mert így $\mathcal{U}_\lambda$ és $\mathcal{N}_\lambda$ kiegészítő alterek, tehát az $\mathcal{U}_\lambda$ indukció szerint létező Jordan-bázisához $\mathcal{N}_\lambda$ tetszőleges bázisát véve az egész tér egy Jordan-bázisát kapjuk.

Legyen $q > 0$. Mivel $\mathcal{N}_\lambda$ elemei az A sajátvektorai, ezért az indukciós feltevés szerint A független sajátvektoraiból q darab a $\mathcal{Q}$ sajátaltér bázisa. Jelölje e q sajátvektort $\mathbf{x}_1^1$, $\mathbf{x}_1^2, \dots$, $\mathbf{x}_1^q$, a belőlük induló λ sajátértékhez tartozó Jordan-láncok végén lévő vektorokat $\mathbf{x}^i_{s_i}$ $(i = 1, \ldots, q)$. Ezek mind elemei $\mathcal{U}_\lambda$-nak, tehát mindegyikhez van olyan $\mathbf{y}^i$ vektor, hogy $(A - \lambda I)\mathbf{y}^i = \mathbf{x}^i_{s_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$.

Az r-dimenziós $\mathcal{N}_\lambda$ altér q-dimenziós $\mathcal{Q}$ alterének bázisát kiegészítjük $\mathcal{N}_\lambda$ bázisává a $\mathbf{z}^1, \ldots, \mathbf{z}^{r-q}$ vektorokkal. Így a következő Jordan-láncokat kaptuk:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & & & & & \mathcal{V} \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathbf{z}^1 & & & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & \mathcal{N}_\lambda & & & & & & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathbf{z}^{r-q} & & & & & & \mathcal{U}_\lambda & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathbf{x}^1_1 & \xleftarrow{A-\lambda I} & \ldots & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathbf{x}^1_{s_1} & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathbf{y}^1 & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathbf{x}^q_1 & \xleftarrow{A-\lambda I} & \ldots & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathbf{x}^q_{s_q} & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathbf{y}^q & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{A-\lambda_{q+1} I} & \mathbf{x}^{q+1}_1 & \xleftarrow{A-\lambda_{q+1} I} & \ldots & \xleftarrow{A-\lambda_{q+1} I} & \mathbf{x}^{q+1}_{s_{q+1}} & & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{A-\lambda_p I} & \mathbf{x}^p_1 & \xleftarrow{A-\lambda_p I} & \ldots & \xleftarrow{A-\lambda_p I} & \mathbf{x}^p_{s_p} & & & &
\end{array}
$$

Az $\mathbf{x}$-vektorok száma $n - r$, az $\mathbf{y}$-vektorok száma q, a $\mathbf{z}$-vektorok száma $r - q$, ezek összege pedig $(n - r) + q + (r - q) = n$, tehát van elég vektor egy bázishoz. Belátjuk, hogy függetlenek.

A konstrukció olyan volt, hogy az $\mathbf{x}$- és $\mathbf{z}$-vektorok mind függetlenek egymástól.

Az $\mathbf{y}^1, \ldots, \mathbf{y}^q$ vektorok lineárisan függetlenek, hisz $A - \lambda I$ általi képvektoraik (az $\mathbf{x}^i_{s_i}$ vektorok) függetlenek.

Az $\mathbf{y}^1, \ldots, \mathbf{y}^q$ vektorok nem-triviális lineáris kombinációi nem eshetnek $\mathcal{N}_\lambda$-ba, mert azt $A - \lambda I$ a $\mathbf{0}$-ba viszi, így az $\mathbf{y}$-vektorok függetlenek a $\mathbf{z}$-vektoroktól.

Az $\mathbf{y}^1, \ldots, \mathbf{y}^q$ vektorok nem-triviális lineáris kombinációi nem eshetnek $\mathcal{U}_\lambda$-ba sem, mert az $A - \lambda I$ egy ilyen lineáris kombinációt az A transzformáció λ-hoz tartozó Jordán-láncai végső vektorainak lineáris kombinációjába visz. Ha $\mathcal{U}_\lambda$ bármely vektorának e vektor lenne a képe, akkor az általánosított sajátvektor lenne, azok alterében lévő vektorokat viszont $A - \lambda I$ nem vihet a fenti lineáris kombinációba. □

A Jordan-alak egyértelműsége A mátrixok a Jordan-normálalakjuk szerint osztályokba sorolhatók. Ezt a normálalak egyértelműsége biztosítja.

11.9. TÉTEL (A JORDAN-ALAK EGYÉRTELMŰSÉGE). *Egy mátrix Jordan-normálalakja a Jordan-blokkok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.*

BIZONYÍTÁS. A felbontás egyértelműségének bizonyításához elég belátni, hogy bármely két hasonló mátrix Jordan-alakjának meghatárázó adatai a hasonlóságra nézve invariánsak.

A Jordan-blokkok, és így a Jordan-láncok száma megegyezik a független sajátvektorok maximális számával – ez invariáns.

Az egyszerűség kedvéért először tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ minden sajátértéke azonos, jelölje λ. A továbbiak könnyebb megértésére lássunk egy konkrét példát. Legyen az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja $(\lambda - x)^{13}$, és tegyük fel, hogy Jordan-bázisa a következőképp néz ki:

$$\begin{array}{lllllllll}
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda I} & \mathbf{x}_1^1 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda I} & \mathbf{x}_2^1 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda I} & \mathbf{x}_3^1 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda I} & \mathbf{x}_4^1 \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda I} & \mathbf{x}_1^2 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda I} & \mathbf{x}_2^2 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda I} & \mathbf{x}_3^2 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda I} & \mathbf{x}_4^2 \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda I} & \mathbf{x}_1^3 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda I} & \mathbf{x}_2^3 & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda I} & \mathbf{x}_3^3 & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda I} & \mathbf{x}_1^4 & & & & & & \\
\mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-\lambda I} & \mathbf{x}_1^5 & & & & & &
\end{array} \tag{11.3}$$

A leghosszabb lánc 4-elemű, ami $\mathbf{A} - \lambda I$ ismeretében úgy kapható meg, hogy 4 az a legkisebb m kitevő, melyre $(\mathbf{A} - \lambda I)^m = \mathbf{O}$. Általában is igaz, a legnagyobb blokk mérete az a legkisebb m, melyre $(\mathbf{A} - \lambda I)^m = \mathbf{O}$, ugyanis ha a leghosszabb lánc hossza m, akkor $(\mathbf{A} - \lambda I)^m$ a Jordan-láncok minden vektorát a $\mathbf{0}$-vektorba viszik, míg az alacsonyabb kitevős hatványok a leghosszabb láncok utolsó elemeit nem. Egy mátrix hatványának zérus volta is invariáns, így hasonló mátrixokra a leghosszab lánc hossza is azonos. (Itt felhasználtuk, hogy ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ hasonlóak, akkor $\mathbf{A} - \lambda I$ és $\mathbf{B} - \lambda I$ is.)

Legyen a λ sajátértékhez tartozó i-hosszú Jordan-láncok száma n_i. A 11.3 diagramon $n_1 = 2$, $n_2 = 0$, $n_3 = 1$, $n_4 = 2$. Látható, hogy $(\mathbf{A} - \lambda I)$ hatványainak rangjából megmondható, hogy hány bázisvektor nem futott még a nullvektorba, innen pedig az n_i értékek is kiszámolhatók. Esetünkben

$$\begin{aligned}
n_4 &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A} - \lambda I)^3\right) = 2 \\
n_3 + 2n_4 &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A} - \lambda I)^2\right) = 5 \\
n_2 + 2n_3 + 3n_4 &= \mathrm{r}\,(\mathbf{A} - \lambda I) = 8 \\
n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A} - \lambda I)^0\right) = n = 13,
\end{aligned}$$

és ez az egyenletrendszer egyértelműen megoldható. Általában

$$
\begin{aligned}
n_m &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda I)^{m-1}\right)\\
n_{m-1}+2n_m &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda I)^{m-2}\right)\\
n_{m-2}+2n_{m-1}+3n_m &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda I)^{m-3}\right)\\
&\vdots\\
n_2+2n_3+\cdots+(m-1)n_m &= \mathrm{r}(\mathbf{A}-\lambda I)\\
n_1+2n_2+\cdots+(m-1)n_{m-1}+mn_m &= n.
\end{aligned}
$$

Ennek az egyenletrendszernek a jobb oldalán a hasonlóságra nézve invariáns értékek vannak, az együtthatómátrix háromszög alakú, így egyszerű visszahelyettesítéssel megoldható. Mivel a mellékátlóban egyesek vannak, a megoldás egyértelmű, és egész szám.

Ha a mátrixnak több különböző sajátértéke van, akkor sajátértékenként egy ilyen egyenletrendszert kapunk. Legyen λ az egyik sajátérték, algebrai multiplicitását jelölje a_λ. Ekkor $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}$ hatványainak rangja addig csökkenhet, míg el nem éri az $n-a$ értéket. Ha ugyanis $\mathbf{A}$ hasonló a $\mathbf{J}$ Jordan-mátrixhoz, akkor $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\sim\mathbf{J}-\lambda\mathbf{I}$, és az utóbbi mátrix λ-hoz tartozó blokkját kivéve a főátlóban nullától különböző számok szerepelnek, így ezek hatványai nem válnak zérussá. Jelölje tehát m azt a legkisebb kitevőt, melyre

$$\mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^m\right)=n-a_\lambda,\ \text{azaz}\ \mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^m\right)-n+a_\lambda=0.$$

Ez másként fogalmazva azt jelenti, hogy m az a legkisebb kitevő, melyre $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^m$ a λ-hoz tartozó általánosított sajátalteret a zérusvektorba viszi.

Ha nem tudjuk, hogy mennyi a λ algebrai multiplicitása, akkor az $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}$ hatványainak rangjából azt is megkapjuk, ugyanis m az a legkisebb kitevő, melyre

$$\mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^m\right)=\mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{m+1}\right),$$

így $a_\lambda=n-\mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^m\right)$. Így az összes esetre általánosan érvényes egyenletrendszer a következő alakú:

$$
\begin{aligned}
n_m &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{m-1}\right)-n+a_\lambda\\
n_{m-1}+2n_m &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{m-2}\right)-n+a_\lambda\\
n_{m-2}+2n_{m-1}+3n_m &= \mathrm{r}\left((\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{m-3}\right)-n+a_\lambda\\
&\vdots\\
n_2+2n_3+\cdots+(m-1)n_m &= \mathrm{r}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})-n+a_\lambda\\
n_1+2n_2+\cdots+(m-1)n_{m-1}+mn_m &= a_\lambda
\end{aligned}
$$

Ennek egyértelmű megoldhatósága bizonyítja állításunkat. □

11.10. PÉLDA (JORDAN-BLOKKOK MÉRETE). *Egy* 10×10*-es* $\mathbf{A}$ *mátrixnak* λ 10*-szeres algebrai multiplicitású sajátértéke.* $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ *hatványainak rangja rendre* 5, 2, 1, 0. *Írjuk fel a Jordan-normálalakját!*

MEGOLDÁS. A blokkok száma, ami megegyezik a Jordan-láncok számával 5, mivel $n - \mathrm{r}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 10 - 5 = 5$. A leghosszabb lánc hossza 4, mivel $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ legkisebb zérusmátrixot adó hatványa a 4-dik. Az egyenletrendszer és megoldása, valamint a $\mathbf{J}$ Jordan-mátrix:

$$\begin{aligned} n_4 &= 1 \\ n_3 + 2n_4 &= 2 \\ n_2 + 2n_3 + 3n_4 &= 5 \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 &= 10 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} n_4 &= 1 \\ n_3 &= 0 \\ n_2 &= 2 \\ n_1 &= 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{J} = \left[\begin{array}{cccc|cc|cc|c|c} \lambda & 1 & & & & & & & & \\ & \lambda & 1 & & & & & & & \\ & & \lambda & 1 & & & & & & \\ & & & \lambda & & & & & & \\ \hline & & & & \lambda & 1 & & & & \\ & & & & & \lambda & & & & \\ \hline & & & & & & \lambda & 1 & & \\ & & & & & & & \lambda & & \\ \hline & & & & & & & & \lambda & \\ \hline & & & & & & & & & \lambda \end{array}\right]$$

□

11.11. PÉLDA (JORDAN-BLOKKOK MÉRETE). *Egy* 14×14*-es* $\mathbf{A}$ *mátrixról tudjuk, hogy*

$\mathbf{A} - 3\mathbf{I}$ *hatványainak rangja rendre:*	*12, 11, 10, 9, 9;*
$\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$ *hatványainak rangja rendre:*	*12, 10, 9, 9;*
$\mathbf{A} - \mathbf{I}$ *hatványainak rangja rendre:*	*11, 10, 10.*

Írjuk fel az $\mathbf{A}$ *karakterisztikus polinomját és Jordan-normálalakját!*

MEGOLDÁS. Most $n = 14$, és a $\lambda = 3, 2, 1$ számok sajátértékek, mert $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ rangja kisebb 14-nél. A $\lambda = 3$ és a $\lambda = 2$ algebrai multiplicitása $14 - 9 = 5$, mert 9 az első rang, mely ismétlődik. A $\lambda = 1$ multiplicitása hasonlóan számolva $14 - 10 = 4$. Így $\mathbf{A}$-nak nincs más sajátértéke, mert e sajátértékek multiplicitásainak összege 14. Így a karakterisztikus polinom $(3 - \lambda)^5(2 - \lambda)^5(1 - \lambda)^4$.

$\lambda = 3$ esetén a blokkok (Jordan-láncok) száma $n - \mathrm{r}(\mathbf{A} - 3\mathbf{I}) = 14 - 12 = 2$. A leghosszabb lánc hossza $m = 4$, ugyanis ez a legkisebb m, melyre $\mathrm{r}\left((\mathbf{A} - 3\mathbf{I})^m\right) = 14 - 5 = 9$. Az egyenletrendszer és megoldása

$$\begin{aligned} n_4 &= 10 - 14 + 5 = 1 \\ n_3 + 2n_4 &= 11 - 14 + 5 = 2 \\ n_2 + 2n_3 + 3n_4 &= 12 - 14 + 5 = 3 \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 &= 5 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} n_4 &= 1 \\ n_3 &= 0 \\ n_2 &= 0 \\ n_1 &= 1 \end{aligned}$$

Hasonlóan járunk el a többi sajátérték esetén is. $\lambda = 2$ esetén $m = 3$, így

$$\begin{aligned} n_3 &= 10 - 14 + 5 = 1 \\ n_2 + 2n_3 &= 12 - 14 + 5 = 3 \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 &= 5 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} n_3 &= 1 \\ n_2 &= 1 \\ n_1 &= 0 \end{aligned}$$

$\lambda = 1$ esetén $m = 2$, tehát az egyenletrendszer és megoldása

$$\begin{aligned} n_2 &= 11 - 14 + 4 = 1 \\ n_1 + 2n_2 &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} n_2 &= 1 \\ n_1 &= 2 \end{aligned}$$

Összefoglalva:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix}
3 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
& 3 & 1 & & & & & & & & & & & \\
& & 3 & 1 & & & & & & & & & & \\
& & & 3 & & & & & & & & & & \\
& & & & 3 & & & & & & & & & \\
& & & & & 2 & 1 & & & & & & & \\
& & & & & & 2 & 1 & & & & & & \\
& & & & & & & 2 & & & & & & \\
& & & & & & & & 2 & 1 & & & & \\
& & & & & & & & & 2 & & & & \\
& & & & & & & & & & 1 & 1 & & \\
& & & & & & & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & & & & & & 1 & \\
& & & & & & & & & & & & & 1
\end{bmatrix}$$

az **A** mátrix Jordan-normálalakja. □

*Minimálpolinom** A Jordan normálalakból a mátrix sok tulajdonsága leolvasható, így az is, hogy mely polinomokba helyettesítve kapunk zérusmátrixot.

11.12. DEFINÍCIÓ (MINIMÁLPOLINOM). *Legyen* **A** *egy tetszőleges* $\mathbb{F}$ *test fölötti négyzetes mátrix.* Minimálpolinomnak *nevezünk egy olyan minimális fokszámú* $\mu_{\mathbf{A}}$ *főpolinomot (azaz 1 főegyütthatójú polinomot), melyre* $\mu_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$. *Hasonlóan definálható egy* $A : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ *lineáris transzformáció minimálpolinomja, ahol* $\mathcal{V}$ *egy* $\mathbb{F}$ *test fölötti véges dimenziós vektortér.*

► Azt mondjuk, hogy a p polinom az **A** mátrix (A lineáris transzformáció) *annullátora*, vagy hogy *annullálja* azt, ha $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$ ($p(A) = 0$). A minimálpolinom tehát egy legkisebb fokú annullátor főpolinom.

► A nullpolinom nem lehet minimálpolinom, mert nem 1 a főegyütthatója.

► Az **I** mátrixnak, illetve az identikus transzformációnak a $\mu(x) = x - 1$ polinom minimálpolinomja, mert $\mu(\mathbf{I}) = \mathbf{I} - \mathbf{I} = \mathbf{O}$, és ennél alacsonyabb fokú főpolinom már csak egy van, az 1 polinom, ami nem annullálja az **I**-t.

► Ha **A** és **B** hasonló mátrixok, azaz valamely **C** mátrixra $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$, akkor minimálpolinomjaik is egyenlőek, ugyanis $p(\mathbf{B}) = \mathbf{C}^{-1}p(\mathbf{A})\mathbf{C}$ minden p polinomra fönnáll, így minden p polinomra $p(\mathbf{A})$ és $p(\mathbf{B})$ egyszerre **O**, illetve egyszerre nem, tehát minimálpolinomjaik is azonosak.

► Az előző megjegyzés következménye, hogy a minimálpolinom invariáns a mátrixok hasonlóságára, így egy lineáris transzformáció minimálpolinomja megegyezik bármely bázisban fölírt mátrixának minimálpolinomjával.

11.13. ÁLLÍTÁS (A MINIMÁLPOLINOM TULAJDONSÁGAI). *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy tetszőleges test fölötti négyzetes mátrix. Ekkor*

a) $\mathbf{A}$*-nak pontosan egy* $\mu_\mathbf{A}$ *minimálpolinomja van.*

b) Bármely p *polinomra* $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$ *pontosan akkor áll fenn, ha* p *maradék nélkül osztható a* $\mu_\mathbf{A}$ *polinommal.*

c) A $\chi_\mathbf{A}$ *karakterisztikus polinom osztható a* $\mu_\mathbf{A}$ *minimálpolinommal.*

d) $\mathbf{A}$ *minden sajátértéke gyöke* $\mu_\mathbf{A}$*-nak.*

BIZONYÍTÁS. *a)* A Cayley–Hamilton-tétel szerint minden $\mathbf{A}$ mátrixra $\chi_\mathbf{A}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$. Eszerint van legalább egy olyan polinom, mely annullálja $\mathbf{A}$-t. Az ilyen polinomokat elosztva főegyütthatójukkal csupa főpolinomot kapunk. Megmutatjuk, hogy csak egyetlen minimális fokszámú van köztük. Indirekt módon tegyük fel, hogy p és q két különböző minimális fokszámú főpolinom, melyekre $p(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$. Mivel mindkettő főegyütthatója 1, ezért különbségük kisbb fokú, másrészt $(p-q)(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A}) - q(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, ami ellentmond annak, hogy p és q minimális fokszámú annullátorok.

b) Ha p osztható $\mu_\mathbf{A}$-val, azaz $p = \mu_\mathbf{A} q$ valamilyen q polinomra, akkor $p(\mathbf{A}) = \mu_\mathbf{A}(\mathbf{A}) q(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

Fordítva: legyen p egy tetszőleges polinom, melyre $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$. Megmutatjuk, hogy $\mu_\mathbf{A}$ osztója p-nek. Maradékosan osztva p-t $\mu_\mathbf{A}$-val kapjuk, hogy $p = \mu_\mathbf{A} q + r$, ahol r foka kisebb, mint $\mu_\mathbf{A}$ foka, másrészt $\mathbf{O} = p(\mathbf{A}) = \mu_\mathbf{A}(\mathbf{A}) q(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A})$. Innen $r(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, ami csak úgy lehet, ha $r = 0$, hisz $\mu_\mathbf{A}$-nál kisebb fokú polinom nem lehet annullátor, kivéve a zéruspolinomot.

c) Mivel a Cayley–Hamilton-tétel szerint $\chi_\mathbf{A}$ annullátor, ezért az előző pont szerint osztható a minimálpolinommal.

d) Ha $(\lambda, \mathbf{x})$ sajátpár, akkor bármely pozitív egészre $\mathbf{A}^k \mathbf{x} = \lambda^k \mathbf{x}$, így bármely p polinomra $p(\mathbf{A})\mathbf{x} = p(\lambda)\mathbf{x}$. Így $\mu_\mathbf{A}(\mathbf{A})\mathbf{x} = \mu_\mathbf{A}(\lambda)\mathbf{x}$. De $\mu_\mathbf{A}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, és $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, ezért $\mu_\mathbf{A}(\lambda) = 0$. □

► Ha $\chi_\mathbf{A}(x) = \prod_i (x - \lambda_i)^{a_i}$, akkor a *c)*-beli oszthatóság miatt $\mu_\mathbf{A}(x) = \prod_i (x - \lambda_i)^{m_i}$, ahol $1 \leqslant m_i \leqslant a_i$, és ahol a_i jelöli λ_i algebrai multiplicitását.

► Legyen $\mathbf{A}$ nilpotens, ahol $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, de $\mathbf{A}^{k-1} \neq \mathbf{O}$. Ekkor $\mu_\mathbf{A}(x) = x^k$, ugyanis x^k annullátor, így a minimálpolinom csak valamely osztója lehet. Az osztói viszont mind x^m alakúak, ahol $m \leqslant k$, de azok $m < k$ esetén nem annullátorok.

Az $\mathbf{A}$ Jordan-alakja segítségével jól jellemezhető az összes olyan p polinom, melyre $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

11.14. TÉTEL (JORDAN NORMÁLALAK ÉS MINIMÁLPOLINOM). *Legyen az* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ *mátrix spektruma* $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$.

a) $\mu_\mathbf{A}(x) = (x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2} \dots (x - \lambda_s)^{m_s}$*, ahol* m_k *a* λ_k*-hoz tartozó legnagyobb Jordan-blokk mérete.*

b) $\mu_{\mathbf{A}} = \chi_{\mathbf{A}}$ *pontosann akkor áll fenn, ha* $\mathbf{A}$ *minden sajátértékének* 1 *a geometriai multiplicitása.*

c) $\mathbf{A}$ *pontosan akkor diagonalizálható, ha a minimálpolinom lineáris tényezők szorzata, azaz* $\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_s)$.

BIZONYÍTÁS. *a)* Mivel hasonló mátrixok minimálpolinomja azonos, elég csak a Jordan normálalakú mátrixokra szorítkozni. Ha a_i jelöli a λ_i algebrai multiplicitását, akkor karakterisztikus polinomja

$$\chi_{\mathbf{A}}(x) = \prod_{i=1}^{s}(x-\lambda_i)^{a_i}.$$

A minimálpolinom ennek osztója, másrészt minden λ_i sajátérték esetén $x-\lambda_i$ osztója a minimálpolinomnak, tehát a minimálpolinom

$$\prod_{i=1}^{s}(x-\lambda_i)^{k_i}$$

alakú, ahol $1 \leqslant k_i \leqslant a_i$. Világos, hogy

$$\mu_{\mathbf{A}}(x) = \prod_{i=1}^{s}(x-\lambda_i)^{m_i},$$

ugyanis egyrészt annullálja $\mathbf{A}$-t, hisz $(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})^{m_i}$ annullálja az összes λ_i-hez tartozó Jordan-blokkot, így az $(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})^{m_i}$ alakú mátrixok szorzata a zérusmátrix. Másrészt ha valamelyik $x-\lambda_i$ tényező m_i-nél alacsonyabb hatványon szerepelne, akkor nem annullálná a λ_i-hez tartozó legnagyobb Jordan-blokkot, így e blokk nem lenne zérus $\mu(\mathbf{A})$-ban sem, mivel $\prod_{j\neq i}(\mathbf{A}-\lambda_j\mathbf{I})$ főátlójában nemnulla értékek állnak (ellenőrizzük).

b) $\mu_{\mathbf{A}} = \chi_{\mathbf{A}}$ pontosan akkor igaz, ha $\mathbf{A}$ minden sajátértékéhez egyetlen Jordan-blokk tartozik, azaz ha minden geometriai multiplicitás 1.

c) $\mathbf{A}$ pontosan akkor diagonalizálható, ha minden Jordan-blokkja 1×1-es, azaz a legnagyonn Jordan-blokkok 1×1-esek. □

*Kísérő mátrix** Minden polinomhoz találunk olyan mátrixot, melynek az a polinom a karakterisztikus és egyúttal minimálpolinomja.

11.15. ÁLLÍTÁS. *Bármely* $\chi(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ *polinomhoz van olyan mátrix, melynek* χ *a karakterisztikus polinomja. Ilyen a*

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

mátrix, amit a polinom kísérő mátrixának *nevezünk.*

BIZONYÍTÁS. A karakterisztikus polinomot adó determinánsban alulról minden sor x-szeresét a fölötte lévőhöz adva kapjuk, hogy

$$\chi_{\mathbf{C}}(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & -x & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 - x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \chi(x) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & ? \\ 0 & 1 & \dots & 0 & ? \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_1 - x \end{vmatrix}$$

Így $\chi_{\mathbf{C}}(x)$ – előjelszorzót nem számítva – megegyezik a megadott $\chi(x)$ polinommal. □

11.16. ÁLLÍTÁS. *A kísérő mátrix minimálpolinomja megegyezik karakterisztikus polinomjával (egy -1 szorzó erejéig).*

BIZONYÍTÁS. Tetszőleges, de nem csupa zérus c_j konstansokra

$$\left(\sum_{j=0}^{n-1} c_j \mathbf{C}^j\right) \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} \neq \mathbf{0},$$

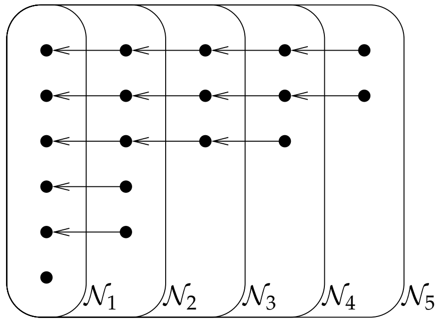
azaz nincs n-nél alacsonyabb fokú annullátor, így $\mu(\mathbf{C}) = (-1)^n \chi(\mathbf{C})$.□

*A Jordan-bázis konstrukciója** A Jordan-tétel bizonyításában megkonstruált bázist kis mátrixokra kézzel is ki lehet számolni. Az itt ismertetendő egyszerű naív algoritmus nem számítógépes megvalósításra való, ennél hatékonyabb is létezik.

Példaként tekintsünk egy 19-edrendű $\mathbf{A}$ mátrixot, melynek λ 19-szeres sajátértéke, és amelyre a Jordan-láncok hossza rendre $n_5 = 2$, $n_4 = 1$, $n_3 = 0$, $n_2 = 2$, $n_1 = 1$. Ennek alapján az $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ hatása a Jordan-bázison meghatározható, amit a 11.1 ábra szemlélt. Jelölje $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k$ nullterét $\mathcal{N}_k$. $\mathcal{N}_5$ a λ-hoz tartozó teljes általánosított sajátaltér – e példában $\mathbb{C}^{19}$. A nulltér meghatározása egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldását jelenti, ami nem okoz nehézséget, de az már nem teljesen mindegy, hogy a bázist hogy választjuk benne.

Az algoritmus – melyet a 11.2 ábra is szemléltet – lényege, hogy a nagyobb indexű terek felől indulva minden lépésben kiterjesztjük $\mathcal{N}_{i-1}$ bázisát $\mathcal{N}_i$ bázisává, majd a kiterjesztésnek vesszük az $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ általi képét, ami már $\mathcal{N}_{i-1}$-be esik, és ezt $\mathcal{N}_{i-2}$ bázisához adva azt kiterjesztjük $\mathcal{N}_{i-1}$ új bázisává. . . . A konvenció az lesz, hogy a vektortér egy generátorának vektorait egyetlen mátrixba tesszük, és azt azonos, de félkövér betűvel jelöljük, tehát pl. $\mathcal{N}$ generátormátrixát $\mathbf{N}$ jelöli. Részletezve:

- Meghatározzuk $\mathcal{N}_i$ egy tetszőleges $\mathbf{N}_i$ bázismátrixát ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).

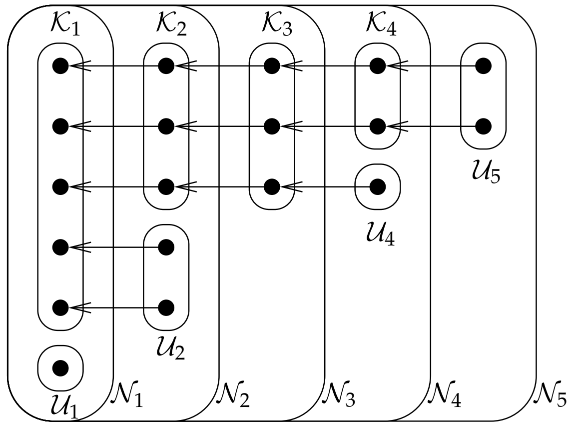


11.1. ábra: Az $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ hatványainak nullterei, és hatása az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-bázisán

- Kiegészítjük $\mathbf{N}_4$-et $\mathcal{N}_5$ bázisává, az új báziselemek mátrixát jelölje $\mathbf{U}_5$, tehát $\mathcal{N}_5$ bázisa most $[\mathbf{N}_4|\mathbf{U}_5]$.
- Legyen $\mathbf{K}_4$ az új elemek $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ általi képe, azaz $\mathbf{K}_4 = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{U}_5$. Mivel $\mathcal{K}_4 \subset \mathcal{N}_4$, de független az $\mathcal{N}_3$ altértől, ezért alkalmas arra, hogy bázisvektorait a Jordan-bázis $\mathcal{N}_4 \setminus \mathcal{N}_3$-ba eső elemei közé vegyük.
- Ha szükséges, egészítsük ki a $[\mathbf{N}_3|\mathbf{K}_4]$-et $\mathcal{N}_4$ bázisává új elemek hozzávételével, így $\mathcal{N}_4$ bázisa most $[\mathbf{N}_3|\mathbf{K}_4|\mathbf{U}_4]$.
- Vegyük a $[\mathbf{K}_4|\mathbf{U}_4]$ mátrix képét, azaz legyen $\mathbf{K}_3 = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})[\mathbf{K}_4|\mathbf{U}_4]$, és ha szükséges, egészítsük ki $[\mathbf{N}_2|\mathbf{K}_3]$-at $\mathcal{N}_3$ bázisává új elemek hozzávételével (azaz $\mathcal{N}_3$ bázisa most $[\mathbf{N}_2|\mathbf{K}_3|\mathbf{U}_3]$ – most $\mathcal{U}_3 = \emptyset$). Hasonlóan folytatjuk $\mathcal{N}_i$ indexét csökkentve: $\mathbf{K}_2 = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})[\mathbf{K}_3|\mathbf{U}_3]$, új elemek hozzávételével előállítjuk $\mathcal{N}_2$ bázisát: $[\mathbf{N}_1|\mathbf{K}_2|\mathbf{U}_2]$.
- Végül legyen $\mathbf{K}_1 = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})[\mathbf{K}_2|\mathbf{U}_2]$, amit $\mathbf{U}_1$-gyel kibővítünk $\mathcal{N}_1$ bázisává. A tér Jordan-bázisa a kép- és az új elemek egyesítése:
$$[\mathbf{K}_1|\mathbf{K}_2|\mathbf{K}_3|\mathbf{K}_4|\mathbf{U}_1|\mathbf{U}_2|\mathbf{U}_3|\mathbf{U}_4|\mathbf{U}_5]\,.$$
- Végül a Jordan-bázis elemeit úgy rendezzük, hogy a láncokat egymás után, minden láncot a sajátvektorból indulva felsorolunk.

Ezek után lássunk egy konkrét példát, majd az algoritmust általánosan. A számolás kivitelezéséhez két megjegyzés:

▶ Ha $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ két altér, és $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$, illetve $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ $(m < n)$ a bázisuk, akkor elemi sorműveletekkel konstruálhatunk $\mathcal{V}$-nek egy olyan $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ bázist, hogy $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$ az $\mathcal{U}$ bázisa legyen. Ehhez írjuk $\mathcal{U}$, majd $\mathcal{V}$ bázisvektorait egyetlen
$$[\mathbf{u}_1 \ \dots \ \mathbf{u}_m \mid \mathbf{v}_1 \ \dots \ \mathbf{v}_n]$$
mátrixba. Ennek lépcsős alakjában vezéregyesek lesznek az első m oszlopban, és $n - m$ további oszlopban. A nekik megfelelő vektorok az eredeti bázisokban (tehát $\mathcal{V}$ összes vektora és $\mathcal{U}$-nak $n - m$ vektora) adják az új bázist.



11.2. ábra: A Jordan-bázist megkonstruáló algoritmus

► Emlékeztetünk rá, hogy ha egy mátrix redukált lépcsős alakja $[\mathbf{I}|\mathbf{S}]$ alakú, akkor $\left[\begin{smallmatrix}-\mathbf{S}\\ \mathbf{I}\end{smallmatrix}\right]$ vagy $\left[\begin{smallmatrix}\mathbf{S}\\ -\mathbf{I}\end{smallmatrix}\right]$ oszlopvektorai a mátrix nulltere bázisát adják. Vigyázzunk, ha $\mathbf{I}$ nem az első oszlopokban van, akkor $\left[\begin{smallmatrix}-\mathbf{S}\\ \mathbf{I}\end{smallmatrix}\right]$ sorait megfelelően permutálni kell.

11.17. példa (Jordan-bázis előállítása). *Határozzuk meg az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 6 & -2 & 4 \\ 4 & -5 & 9 & -3 & 5 \\ 4 & -5 & 8 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix Jordan-normálalakját és Jordan-bázisát!

Megoldás. A karakterisztikus polinom

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = -\lambda^5 + 4\lambda^4 - 6\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda = -\lambda(1-\lambda)^4.$$

A 0-hoz tartozó sajátvektor a redukált lépcsős alakból kiszámítva:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mivel itt az algebrai (és így a geometriai) multiplicitás 1, ez a Jordan-lánc egyelemű. A $\lambda = 1$ esetén a geometriai multiplicitás 2, ugyanis $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ redukált lépcsős alakja és abból a nulltér bázisa:

$$\operatorname{rref}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(\mathbf{A}-1\cdot\mathbf{I})^2$ nullterét gyorsabb úgy számolni, ha nem $\mathbf{A}-\mathbf{I}$-t szorozzuk önmagával, hanem lépcsős alakját jobbról, és annak a szorzatnak vesszük a lépcsős alakját. A lépcsős alak kiszámolása ugyanis csak elemi mátrixokkal való balról szorzást jelent, így

$$(\mathrm{rref}(\mathbf{A}-\mathbf{I}))(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = \mathbf{E}(\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = \mathbf{E}(\mathbf{A}-\mathbf{I})^2$$

vagyis a szorzat az $(\mathbf{A}-\mathbf{I})^2$-en végrehajtott elemi sorműveletek eredménye. Sokkal kevesebb viszont a számolnivaló, mivel a 0-sorok elhagyhatók:

$$\left\{\begin{matrix}(\mathrm{rref}(\mathbf{A}-\mathbf{I}))\,(\mathbf{A}-\mathbf{I})\\ \text{a 0-sorok nélkül}\end{matrix}\right\} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & -2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

ahonnan a bázis vektorai:

$$\mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Hasonlóan határozzuk meg $(\mathbf{A}-\mathbf{I})^3$ bázisát!

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix}(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

ami már lépcsős alakú, és ahonnan a bázismátrix

$$\mathbf{N}_3 = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Ezután határozzuk meg $\mathbf{U}_3$ vektorait, vagyis azokat, amelyek $\mathcal{N}_2$ bázisát ($\mathbf{N}_2$-t) $\mathcal{N}_3$ bázisává egészítik ki. Ehhez az $[\mathbf{N}_2|\mathbf{N}_3]$ mátrixot kell redukált lépcsős alakra hozni, $\mathcal{U}_3$ elemei a $\mathbf{N}_3$ azon oszlopai lesznek, melyek függetlenek $\mathbf{N}_2$-től, azaz melyek redukált lépcsős alakjában vezéregyes van.

$$[\mathbf{N}_2|\mathbf{N}_3] = \left[\begin{array}{ccc|cccc}1 & -1 & -1 & 1 & \mathbf{-1} & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 1\end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

Tehát $\mathbf{U}_3 = [-1\ 0\ 1\ 0\ 0]^T$, és ebből $\mathbf{K}_2 = (\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{U}_3 = [-1\ 3\ 4\ 4\ 0]^T$. Mivel $\mathbf{K}_2$ egyetlen vektorból áll, és $\mathcal{N}_3$ és $\mathcal{N}_2$ dimenzióinak különbsége is 1, ezért itt nem kell számolnunk semmit, $\mathcal{U}_2 = \{\mathbf{0}\}$, azaz $\mathbf{U}_2$

üres. $\mathbf{K}_1 = (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{K}_2 = [0\ 1\ 1\ 1\ 0]^T$, és mivel e vektor benn van $\mathcal{N}_1$ bázisában, $\mathbf{U}_1 = [0\ 1\ 0\ 0\ 1]^T$ teret a másik bázisvektor generálja. A Jordan-normálalak felírásához a Jordan-láncok vektorait egymás után fel kell sorolni, a belőlük képzett $\mathbf{P}$ mátrixszal lesz $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$. E két mátrix

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \mathbf{J} = \left[\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \square$$

Az algoritmus általánosan:

- Input: $\mathbf{A}$, $\chi(x)$ karakterisztikus polinom lineáris tényezőkre bontva,
- Minden λ sajátértékre
  - Határozzuk meg a leghosszabb lánc m hosszát, és $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^i$ nullterét ($\mathcal{N}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$). Legyen $\mathcal{U}_{m+1} = \mathcal{K}_{m+1} = \mathcal{N}_0 = \{\mathbf{0}\}$, azaz e terek bázisa az üreshalmaz.
  - Minden i-re m-től 1-ig haladva:
    * Legyen $\mathbf{K}_i = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})[\mathbf{K}_{i+1}|\mathbf{U}_{i+1}]$.
    * Határozzuk meg $\mathbf{U}_i$-t úgy, hogy $[\mathbf{N}_{i-1}|\mathbf{K}_i|\mathbf{U}_i]$ bázisa legyen $\mathcal{N}_i$-nek. Ehhez az $[\mathbf{N}_{i-1}|\mathbf{K}_i|\mathbf{N}_i]$ mátrix redukált lépcsős alakja alapján válasszuk a bázisoszlopokat $\mathbf{N}_i$-ből az $\mathbf{U}_i$-be.
- Tegyük a Jordan-láncok vektorait balról jobbra egymás mellé minden láncot a sajátvektorral kezdve, az így kapott $\mathbf{P}$ mátrixszal $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$.

Feladatok

11.1. Invariáns altér bázisa Az $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ altér pontosan akkor invariáns altér az L lineáris transzformációra nézve, ha $\mathcal{U}$ egy $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ bázisának minden vektorára $L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$ $(i = 1, \dots, k)$.

11.2. Invariáns altér Tekintsük az $L : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{L}\mathbf{x}$ mátrixleképezést, ahol

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

és legyen $\mathbf{u} = (1, -1, 2, -1)$, $\mathbf{v} = (1, 2, -1, 2)$. Mutassuk meg, hogy az $\mathcal{U} = \operatorname{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ altér invariáns altere az L lineáris transzformációnak.

11.3. Blokkdiagonális mátrixok Ha $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris transzformáció, $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k$ a $\mathcal{V}$ vektortér L-invariáns alterei és $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_k$, akkor L mátrixa blokkdiagonális minden olyan bázisban, mely az alterek bázisainak egyesítése.

11.4. Normálalakok Soroljuk fel az összes lehetséges Jordan-normálalakját annak a mátrixnak, melyről csak annyit tudunk, hogy $(1-\lambda)^4$ a karakterisztikus polinomja. Ne tekintsünk különbözőnek két normálalakot, ha azok csak a Jordan-blokkok sorrendjében különböznek egymástól!

11.5. Jordan-láncok és Jordan-blokkok kapcsolata Tudjuk, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixnak két különböző sajátértéke van, $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 4$, valamint hogy a $\mathbf{C}$ mátrix oszlopvektorai az $\mathbf{A}$ egy Jordan-bázisát alkotják, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rajzoljuk fel a Jordan-láncok diagrammját, és határozzuk meg a $\mathbf{J} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ mátrixot a $\mathbf{C}^{-1}$ kiszámítása nélkül!

Mátrixfüggvények

A Jordan-normálalak segítségével értelmet adhatunk mátrixok függvényeinek. Ez fontos szerepet kap például a lineáris differenciálegyenletek elméletében.

Diagonalizálható mátrixok függvényei Ha egy folyamat egy $\mathbf{x}_k$ állapotát a következővel egy lineáris $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k$ kapcsolat fűzi össze, akkor az $\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0$ összefüggés miatt a folyamatot az $\mathbf{A}$ mátrix hatványai jellemzik. Kérdés lehet például a mátrixhatványok aszimptotikus viselkedése, vagy a nagy kitevőjű hatványok gyors kiszámításának módja.

Diagonális mátrix hatványai könnyen számolhatók: csak a főátló elemeit kell hatványozni. Másrészt $(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{C})^k = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{M}^k\mathbf{C}$, ezért a diagonalizálható mátrixok is könnyen hatványozhatók.

11.18. PÉLDA (MÁTRIXOK HATVÁNYAI). *Tekintsük az alábbi két „majdnem egyenlő" mátrixot:*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.3 & 1.8 \\ -0.6 & 1.8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0.3 & 1.8 \\ -0.5 & 1.8 \end{bmatrix}$$

Vizsgáljuk meg hatványaik határértékét, ha a kitevő tart a végtelenhez!

MEGOLDÁS. Mindkét mátrixot diagonalizáljuk:

$$\mathbf{\Lambda}_1 = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad \text{ahol } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

valamint

$$\mathbf{\Lambda}_2 = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad \text{ahol } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{D}^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Így a k-adik hatvány könnyen számolható:

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{C}\begin{bmatrix} 0.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.9 \end{bmatrix}^k \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\begin{bmatrix} 0.6^k & 0.0 \\ 0.0 & 0.9^k \end{bmatrix}\mathbf{C}^{-1}$$

Mivel mindkét sajátérték abszolút értéke kisebb 1-nél, ezért $\mathbf{\Lambda}_1^k \to \mathbf{O}$ és így $\mathbf{A}^k \to \mathbf{O}$, ha $k \to \infty$. A $\mathbf{B}$ mátrix esetén

$$\mathbf{B}^k = \mathbf{D}\begin{bmatrix} 1.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.3 \end{bmatrix}^k \mathbf{D}^{-1} = \mathbf{D}\begin{bmatrix} 1.2^k & 0.0 \\ 0.0 & 0.3^k \end{bmatrix}\mathbf{D}^{-1},$$

ami arra vezet, hogy $\mathbf{\Lambda}_2^k \to \left[\begin{smallmatrix} \infty & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ és a $\mathbf{D}$ és a $\mathbf{D}^{-1}$ elemeinek előjelét is figyelembe véve így $\mathbf{B}^k \to \left[\begin{smallmatrix} -\infty & \infty \\ -\infty & \infty \end{smallmatrix}\right]$, ha $k \to \infty$. □

Ha $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ és $\mathbf{D}$ diagonális, továbbá $\mathbf{D}$ főátlóbeli elemei benne vannak a hatványsor konvergenciatartományában, akkor

$$\begin{aligned} f(\mathbf{D}) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbf{D}^k = \operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k d_1^k, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} a_k d_1^k\right) \\ &= \operatorname{diag}(f(d_1), \dots, f(d_n)). \end{aligned}$$

Eszerint például bármely diagonalizálható $\mathbf{A}$ mátrixra értelmezhető az $e^{\mathbf{A}}$ hatvány, nevezetesen

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^n}{n!} + \dots$$

Hasonlóképp definiálható az $\ln(\mathbf{I} + \mathbf{A})$ mátrixfüggvény is. Fölhasználva a

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \qquad |x| < 1$$

hatványsort kapjuk, hogy

$$\ln(\mathbf{I} + \mathbf{A}) = \mathbf{A} - \frac{\mathbf{A}^2}{2} + \frac{\mathbf{A}^3}{3} - \frac{\mathbf{A}^4}{4} + \dots,$$

ahol $\varrho(\mathbf{A}) < 1$. Az eddigiek alapján két sejtést fogalmazhatunk meg:

- ▶ Egy hatványsorba fejthető függvénynek egy diagonális mátrixban – és így bármely diagonalizálható mátrixban – fölvett értékét a függvénynek csak a sajátértékekben való viselkedése befolyásolja.
- ▶ A Cayley–Hamilton-tétel szerint minden mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét, így egy n-edrendű mátrix minden hatványa legföljebb $n-1$-edik hatványok lineáris kombinációjával helyettesíthető, azaz a függvény értéke egy polinomba való helyettesítéssel is kiszámolható.

Mátrixfüggvény kiszámítása a Jordan-alakból A Jordan-féle normálalakba írt mátrix hatványai és így polinomjai is kifejezhetők a sajátértékek függvényei segítségével. Ez lehetővé teszi tetszőleges négyzetes mátrix függvényének definiálását!

A Jordan-normálalak egyik egyszerű következménye az alábbi:

11.19. Állítás (Mátrix polinomja). *Legyen az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix Jordan-felbontása $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}$ és $p \in \mathbb{C}[x]$ egy tetszőleges polinom. Ekkor*

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{C}p(\mathbf{J})\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\begin{bmatrix} p(\mathbf{J}_1) & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & p(\mathbf{J}_2) & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & p(\mathbf{J}_k) \end{bmatrix}\mathbf{C}^{-1}, \qquad (11.4)$$

A Jordan-blokk polinomjának általános alakja felírható a polinom deriváltjai segítségével, de ezt általánosabb formában, tetszőleges (Taylor-polinommal vagy Taylor-sorral rendelkező) függvényre fogjuk megtenni. Tegyük fel, hogy az f függvény λ körül Taylor-sorba fejthető, azaz

$$f(x) = f(\lambda) + f'(\lambda)(x-\lambda) + \ldots + \frac{f^{(m)}(\lambda)}{m!}(x-\lambda)^m + \ldots$$

és legyen $\mathbf{J} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ egy Jordan-blokk, azaz

$$\mathbf{J} = \lambda\mathbf{I} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Mivel $\mathbf{N}^n = \mathbf{O}$, fenn kell álljon az

$$f(\mathbf{J}) = f(\lambda\mathbf{I} + \mathbf{N}) = f(\lambda)\mathbf{I} + f'(\lambda)\mathbf{N} + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!}\mathbf{N}^{n-1} \qquad (11.5)$$

összefüggés – ha egyáltalán van értelme az $f(\mathbf{J})$ kifejezésnek. Tehát az f függvénynek csak a Jordan-mátrix rendjénél kisebb rendű deriváltjai játszanak szerepet a függvényértékben. Ez a következő két definícióhoz vezet.

11.20. DEFINÍCIÓ (SPEKTRUMON DEFINIÁLT FÜGGVÉNY). *Legyen az* $\mathbf{A}$ *mátrix spektruma* $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, *a* λ_i *sajátértékhez tartozó legnagyobb Jordan-blokk rendjét jelölje* m_i. *Azt mondjuk, hogy* f definiálva van az $\mathbf{A}$ spektrumán, *ha az*

$$f^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 0, 1, \ldots, m_i - 1, \; i = 1, \ldots, k$$

értékek léteznek. Azt mondjuk, hogy ezek az értékek az f értékei az $\mathbf{A}$ spektrumán.

▶ Minden függvény, mely $\mathbf{C}$ minden pontjában akárhányszor differenciálható, tetszőleges mátrixra értelmezve van annak spektrumán. Így minden polinom értelmezve van minden mátrix spektrumán, ami összhangban lesz azzal, hogy minden négyzetes mátrixnak bármely polinomfüggvénye értelmezve van.
▶ Ha μ az $\mathbf{A}$ mátrix minimálpolinomja, akkor μ értelmezve van $\mathbf{A}$ spektrumán, és μ értékei $\mathbf{A}$ spektrumán mind nullák. Ez egyből következik a minimálpolinom a 11.14. tételbeli előállításából és a fenti definícióból.

11.21. DEFINÍCIÓ (MÁTRIXFÜGGVÉNY A JORDAN-ALAKBÓL). *Legyen* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *Jordan-felbontása* $\mathbf{A} = \mathbf{CJC}^{-1}$, *ahol* $\mathbf{J} = \operatorname{diag}(\mathbf{J}_1, \ldots, \mathbf{J}_k)$ *a Jordan-*

féle normálalakja, és n_i jelöli a $\mathbf{J}_i$ blokk rendjét. Ekkor

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{C}f(\mathbf{J})\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\operatorname{diag}(f(\mathbf{J}_1), \ldots, f(\mathbf{J}_k))\mathbf{C}^{-1},$$

ahol

$$f(\mathbf{J}_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} & \ldots & \frac{f^{(n_i-2)}(\lambda_i)}{(n_i-2)!} & \frac{f^{(n_i-1)}(\lambda_i)}{(n_i-1)!} \\ 0 & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \ldots & \ldots & \frac{f^{(n_i-2)}(\lambda_i)}{(n_i-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & f'(\lambda_i) & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & f(\lambda_i) \end{bmatrix} \tag{11.6}$$

- Egyszerű képletbehelyettesítéssel $f(x) = x^3$ esetén

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} f(2) & f'(2) \\ 0 & f(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

- Az $f(x) = \mathrm{e}^x$ függvény esetén, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ akkor } \mathrm{e}^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^2 & e^2 & \frac{e^2}{2} \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix} = e^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Általában a λ-hoz tartozó Jordan-blokkra

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix} \text{ esetén } e^{\mathbf{J}} = e^{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \ldots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & \frac{1}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & \frac{1}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

11.22. PÉLDA (MÁTRIX EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNYE). *Legyen*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg az $e^{\mathbf{A}}$ mátrixot!

MEGOLDÁS. $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja

$$x^3 + 10x^2 + 32x + 32 = (x+2)(x+4)^2,$$

így

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{P}e^{\mathbf{J}}\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2e^4}\begin{bmatrix} e^2+1 & 2e^2-2 & e^2-1 \\ e^2-1 & 2e^2 & e^2-1 \\ 1-e^2 & 2-2e^2 & 3-e^2 \end{bmatrix} \qquad \square$$

Mátrixfüggvény kiszámítása polinominterpolációval Az, hogy az előzőekben egy mátrix függvényének kiszámításához valójában csak a mátrix egy polinomjának kiszámítása kellett, azt sejteti, hogy mátrix függvényét polinominterpolációval is számolhatjuk.

Az alapgondolat az, hogy ha f az $\mathbf{A}$ mátrix spektrumán definiált függvény, akkor elég megkeresni azt a polinomot (vagy egy olyan polinomot), amely azonos helyettesítési értékeket ad a függvény és deriváltjai helyettesítési értékeivel. Ezt a gondolatot a következő állítás alapozza meg:

11.23. ÁLLÍTÁS (SPEKTRUMON AZONOS ÉRTÉKEKET ADÓ POLINOMOK). *Tetszőleges p és q polinomokra és $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixra $p(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A})$, pontosan akkor teljesül, ha p és q értékei $\mathbf{A}$ spektrumán azonosak.*

BIZONYÍTÁS. Ha $p(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A})$, akkor $h = p - q$ annullálja $\mathbf{A}$-t, így h osztható a minimálpolinommal, így a minimálpolinommal együtt h értékei is nullák az $\mathbf{A}$ spektrumán.

Ha p és q értékei $\mathbf{A}$ spektrumán azonosak, akkor a $h = p - q$ polinom értékei mind nullák. Az ilyen polinomok alakja $\prod_{i=1}^{s}(x - \lambda_i)^{m_i} g(x)$, azaz $h = \mu g$, tehát h annullálja $\mathbf{A}$-t, így $p(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A})$. $\square$

11.24. DEFINÍCIÓ (MÁTRIXFÜGGVÉNY INTERPOLÁCIÓS POLINOMMAL). *Legyen $\mathbf{A}$ minimálpolinomja $\mu_{\mathbf{A}}$, és tegyük fel, hogy az f függvény definiálva van $\mathbf{A}$ spektrumán. Ekkor $f(\mathbf{A}) := p(\mathbf{A})$, ahol p az a polinom, melynek foka kisebb $\mu_{\mathbf{A}}$ fokánál, és amely eleget tesz a*

$$p^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 0, 1, \ldots, m_i - 1,\ i = 1, \ldots, k \tag{11.7}$$

feltételeknek, ahol m_i a λ_i sajátértékhez tartozó legnagyobb Jordan-blokk rendjét jelöli.

► A definícióban megadott polinom egyértelműen létezik, ezt nevezzük *Hermite-féle interpolációs polinomnak*, mely explicit módon is megadható:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{s}\left(\left(\sum_{j=0}^{m_i-1}\left(\frac{f(y)}{\prod_{k\neq i}(y-\lambda_k)}\right)^{(j)}(\lambda_i)\,\frac{(x-\lambda_i)^j}{j!}\right)\prod_{j\neq i}(x-\lambda_j)^{m_j}\right).$$

Ha **A**-nak minden sajátértéke egyszeres algebrai multiplicitású, azaz $s = n$ és $m_i = 1$ minden i-re, akkor az előző formula az ismert Lagrange-féle interpolációs polinomot adja:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(\lambda_i) \prod_{j \neq i} \frac{x - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \right). \tag{11.8}$$

Ha pedig **A**-nak csak egyetlen sajátértéke λ, melynek n az algebrai multiplicitása, azaz $s = 1$, $m_1 = n$, akkor f Taylor-polinomját kapjuk:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} f^{(j)}(\lambda) \frac{(x - \lambda)^j}{j!}.$$

► Az Hermite-polinom ugyan egyértelmű, de nem mindig tudjuk könnyen meghatározni, például ha a mátrixnak csak a sajátértékeit ismerjük, de a legnagyobb Jordan-blokk méretét nem. A 11.23. állítás szerint bármely más polinom is megfelel, mely kielégíti a (11.7) feltételeket.
► Nézzük az $f(x) = x^3$ függvény helyettesítési értékét a $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ mátrixban. Ugyan f polinom, de mivel $\mu_\mathbf{A}(x) = (x-2)^2$, azaz a minimálpolinom kisebb fokú, ezért van olyan elsőfokú polinom is, mely **A**-ban azonos értéket ad. E polinom az $x^3 : \mu_\mathbf{A}(x)$ osztás maradéka. Mivel $x^3 = (x-2)^2(x+4) + (12x - 16)$, azaz a maradék $12x - 16$, ezért

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3 = 12 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 16 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

► Az előző megjegyzésbeli polinomot úgy is megkaphatjuk, hogy az f függvényhez megkeressük az Hermite-féle interpolációs polinomot, azaz keresünk egy olyan $p(x) = ax + b$ polinomot melynek helyettesítési értéke, és deriváltjának helyettesítési értéke megegyezik az f megfelelő helyettesítési értékeivel:

$$\begin{aligned} f(2) &= 8 = p(2) = 2a + b \\ f'(2) &= 12 = p'(2) = a. \end{aligned}$$

Innen $a = 12$, $b = -16$, ami megegyezik az előző eredménnyel.
► Hasonlóan egyszerűen számolható az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixra az $e^\mathbf{A}$ értéke. Mivel $\mu_\mathbf{A}(x) = (x-2)^3$ ezért van legföljebb másodfokú Hermite-polinom. Legyen ez $p(x) = ax^2 + bx + c$. Ekkor

$$\begin{aligned} e^x\big|_2 &= e^2 = p(2) = 4a + 2b + c \\ (e^x)'\big|_2 &= e^2 = p'(2) = 4a + b \\ (e^x)''\big|_2 &= e^2 = p''(2) = 2a. \end{aligned}$$

Innen $a = e^2/2$, $b = -e^2$, $c = e^2$, így

$$
\begin{aligned}
e^{\mathbf{A}} &= p(\mathbf{A}) = \frac{e^2}{2}\mathbf{A}^2 - e^2\mathbf{A} + e^2\mathbf{I} \\
&= \frac{e^2}{2}\begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} - e^2\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + e^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= e^2\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

11.25. PÉLDA (EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNY HERMITE-POLINOMMAL). *Számítsuk ki az $e^{\mathbf{A}}$ mátrixot ha*

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}
$$

(ld. még a 11.22. példát).

MEGOLDÁS. A 11.22. példa megoldásában láttuk, hogy a karakterisztikus polinom $\chi_{\mathbf{A}}(x) = (x+2)(x+4)^2$, másrészt hogy a Jordan-alak $\operatorname{diag}(-2,-4,-4)$, tehát a legnagyobb Jordan-blokk 1×1-es, ezért a minimálpolinom $\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x+2)(x+4) = x^2 + 6x + 8$. Tehát olyan elsőfokú $p(x) = ax + b$ alakú polinomot keresünk, melyre

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-2} &= p(-2) = -2a + b \\
\mathrm{e}^{-4} &= p(-4) = -4a + b.
\end{aligned}
$$

Innen $a = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-4})$, $b = 2\mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-4}$, így

$$
\mathrm{e}^{\mathbf{A}} = a\mathbf{A} + b\mathbf{I} = \frac{1}{2\mathrm{e}^4}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^2+1 & 2\mathrm{e}^2-2 & \mathrm{e}^2-1 \\ \mathrm{e}^2-1 & 2\mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^2-1 \\ 1-\mathrm{e}^2 & 2-2\mathrm{e}^2 & 3-\mathrm{e}^2 \end{bmatrix}.
$$

□

11.26. TÉTEL (A DEFINÍCIÓK EKVIVALENCIÁJA). *A mátrixfüggvény kiszámítására adott 11.21. és 11.24. definíciók ekvivalensek.*

BIZONYÍTÁS. A 11.24. definíció szerint $f(\mathbf{A}) = p(\mathbf{A})$ és a 11.23. állítás szerint bármely más polinom is megadja $f(\mathbf{A})$-t, ha kielégíti a (11.7) feltételeket. Ugyanakkor a 11.21. definícióban f-nek épp azok a deriváltjai szerepelnek azokban a sajátértékekben kiértékelve, amelyek a (11.7) feltételekben is szerepelnek. Így elég csak azt ellenőrizni, hogy egy Jordan-blokk Hermite-polinomja megegyezik-e a 11.21. definícióban szereplővel. Ezt a polinom Taylor-polinomjára fölírható (11.5) képlet igazolja. □

11.27. PÉLDA (FOURIER-MÁTRIX FÜGGVÉNYEI). *Tekintsük az unitér*

$$\mathbf{W}_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \left[\omega^{kn}\right]_{k,n=0}^{N-1}, \quad \omega = \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}/N}$$

Fourier-mátrixot. Határozzuk meg az f függvényében azt a p polinomot, melyre $p(\mathbf{W}_N) = f(\mathbf{W}_N)$.

MEGOLDÁS. Mivel $\mathbf{W}_N^4 = \mathbf{I}$, és így $N > 3$ esetén $\mathbf{W}_N$ minimálpolinomja $\mu_{\mathbf{W}_N}(x) = x^4 - 1$, ezért f-nek van legfeljebb harmadfokú interpolációs polinomja. Mivel $x^4 - 1$ gyökei különbözőek (± 1, $\pm \mathrm{i}$), ezért az interpolációs polinom (11.8)-beli Lagrange-féle alakja használható:

$$\begin{aligned} p(x) = \frac{1}{4}\big(&f(1)(t+1)(t-\mathrm{i})(t+\mathrm{i}) - f(-1)(t-1)(t-\mathrm{i})(t+\mathrm{i}) \\ &+ \mathrm{i}f(\mathrm{i})(t-1)(t+1)(t+\mathrm{i}) - \mathrm{i}f(-\mathrm{i})(t-1)(t+1)(t-\mathrm{i})\big). \end{aligned}$$

E polinom az $N \leqslant 3$ esetekben is jó, bár nem a legkisebb fokú az interpolációs polinomok közül. □

Megoldások

11.1. Ha $\mathcal{U}$ invariáns altér, akkor definíció szerint $\mathcal{U}$ minden vektorának képe $\mathcal{U}$-ban van, így a bázisvektorok is, azaz $L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$ $(i = 1, \ldots, k)$.

Fordítva, tegyük fel, hogy a bázis minden $\mathbf{u}_i$ elemére $L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$. Legyen $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ egy tetszőleges vektor. Ekkor vannak olyan $x_1, x_2, \ldots, x_k$ számok, hogy $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \ldots + x_k\mathbf{u}_k$. Így

$$L\mathbf{x} = x_1 L\mathbf{u}_1 + x_2 L\mathbf{u}_2 + \ldots + x_k L\mathbf{u}_k \in \mathcal{U},$$

mivel $\mathcal{U}$-beli vektorok lineáris kombinációja is $\mathcal{U}$-beli.

11.2. Igazolni kell, hogy $L\mathbf{u}, L\mathbf{v} \in \mathcal{U}$. Ez például leolvasható az $[\mathbf{u} \mid \mathbf{v} \mid L\mathbf{u} \mid L\mathbf{v}]$ mátrix rangjából:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \to rkn111103 - 12$$

Mivel a rang kettő, az $\mathcal{U}$ invariáns altér.

11.4. A karakterisztikus polinom negyedfokú, így a mátrix 4×4-es. Mivel minden sajátérték 1, ezért a Jordan-alak főátlójában csupa 1-es szerepel. A lehetséges öt alak elemi leszámlálással megkapható:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nem tekintjük különbözőnek a blokkok cseréjével egymásból megkapható alakokat. Például az

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix a negyedik alakból a két blokk cseréjével megkapható.

11.5. A $\mathbf{C}$ oszlopai Jordan-bázist alkotnak, azaz minden oszlopvektor egy Jordan-lánc eleme. Mivel az $\mathbf{A}$ mátrixnak csak két különböző sajátértéke van, ez azt jelenti, hogy minden oszlopvektort vagy az $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$ vagy az $\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$ mátrix vagy a zérusvektorba, vagy egy másik oszlopvektorba visz (előbbi esetben az oszlopvektor sajátvektor, utóbbi esetben csak általánosított sajátvektor). E hatást az $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{C}$ és az

$(\mathbf{A}-4\mathbf{I})\mathbf{C}$ szorzatok kiszámításával megkaphatjuk:

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{A}-4\mathbf{I})\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az első szorzatból látszik, hogy $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})[\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \mathbf{c}_3] = [\mathbf{0}\ \mathbf{c}_1\ \mathbf{0}]$, míg a másodikból, hogy $(\mathbf{A}-4\mathbf{I})[\mathbf{c}_4\ \mathbf{c}_5\ \mathbf{c}_6\ \mathbf{c}_7] = [\mathbf{0}\ \mathbf{c}_4\ \mathbf{c}_5\ \mathbf{0}]$ (a második szorzatban már nem is kellett volna a $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$ vektorokkal szorozni látva az előző szorzás eredményét). Ebből fölrajzolható a diagram:

$$\begin{array}{lllllll} \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-2\mathbf{I}} & \mathbf{c}_1 & \xleftarrow{\mathbf{A}-2\mathbf{I}} & \mathbf{c}_2 & & \\ \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-2\mathbf{I}} & \mathbf{c}_3 & & & & \\ \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} & \mathbf{c}_4 & \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} & \mathbf{c}_5 & \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} & \mathbf{c}_6 \\ \mathbf{0} & \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} & \mathbf{c}_7 & & & & \end{array}$$

A diagramból kiolvasható az $\mathbf{A}$ hatása a $\mathbf{c}_i$ vektorokra: $\mathbf{A}\mathbf{c}_1 = 2\mathbf{c}_1$, $\mathbf{A}\mathbf{c}_2 = 2\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_1$, $\mathbf{A}\mathbf{c}_3 = 2\mathbf{c}_3$, $\mathbf{A}\mathbf{c}_4 = 4\mathbf{c}_4$, $\mathbf{A}\mathbf{c}_5 = 4\mathbf{c}_5 + \mathbf{c}_4$, $\mathbf{A}\mathbf{c}_6 = 4\mathbf{c}_6 + \mathbf{c}_5$, $\mathbf{A}\mathbf{c}_7 = 4\mathbf{c}_7$. Ebből felírható e leképezés mátrixa:

$$\mathbf{J} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \left[\begin{array}{cc|c|ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

12

Nemnegatív mátrixok

Különösen sok alkalmazása van azoknak a mátrixoknak, melyek elemei nem negatív számok. Ilyen mátrixok például azok, melyek elemei mérési eredmények, gazdasági adatok, valószínűségek,...

A Perron–Frobenius-elmélet

Mátrixok összehasonlítása Mátrixok elemenkénti összehasonlítására a szokásos relációjeleket fogjuk használni. $\mathbf{A} > \mathbf{B}$ azt jelenti, hogy mindkét mátrix azonos méretű, és $a_{ij} > b_{ij}$ minden lehetséges i és j indexre. Hasonlóan $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{B}$, ha $a_{ij} \geqslant b_{ij}$. Egy $\mathbf{A}$ mátrixot *pozitívnak* (*nemnegatívnak*) nevezünk, ha $\mathbf{A} > \mathbf{O}$ ($\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$), azaz ha $a_{ij} > 0$ ($a_{ij} \geqslant 0$). Itt $\mathbf{O}$ a nullmátrixot jelöli. E fogalmakat és jelöléseket vektorokra is használjuk: az $\mathbf{x}$ vektor pozitív, azaz $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, ha $\mathbf{x}$ minden koordinátája pozitív.

Néhány könnyen igazolható észrevétel:

$$\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0} \text{ minden } \mathbf{x} \geqslant 0 \text{ vektorra,} \tag{12.1}$$

$$\mathbf{A} > \mathbf{O} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} > \mathbf{0} \text{ minden } \mathbf{x} \geqslant 0,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \text{ vektorra,} \tag{12.2}$$

$$\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}, \text{ és } \mathbf{x} \geqslant \mathbf{y} \geqslant \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} \geqslant \mathbf{A}\mathbf{y}. \tag{12.3}$$

A nemnegatív mátrixokat négy osztályba fogjuk sorolni aszerint, hogy magasabb hatványai milyen értelemben válnak pozitívvá. Az $\mathbf{A}$ mátrix k-adik hatványának elemeire az $a_{ij}^{(k)}$ jelölést fogjuk használni, azaz $\mathbf{A}^k = [a_{ij}^{(k)}]$

12.1. DEFINÍCIÓ (PRIMITÍV, IREDUCIBILIS ÉS REDUCIBILIS MÁTRIXOK). *Azt mondjuk, hogy a nemnegatív négyzetes* $\mathbf{A}$ *mátrix* primitív, *ha valamely pozitív egészkitevős hatványa pozitív.* $\mathbf{A}$ irreducibilis, *ha minden* (i, j) *indexpárhoz van olyan* k *kitevő, hogy* $a_{ij}^{(k)} > 0$ *és* reducibilis, *ha van olyan* (i, j) *indexpár, hogy minden* k *kitevőre* $a_{ij}^{(k)} = 0$.

► Például a $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix pozitív, így primitív is, hisz első hatványa pozitív, az $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \geqslant \mathbf{O}$ mátrix primitív, mert $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} > \mathbf{O}$

► Az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix nem primitív, hisz $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]^2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, így $\mathbf{A}^{2k+1} = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^{2k} = \mathbf{I}$, és ezek nem pozitív mátrixok. Másrészt a főátlóbeli elemek a páros, a mellékátlóbeliek a páratlan hatványokban pozitívak, így e mátrix irreducibilis. Ez a példa is mutatja, hogy ha egy mátrix irreducibilis, abból nem következik, hogy primitív is. Vagyis abból, hogy „minden elemhez létezik egy k kitevő”, nem következik, hogy létezik egy közös k kitevő is.
► Végül az $\mathbf{A} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ mátrix reducibilis, mivel $\mathbf{A}^k = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{smallmatrix}\right]$, amelyben $a_{12}^{(k)} = 0$ minden k kitevőre.

A 12.1 táblázatban tömören összefoglaljuk a pozitivitás e négy fokozatának definícióját.

A pozitív:	$\forall i,j$	$a_{ij} > 0$
A primitív:	$\exists k\ \forall i,j$	$a_{ij}^{(k)} > 0$
A irreducibilis:	$\forall i,j\ \exists k$	$a_{ij}^{(k)} > 0$
A reducibilis:	$\exists i,j\ \forall k$	$a_{ij}^{(k)} = 0$

12.1. táblázat: $\mathbf{A} = [a_{ij}] \geqslant \mathbf{O}$. Pozitív, primitív, irreducibilis, reducibilis mátrixok definíciója.

A valós vagy komplex elemű $\mathbf{A}$ mátrix $\varrho(\mathbf{A})$ *spektrálsugarán* a legnagyobb abszolút értékű sajátértékének abszolút értékét értjük. Másként fogalmazva a spektrálsugár a komplex számsík legkisebb olyan origó középű körének a sugara, amely tartalmazza az összes sajátértéket.

Pozitív mátrixok E szakaszban csak pozitív mátrixokat vizsgálunk. Az itt ismertetendő elmélet Perrontól származik, melyet két tételben foglalunk össze.

12.2. TÉTEL (PERRON-TÉTEL: POZITÍV SAJÁTÉRTÉK ÉS SAJÁTVEKTOR). *Ha $\mathbf{A}$ pozitív mátrix, és $r = \varrho(\mathbf{A})$ jelöli a spektrálsugarát, akkor*
1. $r > 0$,
2. *r sajátérték egy pozitív sajátvektorral,*
3. *$\mathbf{A}$-nak e pozitív sajátvektor skalárszorosain kívül nincs más nemnegatív sajátvektora.*

BIZONYÍTÁS. 1. Ha $r = 0$, akkor $\mathbf{A}$ minden sajátértéke 0, azaz $\mathbf{A}$ nilpotens a 8.19. tétel szerint. Ez viszont pozitív mátrixra lehetetlen, hisz annak minden hatványa pozitív, tehát semelyik sem $\mathbf{O}$.

2. Legyen $\lambda \in \mathbb{C}$ egyike a legnagyobb abszolút értékű sajátértékeknek, azaz $|\lambda| = r$, és legyen az $\mathbf{x}$ sajátvektorral $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Legyen $\mathbf{p}$ az $\mathbf{x}$ koordinátáinak abszolút értékéből álló vektor, azaz $\mathbf{p} = (|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$. Írjuk fel az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ mindkét oldalának i-edik koordinátáját, majd vegyük annak abszolút értékét:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| = |\lambda||x_i|.$$

Ebből, a háromszög-egyenlőtlenséget fölhasználva kapjuk, hogy

$$rp_i = |\lambda||x_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_j, \quad \text{azaz } r\mathbf{p} \leqslant \mathbf{Ap}.$$

Ha itt egyenlőség áll, kész vagyunk, hisz $r\mathbf{p} = \mathbf{Ap}$ esetén r valóban sajátérték. Ha nem, akkor az $\mathbf{u} = \mathbf{Ap} - r\mathbf{p}$ vektorra $\mathbf{u} \geqslant \mathbf{0}$ és $\mathbf{u}$ legalább egyik koordinátája határozottan pozitív. A (12.2) szerint ekkor $\mathbf{Au} > \mathbf{0}$, azaz $\mathbf{A}(\mathbf{Ap}) - r\mathbf{Ap} > \mathbf{0}$. A $\mathbf{v} = \mathbf{Ap}$ jelöléssel eszerint $\mathbf{Av} > r\mathbf{v}$, ahol $\mathbf{v} > \mathbf{0}$. Megmutatjuk, hogy ez ellentmondásra vezet, azaz megmutatjuk, hogy nincs olyan $\mathbf{v}$ vektor, hogy $\mathbf{Av} > r\mathbf{v}$. Legyen $\varepsilon > 0$ egy olyan szám, melyre még fennáll az $\mathbf{Av} \geqslant (r+\varepsilon)\mathbf{v}$ egyenlőtlenség. A $\mathbf{B} = \frac{1}{r+\varepsilon}\mathbf{A}$ mátrixra tehát egyrészt $\mathbf{Bv} \geqslant \mathbf{v}$, másrészt $\varrho(\mathbf{B}) = \varrho(\frac{1}{r+\varepsilon}\mathbf{A}) = \frac{r}{r+\varepsilon} < 1$, azaz $\mathbf{B}$ spektrálsugara 1-nél kisebb. Ez azt jelenti, hogy $\lim_{k\to\infty} \mathbf{B}^k = \mathbf{O}$. Így a $\mathbf{v} < \mathbf{Bv} < \mathbf{B}^2\mathbf{v} < \cdots < \mathbf{B}^k\mathbf{v}$ vektorsorozat a $\mathbf{0}$ vektorhoz tart, vagyis $\mathbf{v} < \mathbf{0}$, ami ellentmond korábbi feltevésünknek. Ezzel bizonyítottuk, hogy $\mathbf{Ap} = r\mathbf{p}$.
Még meg kell mutatnunk, hogy $\mathbf{p} > \mathbf{0}$. Tudjuk, hogy $\mathbf{p} \geqslant \mathbf{0}$, így a (12.2) összefüggés miatt $\mathbf{Ap} > \mathbf{0}$, de $\mathbf{Ap} = r\mathbf{p}$, tehát $r\mathbf{p} > 0$, azaz $\mathbf{p} > \mathbf{0}$.

3. Legyen $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ a λ sajátértékhez tartozó sajátvektor. Legyen továbbá $\mathbf{q} > \mathbf{0}$ az ugyancsak pozitív, és azonos spektrumú $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ mátrix r-hez tartozó pozitív sajátvektora, azaz $\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{A} = r\mathbf{q}^\mathsf{T}$. Ekkor

$$r\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{x} = (\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{q}^\mathsf{T}(\mathbf{Ax}) = \lambda\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{x},$$

amiből $\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{x} > 0$ miatt $r = \lambda$ adódik.
Végül megmutatjuk, hogy $\mathbf{p}$ skalárszorosain kívül r-hez nem tartozik más sajátvektor. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\mathbf{s}$ egy $\mathbf{p}$-től független sajátvektor. Ekkor megfelelő c konstanssal elérhető, hogy a $\mathbf{p} + c\mathbf{s} \geqslant \mathbf{0}$ vektornak legyen 0 koordinátája. A (12.2) összefüggés szerint $r(\mathbf{p} + c\mathbf{s}) = \mathbf{A}(\mathbf{p} + c\mathbf{s}) > \mathbf{0}$, ami lehetetlen, hisz van 0-koordinátája. Beláttuk tehát, hogy r geometriai multiplicitása 1, és semmilyen más sajátértékhez nem tartozik nemnegatív sajátvektor. □

Valószínűségeloszlások leírásában való szerepe indokolja a következő kitüntető elnevezést. Pozitív mátrix spektrálsugarához, mint sajátértékhez tartozó pozitív $\mathbf{p}$ sajátvektorát *Perron-vektornak* nevezzük, ha koordinátáinak összege 1, azaz 1-normája 1. A hasonló módon definiált bal sajátvektort *bal Perron-vektornak* nevezzük. Ez megegyezik az $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ Perron-vektorával. Összefoglalva: a $\mathbf{p}$ Perron-vektort és a $\mathbf{q}$ bal Perron-vektort az

$$\mathbf{Ap} = r\mathbf{p}, \ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \qquad \mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{A} = r\mathbf{q}^\mathsf{T}, \ \sum_{i=1}^{n} q_i = 1$$

képletek definiálják.

12.3. TÉTEL (PERRON-TÉTEL: EGYSZERES ÉS DOMINÁNS SAJÁTÉRTÉK). *Ha $\mathbf{A}$ pozitív mátrix, és $r = \varrho(\mathbf{A})$, akkor*
1. *az r sajátérték algebrai multiplicitása 1,*
2. *r domináns, azaz minden további λ sajátértékre $|\lambda| < r$.*

BIZONYÍTÁS. 1. Az előző tételben bizonyítottuk, hogy r geometriai multiplicitása 1. Tegyük fel, hogy van olyan $\mathbf{v} > \mathbf{0}$ általánosított sajátvektor, melyre $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{p}$, azaz $\mathbf{A}\mathbf{v} = r\mathbf{v} + \mathbf{p}$. Könnyen elérhető a $\mathbf{p}$ egy megfelelően nagy d konstansszorosának hozzáadásával, hogy pozitív általánosított sajátvektort találjunk, ugyanis $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})(\mathbf{v} + d\mathbf{p}) = \mathbf{p} + d(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\mathbf{p} = \mathbf{p}$, így ha $\mathbf{v}$ egy Jordan-lánc $\mathbf{p}$ előtti eleme, akkor $\mathbf{v} + d\mathbf{p}$ is. Legyen tehát $\mathbf{v} > \mathbf{0}$. Ekkor $\mathbf{A}\mathbf{v} = r\mathbf{v} + \mathbf{p} > r\mathbf{v}$, ami a 12.2. tétel második részének bizonyítása szerint ellentmondásra vezet. $\mathbf{A}$-nak tehát nincs r-hez tartozó általánosított sajátvektora, így algebrai multiplicitása 1.

2. Belátjuk, hogy ha λ az $\mathbf{A}$ egy sajátértéke, akkor $|\lambda| < r$. Indirekt módon bizonyítunk. Legyen $|\lambda| = r$, $\mathbf{x}$ pedig egy λ-hoz tartozó sajátvektor. Az előző tétel bizonyításának 2. pontjában leírtakat ismételve a komplex számok összegére vonatkozó háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_j| \leqslant \left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| = |\lambda||x_i|. \tag{12.4}$$

Mint azt beláttuk, ekkor $(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$ sajátvektor, a hozzá tartozó sajátérték $r = |\lambda|$, és a (12.4) egyenlőtlenségben egyenlőségnek kell állnia. A komplex számokra vonatkozó $|z_1 + \dots + z_k| = |z_1| + \dots + |z_k|$ egyenlőség csak akkor áll fenn, ha mindegyik komplex szám azonos argumentumú. Ez esetünkben azt jelenti, hogy van olyan φ szög, hogy minden i-re $x_i = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}|x_i|$. Eszerint $\mathbf{x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathbf{p}$, tehát $\lambda = r$. □

Tipográfiai különbség van az imaginárius egység álló i-je és a változó index dőlt *i*-je között!

Nemnegatív mátrixok A pozitív mátrixok Perron tételeiben kimondott tulajdonságai közül változtatás nélkül egyik sem marad érvényben nemnegatív mátrixokra. Például

- a $\left[\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right]$ mátrix nemnegatív, de mivel mindkét sajátértéke 0, ezért spektrálsugara is 0,
- az $\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]$ mátrix spektrálsugara 1, de az 1 kétszeres sajátérték, és több lineárisan független pozitív sajátvektor is tartozik hozzá,
- a $\left[\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right]$ mátrix sajátértékei 1 és -1, így spektrálsugara ugyancsak 1, de a spektrálkörön több különböző sajátértéke is van,
- az $\left[\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right]$ mátrixnak nincs pozitív sajátvektora.

Ugyanakkor az sem mondható, hogy ha egy nemnegatív mátrixnak vannak 0 elemei, akkor nem teljesülnek a Perron-tételek állításai. Például

- az $\left[\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{smallmatrix}\right]$ mátrix nemnegatív, sajátértékei 2, -1, spektrálsugara tehát 2, ami egyszeres sajátérték, és a spektrálkörön az egyetlen sajátérték, a hozzá tartozó $(1,1)$ sajátvektor pozitív, és ennek konstansszorosait kivéve más pozitív sajátvektor nincs, mert a -1-hez tartozó sajátvektor $(1,-2)$.

A Perron-tételek állításaiból némi gyengítés után, de még az összes nemnegatív mátrixra érvényes marad a következő állítás:

12.4. TÉTEL (PERRON–FROBENIUS-TÉTEL – GYENGE VÁLTOZAT). *Ha* $\mathbf{A}$ *nemnegatív mátrix, akkor az* $r = \varrho(\mathbf{A})$ *spektrálsugár sajátértéke* $\mathbf{A}$*-nak, melyhez tartozik nemnegatív sajátvektor.*

BIZONYÍTÁS. A bizonyítás alapötlete, hogy az $\mathbf{A}$ nemnegatív mátrixot pozitív mátrixokkal közelítjük, melyekre használhatók Perron-tételei. Legyen

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A} + \frac{1}{k}\begin{bmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1 & \dots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \dots & 1\end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Jelölje $\mathbf{A}_k$ spektrálsugarát r_k, Perron-vektorát $\mathbf{p}_k$, az $\mathbf{A}$ mátrix spektrálsugarát r. A $\mathbf{p}_k$ vektorok korlátos halmazt alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben, mivel mindegyik koordinátájuk 0 és 1 közé esik, így benne vannak az egységkockában. A Bolzano–Weierstrass-tétel szerint kiválasztható közülük egy konvergens $\mathbf{p}_{k_m}$ részsorozat. A határértéket jelölje $\mathbf{p}$. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{p}$ az $\mathbf{A}$-nak r-hez tartozó sajátvektora, és hogy $\mathbf{p} \geqslant \mathbf{0}$, de $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$. Mivel $\mathbf{p}_k > \mathbf{0}$, ezért a határértékéről azt tudjuk, hogy $\mathbf{p} \geqslant \mathbf{0}$. Tekintsük a folytonos $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i$ függvényt. Mivel $f(\mathbf{p}_{k_m}) = 1$, ezért $f(\mathbf{p}) = 1$ is fennáll, így $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$.

Tekintsük ezután az r_k sorozatot. A ?? tétel szerint, $\mathbf{A}_1 > \mathbf{A}_2 > \dots \mathbf{A}_k > \dots > \mathbf{A}$, így $r_1 \geqslant r_2 \geqslant \dots \geqslant r_k \geqslant r$, azaz az r_k sorozat monoton csökkenő, és alulról korlátos, tehát konvergens. Határértékét jelölje $\hat{r}$. Ez egyúttal az r_{k_m} részsorozatnak is határértéke. A fentiek szerint $\hat{r} \geqslant r$. Másrészt

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{A}(\lim_{m\to\infty} \mathbf{p}_{k_m}) = \lim_{m\to\infty} \mathbf{A}\mathbf{p}_{k_m} = \lim_{m\to\infty} r_{k_m}\mathbf{p}_{k_m} = \hat{r}\mathbf{p}.$$

Tehát $\hat{r}$ sajátérték, akkor viszont $\hat{r} \leqslant r$. Így $\hat{r} = r$ és $\mathbf{A}\mathbf{p} = r\mathbf{p}$. □

A következőkben két olyan tételt mondunk ki, melyek a nemnegatív – és így a pozitív – mátrixokra korlátozás nélkül érvényesek.

12.5. TÉTEL (COLLATZ–WIELANDT-TÉTEL). *Az* $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$ *mátrix* r *spektrálsugarára*

$$r = \max_{\substack{\mathbf{x}\\ \mathbf{0}\neq\mathbf{x}\geqslant\mathbf{0}}} \min_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ x_i\neq 0}} \frac{[\mathbf{A}\mathbf{x}]_i}{x_i}. \tag{12.5}$$

Másként megfogalmazva:

$$r = \max_{\substack{\mathbf{x} \\ \mathbf{0} \neq \mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}}} \max_{c\mathbf{x} \leqslant \mathbf{A}\mathbf{x}} c \tag{12.6}$$

A képletek úgy értendők, hogy minden $\mathbf{x}$ vektorra kiszámítjuk az $[\mathbf{A}\mathbf{x}]_i / x_i$ törtek minimumát, és ezen értékek maximumát vesszük, ha $\mathbf{x}$ végigfut a nemnegatív, de nullvektortól különböző vektorokon. Az $x_i = 0$ esetet a keresésből kizártuk, de mondhattuk volna azt is, hogy a tört ekkor legyen ∞, így nem változna a minimum. A második képletben minden $\mathbf{x}$ vektorra meghatározzuk azt a legnagyobb c számot, melyre $c\mathbf{x} \leqslant \mathbf{A}\mathbf{x}$, majd vesszük az így kapott c értékek maximumát.

BIZONYÍTÁS. A két megfogalmazás nyilván ekvivalens, hisz ha egy adott $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$ vektorra c az $\frac{[\mathbf{A}\mathbf{x}]_i}{x_i}$ törtek minimuma, akkor c egyúttal a legnagyobb olyan szám, melyre $c\mathbf{x} \leqslant \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Először pozitív $\mathbf{A}$ mátrixra bizonyítunk. Legyen $\mathbf{q}$ a bal Perron-vektor, r a spektrálsugár. Ekkor a $\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{x} > 0$ számmal való osztás lehetőségét is használva

$$c\mathbf{x} \leqslant \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \rightsquigarrow \quad c\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = r\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{x} \quad \rightsquigarrow \quad c \leqslant r.$$

Másrészt az $\mathbf{x} = \mathbf{p}$ vektorra $r\mathbf{p} = \mathbf{A}\mathbf{p}$, tehát a lehetséges c értékek maximuma r.

Ezután marad az $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$ eset. Az előző tétel bizonyításában használt ötletet alkalmazzuk. Jelöljük $\mathbf{q}_k$-val az ott definiált $\mathbf{A}_k$ mátrix bal Perron-vektorát. Ekkor egy rögzített $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorra

$$0 \leqslant c\mathbf{x} \leqslant \mathbf{A}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{A}_k\mathbf{x} \quad \rightsquigarrow \quad c\mathbf{q}_k^\mathsf{T}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{q}_k^\mathsf{T}\mathbf{A}_k\mathbf{x} = r_k\mathbf{q}_k^\mathsf{T}\mathbf{x} \quad \rightsquigarrow \quad c \leqslant r_k.$$

Így $c \leqslant \lim_k r_k = r$, amiből az előzőekhez hasonlóan az $\mathbf{x} = \mathbf{p}$ vektorra $r\mathbf{p} = \mathbf{A}\mathbf{p}$ adódik, tehát a lehetséges c értékek maximuma r. □

12.6. TÉTEL (NEMNEGATÍV MÁTRIXOK SPEKTRÁLSUGARÁNAK BECSLÉSE). *Ha $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$, akkor a spektrálsugár a sorösszegek minimuma és maximuma, illetve az oszlopösszegek minimuma és maximuma közé esik, azaz*

$$\min_i \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \right\} \leqslant \varrho(\mathbf{A}) \leqslant \max_i \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \right\}$$
$$\min_j \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ij} \right\} \leqslant \varrho(\mathbf{A}) \leqslant \max_j \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ij} \right\}$$

BIZONYÍTÁS. Az első egyenlőtlenség felső korlátját bizonyítja, hogy minden Gerschgorin kör benne van a 0 közepű $\sum_{j=1}^n a_{ij}$ sugarú körben.

A bal oldali egyenlőtlenség a Collatz–Wielandt-tételből következik, ha ugyanis $\mathbf{x} = \mathbf{1}$, akkor akkor az $[\mathbf{A}\mathbf{x}]_i / x_i$ hányados épp a sorösszeg, tehát annak minimuma kisebb vagy egyenlő $\rho(\mathbf{A})$-nál.

A második egyenlőtlenségeket megkapjuk, ha az elsőt $\mathbf{A}^\mathsf{T}$-ra alkalmazzuk, melynek spektruma és így spektrálsugara is azonos $\mathbf{A}$-éval.□

Irreducibilis mátrixok Az előző szakaszban láttuk, hogy Perron tételei nem maradnak érvényben általában, de vannak mátrixok, amelyekre igen. Frobenius talált rá arra a könnyen ellenőrizhető feltételre, mely alapján eldönthető, hogy egy nemnegatív mátrix melyik csoportba tartozik: e feltétel az irreducibilitás.

12.7. ÁLLÍTÁS (REDUCIBILIS ÉS IRREDUCIBILIS MÁTRIXOK). *Az* $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$ *mátrix pontosan akkor* reducibilis*, ha a sorok és oszlopok azonos permutációjával*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Z} \end{bmatrix}$$

alakra hozható, ahol $\mathbf{X}$ *és* $\mathbf{Z}$ *négyzetes mátrixok. Azaz létezik olyan* $\mathbf{P}$ *permutáló mátrix, hogy* $\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^\mathsf{T}$ *a fenti alakú. Pontosan azok a mátrixok irreducibilisek, amelyek nem hozhatók ilyen alakra.*

BIZONYÍTÁS. Ha nemnegatív mátrix hatványait vizsgáljuk, és csak az a kérdés, hogy a mátrix egy adott helyén hányadik hatványban lesz az érték pozitív, akkor a számok nagysága nem számít, csak pozitív vagy zérus volta. Ez a következő ötlethez vezet. Tekintsük azt az gráfot, amelyben az i-edik csúcsból a j-edikbe pontosan akkor fut irányított él, ha $a_{ij} > 0$. E gráf $\mathbf{G}$ szomszédsági mátrixa úgy kapható meg az $\mathbf{A}$-ból, hogy a pozitív számokat 1-re cseréljük. Könnyen látható, hogy $\mathbf{G}^2$ mátrix $[\mathbf{G}^2]_{ij}$ eleme pontosan akkor pozitív, ha az i-edik csúcsból vezet 2-hosszú irányított út a j-edikbe. Sőt, általában $[\mathbf{G}^k]_{ij}$ eleme pontosan akkor pozitív, ha az i-edik csúcsból vezet k-hosszú irányított út a j-edik csúcsba. Így $\mathbf{A}$ pontosan akkor irreducibilis, ha a fent hozzárendelt gráfjában bármely két csúcs között vezet irányított út, azaz ha a gráf *erősen összefüggő*. Eszerint a mátrix pontosan akkor reducibilis, ha gráfjában a csúcsoknak van egy olyan nem üres valódi részhalmaza, amelybe nem vezet kívülről (a komplementer csúcshalmazból) él. A szomszédsági mátrix sorainak és oszlopainak azonos permutációja a gráf csúcsai átszámozásának felel meg. A tételbeli $\left[\begin{smallmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Z} \end{smallmatrix}\right]$ mátrixhoz egy olyan gráf tartozik, melynek első k csúcsába nem vezet él, ha $\mathbf{X}$ egy $k \times k$-as mátrix. Ez bizonyítja állításunkat. □

12.8. PÉLDA. *Döntsük el, hogy az alábbi mátrixok közül melyik reducibilis, melyik irreducibilis! (Segítségül a nemnulla mátrixelemekről leolvasható a* *sor- és oszlopindex.)*

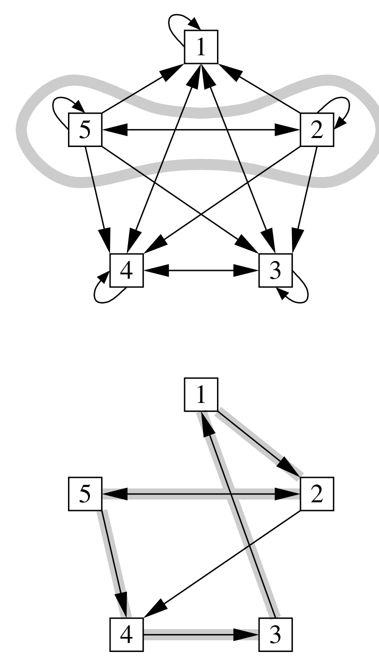
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 13 & 14 & 0 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \\ 31 & 0 & 33 & 34 & 0 \\ 41 & 0 & 43 & 44 & 0 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & 25 \\ 31 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 43 & 0 & 0 \\ 0 & 52 & 0 & 54 & 0 \end{bmatrix}.$$

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{A}$ mátrixon könnyű észrevenni, hogy reducibilis, mert az első és utolsó sorok és oszlopok cseréjével, vagyis a következő $\mathbf{P}$ permutáló mátrixszal a kívánt alakra hozható:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{PAP}^{\mathsf{T}} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 55 & 52 & 53 & 54 & 51 \\ 25 & 22 & 23 & 24 & 21 \\ \hline 0 & 0 & 33 & 34 & 31 \\ 0 & 0 & 43 & 44 & 41 \\ 0 & 0 & 13 & 14 & 11 \end{array}\right].$$

Nem ez az egyetlen permutáció, pl. az $1 \to 3 \to 4 \to 5 \to 2 \to 1$ csere is megteszi:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{PAP}^{\mathsf{T}} = \left[\begin{array}{cc|ccc} 22 & 25 & 21 & 23 & 24 \\ 52 & 55 & 51 & 53 & 54 \\ \hline 0 & 0 & 11 & 13 & 14 \\ 0 & 0 & 31 & 33 & 34 \\ 0 & 0 & 41 & 43 & 44 \end{array}\right].$$



12.1. ábra: Az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixokhoz rendelt két gráf.

Az $\mathbf{A}$ mátrixhoz rendelt gráf a 12.1. ábrán látható első gráf. Vegyük észre, hogy a $\{2,5\}$ ponthalmazba nem fut él az $\{1,3,4\}$ halmazból. Ez azt jelenti, hogy ha a csúcsokat átszámozzuk az 5-ös és 1-es sorszám fölcserélésével, akkor az $\{1,2\}$ halmazba nem fut él a $\{3,4,5\}$ halmazból. Ez épp azt jelenti, hogy bármely mátrixban, melynek ez a gráfja, a bal alsó 3×2-es részmátrixa zérusmátrix. Tehát a mátrix reducibilis.

A $\mathbf{B}$ mátrixban több 0 van, azt hinnénk, ez inkább lesz reducibilis, mégsem találunk megfelelő $\mathbf{P}$ permutáló mátrixot. Gráfja erősen összefüggő, például az 1-2-5-4-3-1 útvonalon bármely pontból bármely másik elérhető. Tehát $\mathbf{B}$ irreducibilis. □

► Fontos megjegyezni, hogy a 12.7. állítás a *sorok és oszlopok azonos permutációjáról* szól, tehát nem elég a mátrixot elemi sorműveletekkel $\left[\begin{smallmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Z} \end{smallmatrix}\right]$ alakra hozni. Ugyanazokat a műveleteket az oszlopokra is alkalmazni kell. Például a

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix irreducibilis, hisz egy 3-hosszú irányított kör szomszédsági mátrixa, de az első két sor cseréje a kívánt alakra hozza. Az első két oszlopot is kicserélve viszont már nem az $\left[\begin{smallmatrix}\mathbf{X} & \mathbf{Y}\\ \mathbf{O} & \mathbf{Z}\end{smallmatrix}\right]$ alakot kapjuk!

► A 12.1 táblázat kiegészíthető a gráfelméleti megfogalmazásokkal:

A	algebrai feltétel		gráfelméleti feltétel
pozitív:	$\forall i, j$	$a_{ij} > 0$	irányított teljes gráf
primitív:	$\exists k\ \forall i, j$	$a_{ij}^{(k)} > 0$	bármely két csúcs között fut k-hosszú út
irreducibilis:	$\forall i, j\ \exists k$	$a_{ij}^{(k)} > 0$	erősen összefüggő
reducibilis:	$\exists i, j\ \forall k$	$a_{ij}^{(k)} = 0$	nem erősen összefüggő

Frobenius vette észre és bizonyította, hogy az irreducibilitás az a feltétel, melynek fennállása esetén a nemnegatív mátrixokra is kiterjeszthetők a 12.2. tétel állításai.

12.9. TÉTEL (PERRON–FROBENIUS-TÉTEL – ERŐS VÁLTOZAT). *Ha az* $\mathbf{A}$ *nemnegatív mátrix irreducibilis, és* $r = \varrho(\mathbf{A})$ *jelöli a spektrálsugarát, akkor*

1. $r > 0$,
2. r *sajátértéke* $\mathbf{A}$*-nak, melyhez tartozik pozitív sajátvektor,*
3. $\mathbf{A}$*-nak e pozitív sajátvektor skalárszorosain kívül nincs más nemnegatív sajátvektora,*
4. r *egyszeres sajátérték.*

Primitív és imprimitív mátrixok A Perron-tétel állításai közül nem maradt igaz az irreducibilis nemnegatív mátrixokra az, hogy a spektrálkörön csak egyetlen sajátérték van. Ez a tulajdonság is megmarad azonban a primitív mátrixokra.

12.10. TÉTEL (FELTÉTEL MÁTRIX PRIMITIVITÁSÁRA). *Ha* $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$ *irreducibilis és főátlójában van pozitív elem, akkor primitív.*

BIZONYÍTÁS. Legyen a főátló i-edik eleme pozitív. Ha $\mathbf{A}$ irreducibilis, akkor bármely csúcsból vezet irányított út az i-edik csúcsba. Közülük a leghosszabb út hosszát jelölje k_1. Ugyanígy bármely csúcsba vezet út az i-edik csúcsból. Ezek leghosszabbikának hosszát jelölje k_2. Ezután bármely csúcsból bármely csúcsba eljuthatunk $k = k_1 + k_2$ hosszú irányított úton az i-edik csúcs érintésével, és az ott lévő hurokélen megfelelő szmú kört téve. □

12.11. PÉLDA (PRIMITÍV MÁTRIXOK). *Döntsük el, hogy az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 8 \\ 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixok közül melyik primitív! Egyúttal vizsgáljuk irreducibilitásukat is!

MEGOLDÁS. A mátrixok gráfját fölrajzolva látjuk, hogy csak $\mathbf{A}$ reducibilis, így az nem primitív. A $\mathbf{B}$ mátrix pozitív, így irreducibilis és primitív is. $\mathbf{C}^3 = \mathbf{I}$, így $\mathbf{C}^{3m} = \mathbf{I}$, tehát $\mathbf{C}$ egyik hatványa sem lesz pozitív, tehát $\mathbf{C}$ imprimitív. A $\mathbf{D}$ mátrix ugyan irreducibilis, de négyzete

$$\mathbf{D}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

már nem, így a $\mathbf{D}^{2m}$ hatványok sem, tehát $\mathbf{D}$ egyik hatványa sem lesz pozitív, így $\mathbf{D}$ is imprimitív. Az $\mathbf{E}$ mátrix irreducibilis és a főátlóján van pozitív elem, ezért primitív. Az $\mathbf{F}$ mátrixra

$$\mathbf{F}^5 = \begin{bmatrix} 27216 & 20412 & 31104 \\ 36288 & 54432 & 57348 \\ 23814 & 46656 & 54432 \end{bmatrix} > \mathbf{O},$$

tehát $\mathbf{F}$ primitív, de e számolás egyszerűbbel is helyettesíthető. Elég ugyanis csak azt nézni, hogy egy hatványban egy elem 0 vagy nem, azaz az $\mathbf{F}$ helyett csak azzal a logikai értékeket tartalmazó $\hat{\mathbf{F}}$ mátrixszal kell számolni, melyet $\mathbf{F}$-ből úgy kapunk, hogy a pozitív elemeket 1-re cseréljük (1, ha az elem pozitív, 0, ha nem). Így a mátrixszorzásokban végzett szorzások helyett az és (AND), az összeadások helyett a vagy (OR) logikai műveletet elég elvégezni. E számolással az $\mathbf{F}$-hatványok elemeinek pozitivitása leolvasható a következő sorozatból:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát innen is látható, hogy $\mathbf{F}^5 > \mathbf{O}$, vagyis $\mathbf{F}$ primitív. Még e számoláson is sokat gyorsíthatunk, ha mindig az előző eredményt emeljük négyzetre. Ekkor persze nem tudjuk meg, hogy melyik az a legkisebb hatvány, amely már pozitív. Az $\mathbf{F}$ mátrix esetén a következő sorozatot kapjuk:

$$\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

Eszerint $\mathbf{F}^8 > \mathbf{O}$, tehát $\mathbf{F}$ primitív. □

► E példa tanulságait összefoglalandó elsőként kiemeljük, hogy a primitivitás eldöntésében gyakran elég az adott mátrix helyett az annak megfelelő 0-1-mátrixot vizsgálni, és szükség esetén a mátrixszorzásban a szorzást az OR, az összeadást az AND műveletre cserélve számolni.
► A $\mathbf{C}$ mátrixhoz hasonlóan megmutatható, hogy minden permutáló mátrix imprimitív.
► Nyilvánvaló, hogy ha egy nemnegatív mátrix k-adik hatványa pozitív, akkor minden k-nál nagyobb hatványa is pozitív. A $\mathbf{C}$ és $\mathbf{D}$ mátrixoknál ezt kihasználtuk azzal, hogy mutattunk végtelen sok nem pozitív hatványt, mellyel bizonyítottuk, hogy nem primitív.
► A $\mathbf{D}$ mátrix azt mutatja, hogy irreducibilis mátrix hatványa lehet reducibilis, kizárva ezzel annak lehetőségét, hogy primitív legyen.

12.12. TÉTEL (PERRON–FROBENIUS-TÉTEL – SAJÁTÉRTÉKEK A SPEKTRÁLKÖRÖN). *Ha az $\mathbf{A}$ nemnegatív mátrix irreducibilis, és $r = \varrho(\mathbf{A})$, akkor*

1. *az $\mathbf{A}$ mátrixnak a spektrálkör határára eső sajátértékei 1 multiplicitásúak, és $\{r, r\varepsilon, \dots, r\varepsilon^{k-1}\}$ alakba írhatók, ahol $\varepsilon = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/k}$, továbbá*
2. *$\mathbf{A}$ pontosan akkor primitív, ha a spektrálkörén csak egy sajátérték van, azaz minden $\lambda \neq r$ sajátértékére $|\lambda| < r$.*
3. *$\mathbf{A}$ pontosan akkor primitív, ha létezik a $\lim_{k\to\infty}(\mathbf{A}/r)^k$ határérték. Ekkor e határérték megegyezik az $\mathbf{A}$ spektrálfelbontásában szereplő, az r sajátértékhez tartozó vetítő mátrixszal, azaz*

$$\lim_{k\to\infty}(\mathbf{A}/r)^k = \frac{\mathbf{p}\mathbf{q}^\mathsf{T}}{\mathbf{q}^\mathsf{T}\mathbf{p}},$$

ahol $\mathbf{p}$ a Perron-vektor, $\mathbf{q}$ a bal Perron vektor.

Feladatok

12.1. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Számítsuk ki a két Perron-vektort, és ellenőrizzük Perron tételét.

12.2. Egy pozitív elemű 4-edrendű mátrix három sajátértéke 1, $2i$, $-2i$. A -3, 2, 3, $4i$, 4 számok közül válasszuk ki mindegyik olyat, amelyik a negyedik sajátérték lehet!

12.3. Mutassuk meg, hogy ha az $\mathbf{A} > \mathbf{O}$ mátrix minden oszlopában vagy minden sorában c az elemek összege, akkor c a spektrálsugár.

Nemnegatív mátrixok

12.4. Egy nemnegatív mátrix az $(4,6,5)$ vektort az $(5,6,7)$ vektorba viszi. Mutassuk meg, hogy spektrálsugara legalább 1.

12.5. Legyen $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ tetszőleges, és $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségeket!

$$\min_i \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{x_j}{x_i} \right\} \leqslant \varrho(\mathbf{A}) \leqslant \max_i \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{x_j}{x_i} \right\}$$
$$\min_j \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{x_i}{x_j} \right\} \leqslant \varrho(\mathbf{A}) \leqslant \max_j \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{x_i}{x_j} \right\}$$

(Ötlet: ha $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_n)$, akkor $\mathbf{B} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D}$ hasonló $\mathbf{A}$-hoz, így $\varrho(\mathbf{B}) = \varrho(\mathbf{A})$. Alkalmazzuk a 12.6. tételt.)

12.6. Az előző feladat eredményét használva becsüljük meg az

$$\begin{bmatrix} 6 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{és a} \quad \begin{bmatrix} 6 & 3 & 7 \\ 6 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix spektrálsugarát az $\mathbf{x} = (2,1,2)$ vektorral. Az eredmény alapján mit mondhatunk $\mathbf{x}$-ről?

Irreducibilis mátrixok

12.7. Melyik irreducibilis az alábbi mátrixok közül? Amelyik nem, azt melyik permutáló mátrix viszi $\left[\begin{smallmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{C} \end{smallmatrix}\right]$ alakba? Amelyik irreducibilis, annak mennyi a spektrálsugara és Perron-vektora?

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

12.8. Keressünk egy-egy permutáló mátrixot az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixok mindegyikéhez, mely bizonyítja reducibilitásukat!

Sztochasztikus mátrixok

A nemnegatív mátrixok legfontosabb példái a sztochasztikus mátrixok, melyek minden sora vagy minden oszlopa valószínűségeloszlás.

Markov-láncok, sztochasztikus mátrixok A nemnegatív vektort *sztochasztikusnak* nevezzük, ha koordinátáinak összege 1 (azaz 1-normája 1). A nemnegatív $\mathbf{A}$ mátrix *sztochasztikus*, ha minden oszlopvektora sztochasztikus.

► A sztochasztikus $\mathbf{A}$ mátrixot bármely sztochasztikus $\mathbf{v}$ vektorral szorozva sztochasztikus vektort kapunk, ugyanis ha $\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{v}$, akkor

$$\sum_{i=1}^{m} u_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j = \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} v_j = 1.$$

► Az előző megjegyzés azonnali következménye, hogy sztochasztikus mátrixok szorzata sztochasztikus mátrix.

► Az $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor sztochasztikus, ha $\mathbf{A}^\mathsf{T}$-nak az $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$ vektor a sajátvektora 1 sajátértékkel.

► Másként fogalmazva az $\mathbf{A}$ pontosan akkor sztochasztikus mátrix, ha az $\mathbf{1}^\mathsf{T}$ vektor bal sajátvektora az 1 sajátértékkel.

► Mivel az 1 sajátértékhez pozitív sajátvektor tartozik, ezért 1 a spektrálsugár, azaz $\rho(\mathbf{A}) = 1$.

12.13. tétel (Sztochasztikus mátrix sajátértékei). *Ha* $\mathbf{S}$ *sztochasztikus mátrix, akkor*

1. $\lambda = 1$ *egy sajátérték,*
2. *a spektrálsugara* 1, *és*
3. *ha* $\mathbf{S}$ *primitív, akkor* $\lambda \neq 1$ *esetén* $|\lambda| < 1$.

Duplán sztochasztikus mátrixok Az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nemnegatív mátrixot duplán sztochasztikusnak nevezzük, ha minden oszlop- és sorösszege 1.

► Mivel a duplán sztochasztikus mátrixok sztochasztikusak, ezért a sztochasztikusokra kimondott állítások rájuk is teljesülnek.

► Duplán sztochasztikus mátrixok szorzata is duplán sztochasztikus. (Ennek egyik felét beláttuk a sztochasztikus mátrixoknál, a másik fele transzponálással bizonyítható.)

► Minden permutáló mátrix duplán sztochasztikus.

► Ha $\mathbf{U} = [u_{ij}]$ unitér, akkor az $\mathbf{A} = \left[|u_{ij}|^2\right]$ mátrix duplán sztochasztikus, ugyanis $\sum_{i=1}^{n} |u_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^{n} |u_{ij}|^2 = 1$.

► Duplán sztochasztikus mátrixok konvex lineáris kombinációja is duplán sztochasztikus, azaz ha $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2, \dots$, $\mathbf{S}_k$ duplán sztochasztikusak, a

c_1, $c_2, \ldots$, c_k számok nemnegatívak és $c_1 + c_2 + \ldots + c_k = 1$, akkor $\sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{S}_i$ is duplán sztochasztikus. Például permutáló mátrixok konvex lineáris kombinációi duplán sztochasztikusak.

12.14. TÉTEL (FROBENIUS–KŐNIG-TÉTEL). *Az n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrixban pontosan akkor eleme minden kígyónak a 0, ha $\mathbf{A}$ részmátrixai közt van olyan $s \times t$ méretű zérusmátrix, hogy $s + t = n + 1$.*

12.15. KÖVETKEZMÉNY (POZITÍV KÍGYÓ). *Minden duplán sztochasztikus mátrixban van legalább egy kígyó, melynek minden eleme pozitív.*

BIZONYÍTÁS. Ha a mátrixban nem volna pozitív elemű kígyó, akkor volna benne olyan $s \times t$ méretű zérus részmátrix, amelyre $s + t = n + 1$. E sorokban és oszlopokban szereplő elemek összege $n + 1$ volna, pedig a mátrixban szereplő összes elem összege n. Ez az ellentmondás igazolja állításunkat. □

12.16. TÉTEL (BIRKHOFF-TÉTEL). *Minden n-edrendű duplán sztochasztikus mátrix előáll permutáló mátrixok konvex lineáris kombinációjaként.*

► A tétel elegánsabban úgy is megfogalmazható, hogy a duplán sztochasztikus mátrixok az $\mathbb{R}^{n \times n}$ térben olyan konvex poliédert alkotnak, melynek csúcsai a permutáló mátrixok.

BIZONYÍTÁS. Bebizonyítjuk, hogy ha $\mathbf{S}$ duplán sztochasztikus, akkor léteznek olyan $c_i \in \mathbb{R}^+$ számok és olyan $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ permutáló mátrixok ($i = 1, 2, \ldots, k$), hogy $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{P}_i$. Az $\mathbf{S}$ mátrix pozitív elemeinek m számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk.

Az állítás $m = n$ esetén igaz, hisz ekkor $\mathbf{S}$ szükségképpen permutáló mátrix. Tegyük fel, hogy az állítás igaz minden m pozitív elemet tartalmazó mátrixra, és legyen $\mathbf{S}$-nek $m + 1$ pozitív eleme. Mivel $\mathbf{S}$ duplán sztochasztikus, kiválasztható belőle egy pozitív kígyó. A kígyó legkisebb elemét jelölje a, a kígyó elemeinek helyére 1-es írásával kapott permutáló mátrixot pedig $\mathbf{P}$. Ekkor $a\mathbf{P} \leqslant \mathbf{S}$, így $\mathbf{S} - a\mathbf{P}$ nemnegatív. Mivel $a < 1$, ezért értelmes a következő felbontás:

$$\mathbf{S} = a\mathbf{P} + (1 - a) \left[\frac{1}{1 - a} (\mathbf{S} - a\mathbf{P}) \right].$$

Az $\frac{1}{1-a}(\mathbf{S} - a\mathbf{P})$ mátrix duplán sztochasztikus és legalább eggyel kevesebb pozitív eleme van, mint $\mathbf{S}$-nek, ezért az indukciós feltevés szerint felírható $c_2' \mathbf{P}_2 + \ldots + c_m' \mathbf{P}_m$ alakban, ahol $c_2' + \ldots + c_m' = 1$. Ekkor viszont $a + (1 - a)(c_2' + \ldots + c_m') = 1$, tehát az így kapott felbontás valóban konvex lineáris kombináció. □

A Leontief-modell A Leontief-modell egy többszektoros gazdaság szektorok közti termék és jövedelemáramlási adatait elemzi egyszerű statisztikai adatok alapján. Tömören összefoglaljuk a modell statikus változatának lényegét. Osszuk a gazdaságot n szektorra (pl. ipar, mezőgazdaság, háztartás). Jelölje r_{ij} – az ún. *ráfordítási együttható* – azt, hogy a j-edik szektor egy (pénz)egységnyi kibocsátásához mennyi szükséges az i szektortól. A ráfordítási együtthatók $\mathbf{R}$ mátrixáról feltehető, hogy nem szinguláris, különben valamely ágazat kibocsátása helyettesíthető lenne más ágazatok kibocsátásainak valamely lineáris kombinációjával. Egy gazdaságot zártnak nevezünk, ha kielégíti saját szükségleteit, és fel is használja minden kibocsátását, más szóval termék se ki, se be nem megy a rendszerbe. Jelölje k_j az j-edik szektor kibocsátását. Ekkor $r_{ij}k_j$ az i-edik szektor által a j-edik számára kibocsátott egységek számát, ezek $r_{i1}k_1 + r_{i2}k_2 + \ldots + r_{in}k_n$ összege pedig az i-edik szektor teljes kibocsát adja, ami feltételeink szerint megegyezik k_i-vel. Tehát a $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ jelöléssel az összes ágazat kibocsátására igaz az

$$\mathbf{Rk} = \mathbf{k} \tag{12.7}$$

összefüggés. Ebből az is azonnal látszik, hogy $\mathbf{k}$ az $\mathbf{R}$ mátrix 1 sajátértékhez tartozó sajátvektora.

12.17. PÉLDA (LEONTIEF ZÁRT MODELL). *Egy távoli sziget gazdaságában három nagy ágazat van, áramszolgáltatás (A), élelmiszeripar (B) és szolgáltatóipar (C). A sziget gazdasága zártnak tekinthető. Mit állapíthatunk meg az ágazatok kibocsátásáról, ha az alábbi táblázat oszlopai azt mutatják, hogy egy egységnyi kibocsátáshoz hány egységre van szükség a szektoroktól.*

	A	*B*	*C*
A	*0.1*	*0.6*	*0.1*
B	*0.8*	*0.1*	*0.4*
C	*0.1*	*0.3*	*0.5*

MEGOLDÁS. A kibocsátás meghatározása egyszerű sajátértékfeladat, hisz $\mathbf{Rk} = \mathbf{k}$. Az

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0.8 & 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

mátrix 1 sajátértékhez tartozó sajátvektora $(3, 4, 3)t$, ahol $t \in \mathbb{R}$. Eszerint a sziget gazdaságának teljes kibocsájtásából az áramszolgáltatás 30%-kal, az élelmiszeripar 40%-kal, a szolgáltatóipar 30%-kal részesedik. □

A zárt modellel ellentétben a valóságban minden ágazatnak számolnia kell olyan külső kívánság (kereslet vagy követelés) jelenlétével, amit a gazdaságnak teljesítenie kell. Ennek értékét az i-edik ágazatra jelölje d_i, ezek vektorát $\mathbf{d}$. E vektor tehát tekinthető a nettó kibocsátás vektorának, hisz

$$d_i = k_i - (r_{i1}k_1 + r_{i2}k_2 + \dots r_{in}k_n),$$

ami az összes ágazatra mátrix alakban $\mathbf{d} = \mathbf{k} - \mathbf{R}\mathbf{k} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{k}$. Kérdés, mi biztosítja azt, hogy $\mathbf{I} - \mathbf{R}$ invertálható, és $(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}\mathbf{d} > \mathbf{0}$ legyen. Két természetesnek tekinthető feltevéssel élünk:

- az ágazatok mendegyike, ha más ágazatokon keresztül is, de hat a többire,
- van olyan ágazat, mely egy (pénz)egységnyi kibocsátásához egy egységnél kevesebbet használ föl, azaz van $\mathbf{R}$-nek olyan oszlopösszege, mely 1-nél kisebb.

Az első feltevés azt jelenti, hogy bármely i és j ágazatpárra valamely m kitevőre $[\mathbf{R}^m]_{ij} > 0$, azaz $\mathbf{R}$ irreducibilis. (Sőt, mivel mindig akadnak ágazatok, melyek saját magukra is visszahatnak, ezért az is feltehető, hogy $\mathbf{R}$ primitív.)

A második feltevés következménye, hogy van olyan nem zésrus $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$ mátrix, hogy $\mathbf{R} + \mathbf{A}$ sztochasztikus, vagyis minden oszlopösszege 1, azaz $\mathbf{1}^\mathsf{T}(\mathbf{R} + \mathbf{A}) = \mathbf{1}^\mathsf{T}$. Ebből következik, hogy $\rho(\mathbf{R}) < 1$. Indirekt módon tegyük fel, hogy $\rho(\mathbf{R}) = 1$ és legyen $\mathbf{R}$ Perron-vektora $\mathbf{p}$. $\mathbf{p} > \mathbf{0}$, mivel $\mathbf{R}$ nemnegatív és irreducibilis. $\mathbf{A} \geqslant \mathbf{O}$ és $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ miatt $\mathbf{A}\mathbf{p} > \mathbf{0}$, így

$$1 = \mathbf{1}^\mathsf{T}\mathbf{p} = (\mathbf{1}^\mathsf{T}(\mathbf{R} + \mathbf{A}))\mathbf{p} = 1 + \mathbf{1}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{p} > 1,$$

és ez az ellentmondás igazolja, hogy $\rho(\mathbf{R}) < 1$. Ebből a ??? tételt fölhasználva kapjuk, hogy

$$(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{R} + \mathbf{R}^2 + \mathbf{R}^3 + \dots > \mathbf{O}.$$

Így minden $\mathbf{d}$ kívánságvektorhoz egyértelműen létezik egy pozitív $\mathbf{k}$ kibocsátás, nevezetesen $\mathbf{k} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}\mathbf{d} > \mathbf{0}$. E modellben ez azt jelenti, hogy bármely szektort érintő külső kívánság növekedése az összes ágazat kibocsájtását megnöveli.

12.18. PÉLDA (LEONTIEF NYÍLT MODELL). *Az előző feladatbeli szigeten a három szektor ráfordítási együtthatóinak mátrixa legyen*

	A	B	C
A	0.1	0.6	0.1
B	0.7	0.1	0.3
C	0.1	0.2	0.5

Mekkora a kibocsátás, ha a külső kereslet vektora $\mathbf{d} = (26, 31, 22)$, *és hogyan változik a kibocsátás, ha a B szektorban a külső kereslet* 31*-ről* 36*-ra növekszik?*

MEGOLDÁS. Az $\mathbf{R}$ spektrálsugara 0.9 (ez azonnal adódik abból, hogy minden oszlopösszeg 0.9).

$$\mathbf{k} = (\mathbf{I}-\mathbf{R})^{-1}\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3.9 & 3.2 & 2.7 \\ 3.8 & 4.4 & 3.4 \\ 2.3 & 2.4 & 3.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26 \\ 31 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 260 \\ 310 \\ 220 \end{bmatrix}.$$

A B szektor növekvő külső kereslete minden szektorban a kibocsátás növekedését eredményezi:

$$\mathbf{k} = (\mathbf{I}-\mathbf{R})^{-1}\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3.9 & 3.2 & 2.7 \\ 3.8 & 4.4 & 3.4 \\ 2.3 & 2.4 & 3.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26 \\ 36 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 276 \\ 332 \\ 232 \end{bmatrix}.$$ □

Megoldások

12.1. Sajátértékek: 10, 3, 3, jobb sajátvektor: $\mathbf{u} = (5,9,11)$, bal sajátvektor: $\mathbf{v} = (4,2,1)$, a két Perron-vektor: $\mathbf{p} = \frac{1}{25}(5,9,11)$, bal sajátvektor: $\mathbf{v} = \frac{1}{7}(4,2,1)$.

12.2. A spektrálsugár még nincs a sajátértékek közt, így Perron tétele miatt csak a 3 és a 4 lehet sajátérték.

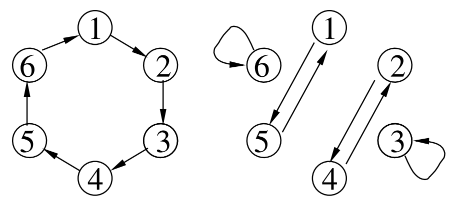
12.3. Ha $\mathbf{A}$ minden sorösszege c, akkor az $\mathbf{1}$ vektor sajátvektor, c sajátértékkel. Mivel $\mathbf{1} > \mathbf{0}$, ezért ez csak a Perron-vektor n-szerese lehet, és akkor c a hozzá tartozó sajátérték, így c a spektrálsugár. Hasonlóképp a bal Perron-vektor a másik állítást is igazolja.

12.4. Mivel a $\min\{5/4, 6/6, 7/5\} = 1$, ezért a Collatz–Wielandt-tétel szerint spektrálsugara is legalább ennyi. (Vagy a tételbeli másik képlettel: mivel a $c(4,6,5) \leqslant \mathbf{A}\cdot(4,6,5) = (5,6,7)$ egyenlőtlenségben c lehetséges maximuma 1, ezért a spektrálsugár legalább 1.)

12.5. Mivel $\mathbf{D}^{-1} = \operatorname{diag}(1/x_1, \dots, 1/x_n)$, ezért követve az ötletben leírtakat, a 12.6. tétel első képlete a feladat első képletét adja. A $\mathbf{DAD}^{-1}$ mátrixból a második képletet kapjuk.

12.6. A 12.5. feladat első képlete az első, a második képlete a második mátrixról azt adja, hogy a minimum és a maximum is 10, így a spektrálsugár 10, tehát 10 a domináns sajátérték mindkét esetben, és $\mathbf{x}$ a hozzá tartozó sajátvektor – az első esetben a jobb, a másodikban a bal. (Gondoljuk meg!)

12.7. Az irreducibilitás eldönthető a mátrixokhoz rendelt szomszédsági gráfokkal:



$\mathbf{R}_1$ irreducibilis, mert a gráf erősen összefüggő, azaz bármely csúcsból bármely másikba el lehet jutni irányított úton. $\mathbf{R}_2$ reducibilis, hisz például nem indul irányított él a következő halmazokból a komplementerükbe: $\{6\}$, $\{3\}$, $\{1,5\}$, $\{2,4\}$, $\{1,5,6\}$, $\{2,3,4\}$,.... Így igen sok olyan $\mathbf{P}$ permutáló mátrix van, amelyik $\mathbf{R}_2$-t a kívánt alakba viszi. Közülük legegyszerűbb az identikus mátrix, hisz $\mathbf{R}_2$ már a kívánt alakú:

$$\mathbf{I}\mathbf{R}_2\mathbf{I}^{\mathsf{T}} = \mathbf{R}_2 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

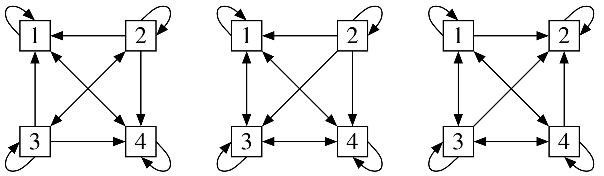
Az $\mathbf{R}_1$ mátrixnak nyilvánvalóan sajátvektora a $\mathbf{p} = (1,1,1,1,1,1)$ vektor az 1 sajátértékkel. Mivel $\mathbf{R}_1$ nemnegatív és irreducibilis, ezért a Frobenius–Perron-tétel szerint a spektrálsugárhoz, mint sajátértékhez tartozó sajátvektor az egyetlen sajátvektor, mely pozitív elemű. Ebből következik, hogy a spektrálsugár 1.

Másik megoldás a feladat második részére:

$$\det(\mathbf{R}_1 - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^6 - 1$$

A karakterisztikus polinom gyökei a hatodik egységgyökök, melyek az 1-sugarú körön vannak, tehát 1 a spektrálsugár. A spektrálsugár valóban sajátérték, és a $\lambda = 1$-hez tartozó sajátvektor $\mathbf{p} = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

12.8. A három mátrixhoz az alábbi gráfok tartoznak:



Ennek alapján az első gráfban az $\{1, 4\}$, a másodikban az $\{1, 3, 4\}$, a harmadikban a $\{2\}$ halmazból nem érhető el a többi pont. A pontoknak egy olyan átsorszámozását keressük, melyben e pontok a többi után következnek, ugyanis általában, ha az $\{1, 2, \ldots, k, k+1, \ldots, n\}$ csúcshalmazban az első k pontba nem fut él a $\{k+1, \ldots, n\}$ halmazból, akkor a szomszédsági mátrix $\left[\begin{smallmatrix}\mathbf{X} & \mathbf{Y}\\ \mathbf{O} & \mathbf{Z}\end{smallmatrix}\right]$ alakú lesz. Az első gráfban például a 3-2-1-4 sorrend jó, hisz az $\{1, 4\}$ halmaz elemei vannak hátul, amit a $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{smallmatrix}\right)$ permutáció megvalósít:

$$\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc|cc}1&1&1&1\\1&1&1&1\\\hline 0&0&1&1\\0&0&1&1\end{array}\right]$$

A második esetben például jó a 2-1-3-4 sorrend, hisz az $\{1, 3, 4\}$ halmaz elemei vannak hátul, amit a $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{smallmatrix}\right)$ permutáció megvalósít:

$$\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1&1\\1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|ccc}1&1&1&1\\\hline 0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\end{array}\right]$$

Végül a harmadik mátrixnál jó az 1-4-3-2 sorrend, így a 2 elem van hátul, amit az $\left(\begin{smallmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{smallmatrix}\right)$ permutáció megvalósít:

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right]$$

A balról szorzó permutáló mátrix az egységmátrixból a megadott permutáció sorokra való alkalmazásával, míg a jobbról szorzó mátrix az oszlopokra való alkalmazásával lett meghatározva.

Irodalomjegyzék

Wolf Holzmann. Uniqueness of reduced row echelon form. http://www.cs.uleth.ca/~holzmann/notes/reduceduniq.pdf, 2002.

Faragó István, Horváth Róbert. *Numerikus módszerek*. BME, http://math.bme.hu/~rhorvath/nummodszjegyzet.pdf, 2013.

Tárgymutató

π-transzponált 149
p-norma 433

adjungált 240, 323
affin altér 117
alakzat egyenletrendszere 60
alapvektor 40
algebrai multiplicitása 366
alsó háromszögmátrix 193
általánosított sajátvektor 449
általános megoldás 82
altér 114
  affin 117
  invariáns 382
  kiegészítő 280
  komplementer 280
  merőlegese 129
  merőleges kiegészítő 129
alterek merőlegessége 129
altér eltoltja 117
alulhatározott 72
annullátor 458
áttérés mátrixa 157

balrendszer 34
bal sajátvektor 375
bázis 40, 122
  standard 46
báziscsere 157
bázisfelbontás 159
bázisoszlop 80
bázisvektor 40
bináris reláció 53
blokkmátrix 147
bővített mátrix 75

Cholesky-felbontás 414

csoport 23

deriváltleképezés 344
determináns 215
  lineáris transzformációé 277
DFT 332
diád 153
diadikus felbontás
  szinguláris érték szerinti 422
diadikus szorzat 153
diagonalizálhatóság 373
differenciálhatóság 343
dimenzió 126
direkt összeg 282, 384
diszkrét Fourier-összeg 329
diszkrét Fourier-transzformáció 332

egyenletrendszer
  numerikusan instabil 94
egységmátrix 160
egységvektor 33
együtthatómátrix 75
Einstein-konvenció 173
ekvivalenciareláció 53
ekvivalens
  átalakítások 73
  lineáris egyenletrendszerek 73
elemi bázistranszformáció 133
elemi mátrix 160
elemi sorműveletek 80
előjeles aldetermináns 232
előjeles térfogat 38
előjeles terület 213
euklideszi norma 432
euklideszi norma 21
explicit 60

fejléc (táblázaté) 141
felső háromszögmátrix 193
ferdén szimmetrikus 194
FFT 335

főátló 74
főelem 80
főminor 415
főoszlop 80
forgatónyomaték 35
Fourier-mátrix 330
Fourier-összeg 329

Gauss–Jordan-módszer 86
Gauss–Seidel-iteráció 100
Gauss-módszer 81
generátorrendszer 122
geometriai multiplicitás 366
Givens-forgatás 311
gradiens 346
gráf
  erősen összefüggő 483
Gram-mátrix 135

gyors Fourier-transzformáció 335

hajlásszög 49
Hamming-kód 89
háromszögmódszer 21
hasonló mátrixok 274
hatványmódszer 390
Hermite, Charles 323
Hermite-féle interpolációs polinom 471
Hermite-féle kvadratikus alak 409
Hermite mátrix 326
hiper-kockamátrix 149
hipermátrix 149
  ferdén szimmetrikus 149
  külső szorzat 152
  szimmetrikus 149
hipersík 69
Hölder-egyenlőtlenség 435, 443
homogén 213

homogén lineáris egyenletrendszer
  inhomogénhez tartozó 83
Householder-módszer 318
Householder-tükrözés 312

idempotens 285
illeszkedő normák 438
implicit 60
indukált mátrixnorma 439
inkonzisztens 72
invariáns altér 382
invariáns altér 447
invertálható 178
invertálható művelet 177
inverz
  elemé 177
inverzió 220
irányított szakasz 19
irányított szög 34
irányvektor 61
irreducibilis 477, 483
ISO 31-11 20

Jacobi-determináns 349
Jacobi-iteráció 99
Jacobi-mátrix 346
jobbrendszer 34
jól kondicionált 94
Jordan-bázis 449
Jordan-blokk 452
Jordan-felbontás 452
Jordan-lánc 449
Jordan-mátrix 452
Jordan-normálalak 452

karakterisztikus egyenlet 359
karakterisztikus polinom 359
képtér 253
kernel 253
kiegészítő altér 280
kifeszített altér 116
kígyó 192, 229
kísérő mátrix 460
kitüntetett altér 129
klasszikus adjungált 240
kollineáris vektor 21
komplanáris 22
komplementer altér 280
kompozíció
  lineáris helyettesítéseké 143
konjugált 275
konstans tag 71
kontrakció 98
konzisztens 72
konzisztens normák 438
koordináta 40
koordináta-rendszer 40
kötött változó 81
kötött vektor 19
Kronecker-szorzat 148
külső szorzat 152
  Segre-féle 152
kvadratikus alak 408

legjobb közelítés 285
legkisebb négyzetek elve 287
lépcsős alak 80
levéldiagram 114
lineáris
  egyenlet 71
  egyenletrendszer 72
  kombináció 23
lineárisan független 25, 46
lineárisan összefüggő 25
lineáris egyenletrendszer
  konzisztens 72
lineáris egyenletrendszer
  alulhatározott 72
  túlhatározott 72
lineáris egyenletrendszerek
  homogén 72
  megoldása 72
lineáris egyenletrendszerek
  ekvivalens 73
  inhomogén 72
lineáris helyettesítés
  mátrixa 155
lineáris helyettesítés 143
lineáris leképezés 256
  képtere 253
  magtere 253
lineáris transzformáció
  karakterisztikus polinomja 373
  sajátértéke 371
  sajátértékei 373
lineáris transzformáció 256
LU-felbontás 197

magtér 253
másodfokú tag 407
mátrix 73
  áttérés mátrixa 157
  diagonális 144
  elemi 160
  ellentettje 145
  ferdén szimmetrikus 194
  irreducibilis 477, 483
  négyzetes 144
  nemnegatív 477
  normális 402
  önadjungált 326
  ortogonális 306
  pozitív 477
  primitív 477
  rangja 110
  reducibilis 477, 483
  ritka 74
  soronként domináns főátlójú 101
  sűrű 74
  szemiortogonális 306
  szimmetrikus 194
  szinguláris 178
  sztochasztikus 489
  teljes oszloprangú 283
mátrixleképezés 253
mátrixnorma 438
mátrixok tere 144
mátrixszorzat
  diádok összegére bontása 163
megoldás
  általános 82
  partikuláris 82
  triviális 112
megoldásvektor 72
megoldható 72
merőleges összetevő 283
merőleges vetület
  altérre eső 283
minimálpolinom 458
Minkowski-egyenlőtlenség 435, 443
Moore–Penrose-féle pszeudoinverz 295
multilineáris mátrixszorzat 152

negatív (szemi)definit 410
négy kitüntetett altér 129
nilpotens 178
norma 434
  euklideszi 21
normálás 304, 432
normálegyenlet 287
normálegyenlet-rendszer 287
normális mátrix 402

normálvektor 61
nullitás 126
  lineáris leképezésé 277
nullosztó 172
nulltér 116
nullvektor 20
numerikusan instabil 94
numerikusan stabil 94

nyom 261
  lineáris transzformációé 277
  mátrixé 261

önadjungált 326
operátornorma 439
optimális megoldás 287
orientáció
  balrendszer 34
  jobbrendszer 34
origó 20
ortogonális 42
ortogonális bázis (OB) 304
ortogonális diagonalizálás 395
ortogonális mátrix 306
ortonormált bázis 42
ortonormált bázis (ONB) 304
oszlopmátrix 74
oszloponként domináns főátló 101
oszloptér 118
oszlopvektor 41, 74
osztályozás 53

paralelepipedon 27
  előjeles térfogata 38
paralelogramma 27
  előjeles területe 213
paraméteres egyenletrendszer 60
párhuzamos vektor 21
partícionálás 53
partikuláris megoldás 82
permutációmátrix 192
permutáló mátrix 192
Perron-vektor 479
pivotelem 80
PLU-felbontás 203
polárfelbontás 427
polarzációs formulák 51
polinom
  elemi szimmetrikus 373
  homogén másodfokú 407
pozitív (szemi)definit 410

precedencia-elv 174
primitív mátrix 477
projekció 292
pszeudoinverz 295

QR-felbontás 315
  redukált 315
  teljes 315

ráfordítási együttható 491
rang 110, 126
  lineáris leképezésé 277
reducibilis 477, 483
redukált lépcsős alak 85
redukált szinguláris felbontás 422
reflexív 53
regressziós egyenes 289
reláció 53
részleges főelem-kiválasztás 96
részleges pivotálás 96
ritka mátrix 74
rosszul kondicionált 94
rref függvény 88

sajátaltér 358
sajátérték 358
  lineáris transzformációé 371
sajátfelbontás 374
  diadikus alakja 375
sajátpár 358
sajátvektor 358
  bal 375
sakktáblaszabály 232
sarokaldetermináns 415
Sarrus-szabály 231
skalár 19
skaláris szorzat 30
skálázás 97
sorlépcsős alak 80
sormátrix 74
soronként domináns főátló 101
sortér 118
sorvektor 74
spektrálsugár 478
spektrum
  értékek a spektrumon 469
standard bázis 46
sudoku 165

szabad változó 81
szabad vektor 20
szemiortogonális mátrix 306
szigorúan domináns sajátpár 390
szimmetrikus mátrix 194
szimmetrikus reláció 53
szimultán egyenletrendszer 88
szinguláris 178
szinguláris érték 420
szinguláris felbontás 423
  diadikus alak 422
szinguláris vektor 420
szög 49
sztochasztikus mátrix 489
sztochasztikus vektor 489

táblázat 141
távolság 31
  altértől 285
tenzorszorzat 148
torzor 23
transzponált 126
  Hermite-féle 323
transzverzális 192
transzverzális (kígyó) 229
tranzitív reláció 53
triviális megoldás 112
túlhatározott 72

unitér 327
unitér diagonalizálás 402

Vandermonde-determináns 237
Vandermonde-mátrix 237
vec függvény 148
vegyes szorzat 38
vektor 20
  abszolút értéke 21, 326
  azonos irányú 21
  egyirányú 21
  ellenkező irányú 21
  hossza 21, 31, 326
  jelölése 20, 74
  kollineáris 21
  koordinátáinak elválasztása 74
  koordinátás alakja 40
  mátrix alakja 74
  normálása 304
  összeg 21
  párhuzamos 21
  sztochasztikus 489
vektoregyenlet 60
vektori szorzat 35

vektorok
  merőlegessége 49, 326
  szöge 31, 49, 326
  távolsága 49, 326
vetítés 292
vetület 291
vezérelem 80
vezető főminor 415
zérustér 114
zérusvektor 20