1	2-8	9-12	13-	Σ

NÉV _____ **NEPTUNKÓD** _____

Lineáris algebra mérnököknek **1. vizsga – elmélet – elmélet** **2018-01-10**

A tesztkérdésekre 20, a definíciók, tételek precíz megfogalmazására 10, a bizonyítások tömör, világos, korrekt leírására 10 pont kapható. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc. Segédeszköz nem használható!

1. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(6 pont)*

a) Ha egy 5 ismeretlenes lineáris egyenletrendszer 4 egyenletből áll, akkor inkonzisztens. ☐

b) Minden lineáris egyenletrendszernek van optimális megoldása. ☐

c) Azok a $\mathbf{b}$ vektorok, melyekre az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer konzisztens, alteret alkotnak. ☐

d) Ha egy $\mathcal{V}$ vektortérnek $\mathcal{B}$ egy bázisa, és $\mathcal{W}$ a $\mathcal{V}$ egy altere, akkor a $\mathcal{B}$ bázisnak van olyan részhalmaza, mely a $\mathcal{W}$ bázisa. ☐

e) Valós szimmetrikus mátrixok sajátértékei valósak. ☐

f) A sajátértékek geometriai multiplicitásainak összege egyenlő a mátrix Jordan-blokkjainak számával. ☐

2. Melyik altér az alábbiak közül az $\mathbb{R}$ feletti valós $n \times n$-es mátrixok vektorterében? Az $n \times n$-es *(a)* invertálható mátrixok, *(b)* zérus mátrix egyedül, *(c)* diagonális mátrixok, *(d)* $\mathbf{A}$-val fölcserélhető mátrixok, *(e)* egész elemű mátrixok. *(2 pont)*

3. Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei λ és μ. $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakjában a λ-hoz tartozó Jordan-blokkok mérete 3, 3, 3, 3, a μ-höz tartozók mérete 4, 4, 1. Írjuk fel $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomját, és határozzuk meg λ algebrai és geometriai multiplicitását! *(2 pont)*

4. Legyen $\mathcal{U} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, legyen $\mathcal{V} \perp \mathcal{W}$. Legyen $\mathcal{U}$ bázisa $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ úgy, hogy $\mathcal{V}$ bázisa $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}\}$, $\mathcal{W}$ bázisa $\{\mathbf{u}_n\}$. Írjuk fel a $\mathcal{V}$ hipersíkra való tükrözés egy sajátvektorokból álló bázisára vonatkozó mátrixát. *(2 pont)*

5. Soroljon fel legalább négy testet, és legalább két gyűrűt (melyek nem testek)! *(2 pont)*

6. Soroljon fel négy olyan mátrixtulajdonságot, mely a négyzetes mátrixokon a báziscserére nézve invariáns, azaz mely nem változik, ha a mátrixot egy másik bázisban írjuk fel! *(2 pont)*

7. Legyen $\mathbf{A}$ egy *teljes sorrangú* valós mátrix! Melyik merőleges vetítés az alábbi mátrixok közül? *(2 pont)*
(a) $\mathbf{A}^+\mathbf{A}$, *(b)* $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A}$, *(c)* $\mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{A}$, *(d)* $\mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}$.

8. A táblázat bal felében egy valós vektortér lineáris transzformációinak listáját, jobb felében sajátértékeikre vonatkozó feltételek betűkkel jelölt listáját találjuk. Párosítsunk: melyik transzformációnak milyen sajátértékei lehetnek. *(2 pont)*

sorszám	transzformáció	betű	λ
1:	szimmetrikus	A:	$\lvert\lambda\rvert = 1$
2:	ferdén szimmetrikus	B:	$\lambda > 0$
3:	nilpotens	C:	$\mathrm{i}\lambda \in \mathbb{R}$
4:	pozitív definit	D:	$\lambda = 0$
5:	ortogonális	E:	$\lambda \in \mathbb{R}$

9. Mit értünk egy sajátérték algebrai és geometriai multiplicitásán? *(2 pont)*

10. Definiáljuk a lineáris leképezés fogalmát! *(2 pont)*

11. Mondjuk ki a lineáris algebra alaptételét! *(3 pont)*

12. Mondjuk ki a Moore–Penrose-tételt! *(3 pont)*

13. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a dimenziótételt! *(5 pont)*

14. Mondjuk ki és igazoljuk a diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltételéről szóló tételt! *(5 pont)*