Vizsgakérdések – Lineáris algebra mérnököknek – 2017/18 őszi félév (1.0 változat 2017-12-18)

D = definíció **T** = tétel **B** = tétel + kötelező bizonyítás

Vektorok **D** irányított szakasz, vektor, vektor hossza, állása, iránya **D** vektorok szöge és irányított szöge **D** jobb- és balrendszer 2D- és 3D-ben **D** vektori szorzat **P** és kiszámolása koordinátás alakból **T** a vektori szorzás tulajdonságai **P** 2 síkbeli vagy 3 térbeli vektor orientációjának meghatározása **P** paralelepipedon előjeles térfogatának, paralelogramma előjeles területének kiszámítása **P** térbeli sík, síkbeli és térbeli egyenes explicit és implicit egyenletrendszereinek felírása adatokból vagy a másik alakból **P** két sík metszésvonalának explicit egyenletrendszere

n-dimenziós vektorok **D** vektorműveletek $\mathbb{R}^n$-ben, vektorok hossza, szöge, távolsága **T** $\mathbb{R}^n$ műveleti tulajdonságai **D** lineáris kombináció, lineáris függetlenség, összefüggőség **D** generátorrendszer, bázis, standard bázis **B** lineáris függetlenség (egy ekvivalens megfogalmazása a 0-vektorral) **T** skaláris szorzás műveleti tulajdonságai **P** vektorrendszer lineárisan függetlenségének eldöntése **P** vektor felírása adott vektorrendszer lineáris kombinációjaként, **P** vektor merőleges összetevőkre bontása **T** Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség

Komplex számok, testek **D** komplex szám, algebrai alak, konjugált, trigonometriai alak, abszolút érték, irányszög **T** algebrai és trigonometriai alak kapcsolata **P** műveletek algebrai, ill. trigonometriai alakban (összeadás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás) **T** konjugált és az abszolút érték tulajdonságai **D** test, gyűrű **D** a mod művelet és egészek kongruenciája **T** példák testekre ($\mathbb{Z}_p$, ha p prím, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) és gyűrűkre ($\mathbb{Z}_m$, ha m nem prím, $\mathbb{Z}$)

Egyenletrendszerek megoldása **D** lineáris egyenlet, egyenletrendszer, homogén, inhomogén **D** egyenletrendszer megoldása, megoldásvektora **D** (in)konzisztens egyenletrendszer **D** sormodell, oszlopmodell **T** ekvivalens átalakítások **D** mátrix, együtthatómátrix, bővített mátrix **D** elemi sorműveletek, lépcsős alak, főelem, bázisoszlop, **T** Gauss-módszer: lépcsős alakra hozás **D** redukált lépcsős alak **T** Gauss–Jordan-módszer **P** $\mathbb{R}$-, $\mathbb{C}$- vagy $\mathbb{Z}_p$-együtthatós egyenletrendszer konzisztenciájának, megoldáshalmazának meghatározása Gauss- vagy Gauss–Jordan-módszerrel **P** egyenes, sík, hipersík explicit egyenletrendszerének, egy hipersík implicit egyenletrendszerének felírása adott megfelelő számú illeszkedő pontból vagy egy illeszkedő pontból és megfelelő számú generátorvektorból **T** a redukált lépcsős alak egyértelműsége **D** szimultán egyenletrendszer

A megoldások tere **D** mátrix rangja **T** az együtthatómátrix rangja, a kötött és szabad változók száma **B** egyenletrendszer megoldhatóságának és egyértelmű megoldhatóságának mátrixrangos feltétele **T** a megoldások száma homogén és inhomogén esetben (véges test fölött is) **D** vektortér, altér **B** a homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak (bizonyítható mátrixműveletekkel is) **D** nulltér **D** kifeszített (generált) altér **T** az inhomogén és a hozzá tartozó homogén egyenletrendszer megoldásai közti kapcsolat **D** affin altér **D** sortér, oszloptér **T** egyenletrendszer megoldhatóságának feltétele ($\mathbf{b} \in \mathcal{O}(\mathbf{A})$) **T** sortér és oszloptér viselkedése elemi sorműveletek közben **D** bázis **T** bázistétel (a bázis elemszámának egyértelműsége) **D** dimenzió **D** koordinátázás **T** sortér és oszloptér dimenziója = rang **B** dimenziótétel (rang–nullitási tétel) **T** sortér és nulltér merőlegessége **D** altér merőlegese **T** lineáris algebra alaptétele **D** kitüntetett alterek **T** a 4 kitüntetett altér kapcsolata **P** a kitüntetett alterek meghatározása **T** lineáris egyenletrendszer sortérbe eső megoldása **P** és annak kiszámítása

Mátrixműveletek **D** elemenkénti mátrixműveletek, mátrixok lineáris kombinációja **D** mátrixszorzás és annak felírása Σ-jelekkel **D** blokkmátrix-műveletek **T** mátrixszorzás és lineáris kombináció **D** áttérés mátrixa **T** koordinátás alak változása báziscserénél **T** bázisfelbontás, diádok összegére bontás **D** egységmátrix, elemi mátrixok **B** $\mathbf{AB}$ sor- és oszlopvektorainak kapcsolata $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ sor- és oszlopvektoraival **B** szorzat és összeg rangjának becslése **T** összeadás és skalárral szorzás tulajdonságai **T** szorzás tulajdonságai **B** szorzás asszociativitása **T** transzponálás tulajdonságai **D** mátrix inverze **T** elemi mátrixok inverze **T** inverz létezéséhez elég egy feltétel **P** inverz kiszámítása elemi sorműveletekkel **T** inverz alaptulajdonságai **T** az invertálhatóság és az egyenletrendszerek kapcsolata **T** invertálhatósággal ekvivalens állítások **T** áttérés mátrixának inverze **T** műveletek diagonális mátrixokkal **D** permutáló mátrix, kígyó **T** permutáló mátrixok inverze **T** műveletek háromszögmátrixokkal **D** szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok **B** mátrix felbontása szimmetrikus és ferdén szimmetrikus összegére **T** $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ szimmetrikus **D** LU-felbontás **P** az LU-felbontás kiszámítása **D** PLU-felbontás

Determináns **D** determináns **B** mikor 0 a determináns **T** egyenletrendszerek és a determináns **D** permutációk inverziói **T** permutáló mátrix determinánsa **T** mátrixműveletek és a determináns **T** $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$ **T** a determináns minden sorában lineáris függvény (multilineáris) **B** determináns, mint kígyók determinánsainak összege **T** kifejtési tétel **D** Vandermonde-determináns **T** és értéke **T** Cramer-szabály **T** inverz mátrix elemei, inverz előállítása aldeterminánsokkal **T** blokkháromszög-mátrixok determinánsa **T** determináns és rang kapcsolata **P** determináns kiszámítása sorműveletekkel, kifejtéssel és kígyókkal

Lineáris leképezések **D** vektortér absztrakt fogalma **D** mátrixleképezés, képtér, magtér **D** lineáris leképezés és transzformáció **B** minden lineáris $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ leképezés mátrixleképezés **D** mátrix nyoma **T** geometriai transzformációk mátrixai (forgatás, hipersíkra vetítés, tükrözés) **D** hasonlóság, konjugált **T** mikor hasonló két mátrix **T** hasonlóságra invariáns tulajdonságok **D** rang, nullitás, determináns, nyom fogalmának kiterjesztése lineáris leképezésekre **T** altérre való merőleges vetítés mátrixa **T** egy mátrix mikor merőleges vetítés mátrixa **D** altértől való távolság **T** legjobb közelítés tétele (vektorhoz altérben legközelebb eső vektor és vektor felbontása merőleges összetevőkre) **D** optimális megoldás **T** optimális megoldások normálegyenlettel **T** lineáris regresszió optimális megoldásként **D** pszeudoinverz **T** tulajdonságai, Moore–Penrose-tétel **T** pszeudoinverz mátrixa **T** $\mathbf{A}^+\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}\mathbf{A}^+$ merőleges vetítés **T** minimális abszolút értékű optimális megoldás pszeudoinverzzel **D** ortogonális leképezés, ortogonális mátrix **T** ortogonális leképezés és ortogonális mátrix tulajdonságai

Sajátérték, sajátvektor **D** lineáris transzformáció, ill. mátrix sajátértéke, sajátvektora, sajátaltere, karakterisztikus polinom **B** sajátértékek és sajátvektorok meghatározása **T** a sajátalterek összege direkt összeg (különböző sajátértékekhez tartozó sajátalterek) **D** algebrai és geometriai multiplicitás **T** determináns = sajátértékek szorzata, nyom = sajátértékek összege **D** bal sajátvektor **B** diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltétele **T** sajátfelbontás és diadikus alakja **T** diagonalizálható mátrixok hatványozása **T** különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok/sajátalterek **T** diagonalizálhatóság és geometriai multiplicitás **T** szimmetrikus, ferdén szimmetrikus, ortogonális, nilpotens mátrix sajátértékei **D** ortogonális diagonalizálhatóság **T** szimmetrikus mátrixok ortogonális diagonalizálhatósága: főtengelytétel

Jordan-féle normálalak **T** Mátrix felbontása blokkdiagonális alakra **D** Jordan-blokk, Jordan-mátrix, Jordan-lánc, Jordan-bázis **T** Jordan-féle normálalak létezése, egyértelműsége **D** Mátrixfüggvények **T** Jordan-blokk polinomja, függvénye **T** Mátrixfüggvény kiszámolása Jordan-bázis segítségével