E	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

NÉV _____ **NEPTUNKÓD** _____

Lineáris algebra mérnököknek **1. vizsga – gyakorlat** **2018-01-10**

Minden kérdésre írjuk a válaszokat a mellette lévő dobozba. Az első feladat nyolc egyszerű kérdését kivéve minden feladat megoldását is ellenőrizzük, pontszámot a teljes megoldás alapján adunk. Az első nyolc feladat mindegyike 2 pontot, a továbbiak 8 pontot érnek. Kidolgozási idő 110 perc. Semmilyen segédeszköz nem használható!

E1. Határozzuk meg az $(3,5)$ és a $(2,3)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területét és orientációját!

A vektorokból alkotott determináns alapján:
$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \rightsquigarrow$ terület $= 1$, balrendszer.

E2. Írjuk fel a $(2,3,0)$ ponton átmenő, $(3,1,1)$ irányvektorú egyenes explicit vektoregyenletét!

$\mathbf{x} = (3,1,1)t + (2,3,0)$

E3. Írjuk fel a standard bázisról a $\{(3,1),(5,2)\}$ bázisra való áttérés mátrixát!

Az áttérés mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

E4. Legyen az 5×5-ös $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa 3, az 5×5-ös C mátrixé $c \neq 0$. Mi lesz a determinánsa a következő mátrixoknak: *a)* $(3\mathbf{A})^{-1}$, *b)* $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{A}^2\mathbf{C}$.

$\det((3\mathbf{A})^{-1}) = 3^{-6}$, $\det(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{A}^2\mathbf{C}) = 3^3$

E5. Írjuk fel az $\cos \mathbf{J}$ mátrixot, ha $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \pi & 1 & 0 \\ 0 & \pi & 1 \\ 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

E6. Írjuk fel a háromdimenziós tér egy origón átmenő síkjára való vetítés sajátértékeit és karakterisztikus polinomját!

$-x(x-1)^2$

E7. Hány radián az $\mathbf{a} = (2,2,4,0)$ és $\mathbf{b} = (2,-1,1,0)$ vektorok hajlásszöge?

$\cos\gamma = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}/(|\mathbf{a}||\mathbf{b}|) = \frac{1}{2} \rightsquigarrow \gamma = \pi/3$

E8. Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ olyan szimmetrikus mátrix $\mathbb{R}^{2\times 2}$-ben, amelynek sajátvektora az $(1,2)$ vektor. Adjunk meg olyan $\mathbf{C}$ mátrixot, amelyre $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ biztosan diagonális!

A mátrix szimmetrikus, így van ortogonális (sőt ortonormált) bázisa amelyben diagonális, például

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{vagy} \quad \mathbf{C} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

---

1. Keressük meg a

$$\begin{aligned} x + y - z &= 6 \\ x + 2y \phantom{{}-z} &= 8 \\ x + 3y + z &= 10 \\ 2x + 3y - z &= 14 \end{aligned}$$

egyenletrendszer sortérbe eső megoldását!

$(2,3,-1)$

2. Írjuk fel annak az $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ lineáris leképezésnek a mátrixát, mely az $(1,-1,0)$, $(0,1,-1)$, $(0,0,1)$ vektorokat rendre a $(0,1,1,1)$, $(1,0,0,1)$, $(1,1,0,0)$ vektorokba viszi.

A keresett $\mathbf{A}$ mátrixra

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Tekintsük az $(1,2,3,2)$ és a $(1,2,0,1)$ vektorok által kifeszített alteret $\mathbb{R}^4$-ben. Írjuk fel az altérre való merőleges vetítés mátrixát.

Az $\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\top$ képletbe helyettesítve

$$\frac{1}{59}\begin{bmatrix} 10 & 20 & -3 & 9 \\ 20 & 40 & -6 & 18 \\ -3 & -6 & 54 & 15 \\ 9 & 18 & 15 & 14 \end{bmatrix}$$

4. Határozzuk meg az alábbi determinánsok értékét! Az elsőét két (nem zérus értékű) kígyó determinánsának összegére való bontással, a másodikét elemi sorműveletekkel, a harmadikét tetszőleges módon!

$$a)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad b)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}, \quad c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -3 & 9 & -27 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

a) -8, *b)* $-2(n-2)!$, *c)* 240

5. Határozzuk meg a

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátaltereit, és írjuk fel a sajátfelbontását, végül adjunk meg egy ortonormált bázist, melyben diagonális az alakja!

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = 4$, sajátalterek: $\mathcal{V}_2 = \operatorname{span}((1,-1,0))$, $\mathcal{V}_4 = \operatorname{span}((1,1,0),(0,0,1))$,

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \left((-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0,0,1)\right)$$

6. Számítsuk ki az $\mathbf{A}$ mátrix pszeudoinverzét, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

7. Határozzuk meg az alábbi $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-normálalakját, Jordan-bázisát és 10-dik hatványát!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}$, $\mathbf{A}^{10} = \mathbf{C}\mathbf{J}^{10}\mathbf{C}^{-1}$, ahol

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}^{10} = \begin{bmatrix} 2^{10} & -10\cdot 2^9 & 10\cdot 2^9 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{bmatrix}$$

8. Tegyük fel, hogy a 7×7-es $\mathbf{A}$ mátrixra $\mathbf{A}-\mathbf{I}$ hatványainak rangja $5,4,3,3,\dots$, míg $\mathbf{A}+2\mathbf{I}$ hatványainak a rangja $5,4,4,\dots$. Mi az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-normálalakja, karakterisztikus polinomja?

$\chi(x) = (1-x)^4(-2-x)^3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|cc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$