| 1 | 2-8 | 9-12 | 13- | Σ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

**NÉV** _____ **NEPTUNKÓD** _____

**Lineáris algebra mérnököknek** **1. vizsga – elmélet – elmélet** **2018-01-10**

*A tesztkérdésekre 20, a definíciók, tételek precíz megfogalmazására 10, a bizonyítások tömör, világos, korrekt leírására 10 pont kapható. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 60 perc. Segédeszköz nem használható!*

**1.** Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(6 pont)*

*a)* Ha egy 5 ismeretlenes lineáris egyenletrendszer 4 egyenletből áll, akkor inkonzisztens. H

*b)* Minden lineáris egyenletrendszernek van optimális megoldása. I

*c)* Azok a $\mathbf{b}$ vektorok, melyekre az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer konzisztens, alteret alkotnak. I

*d)* Ha egy $\mathcal{V}$ vektortérnek $\mathcal{B}$ egy bázisa, és $\mathcal{W}$ a $\mathcal{V}$ egy altere, akkor a $\mathcal{B}$ bázisnak van olyan részhalmaza, mely a $\mathcal{W}$ bázisa. H

*e)* Valós szimmetrikus mátrixok sajátértékei valósak. I

*f)* A sajátértékek geometriai multiplicitásainak összege egyenlő a mátrix Jordan-blokkjainak számával. I

**2.** Melyik altér az alábbiak közül az $\mathbb{R}$ feletti valós $n \times n$-es mátrixok vektorterében? Az $n \times n$-es *(a)* invertálható mátrixok, *(b)* zérus mátrix egyedül, *(c)* diagonális mátrixok, *(d)* $\mathbf{A}$-val fölcserélhető mátrixok, *(e)* egész elemű mátrixok. *(2 pont)*

*(a)* nem, *(b)* igen, *(c)* igen, *(d)* igen, *(e)* nem.

**3.** Az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei $\lambda$ és $\mu$. $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakjában a $\lambda$-hoz tartozó Jordan-blokkok mérete 3, 3, 3, 3, a $\mu$-höz tartozók mérete 4, 4, 1. Írjuk fel $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomját, és határozzuk meg $\lambda$ algebrai és geometriai multiplicitását! *(2 pont)*

$(x-\lambda)^{12}(x-\mu)^9$, $m_a(\lambda) = 12$, $m_g(\lambda) = 4$

**4.** Legyen $\mathcal{U} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, legyen $\mathcal{V} \perp \mathcal{W}$. Legyen $\mathcal{U}$ bázisa $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ úgy, hogy $\mathcal{V}$ bázisa $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{n-1}\}$, $\mathcal{W}$ bázisa $\{\mathbf{u}_n\}$. Írjuk fel a $\mathcal{V}$ hipersíkra való tükrözés egy sajátvektorokból álló bázisára vonatkozó mátrixát. *(2 pont)*

Sajátvektorokból álló bázis: $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$,
a tükrözés mátrixa e bázisban:
$\mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1, -1)$

**5.** Soroljon fel legalább négy testet, és legalább két gyűrűt (melyek nem testek)! *(2 pont)*

testek: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_p$, gyűrűk: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_m$, $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{R}[x]$.

**6.** Soroljon fel négy olyan mátrixtulajdonságot, mely a négyzetes mátrixokon a báziscserére nézve invariáns, azaz mely nem változik, ha a mátrixot egy másik bázisban írjuk fel! *(2 pont)*

determináns, rang, nyom, nullitás

**7.** Legyen $\mathbf{A}$ egy *teljes sorrangú* valós mátrix! Melyik merőleges vetítés az alábbi mátrixok közül? *(2 pont)*
*(a)* $\mathbf{A}^+\mathbf{A}$, *(b)* $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A}$, *(c)* $\mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T})^{-1}\mathbf{A}$, *(d)* $\mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}$.

*(a), (c)*

**8.** A táblázat bal felében egy valós vektortér lineáris transzformációinak listáját, jobb felében sajátértékeikre vonatkozó feltételek betűkkel jelölt listáját találjuk. Párosítsunk: melyik transzformációnak milyen sajátértékei lehetnek. *(2 pont)*

1E 2C 3D 4B 5A (A5 B4 C2 D3 E1)

| sorszám | transzformáció | betű | $\lambda$ |
|---|---|---|---|
| 1: | szimmetrikus | A: | $\lvert\lambda\rvert = 1$ |
| 2: | ferdén szimmetrikus | B: | $\lambda > 0$ |
| 3: | nilpotens | C: | $\mathrm{i}\lambda \in \mathbb{R}$ |
| 4: | pozitív definit | D: | $\lambda = 0$ |
| 5: | ortogonális | E: | $\lambda \in \mathbb{R}$ |

**9.** Mit értünk egy sajátérték algebrai és geometriai multiplicitásán? *(2 pont)*

**10.** Definiáljuk a lineáris leképezés fogalmát! *(2 pont)*

**11.** Mondjuk ki a lineáris algebra alaptételét! *(3 pont)*

**12.** Mondjuk ki a Moore–Penrose-tételt! *(3 pont)*

**13.** Mondjuk ki és bizonyítsuk be a dimenziótételt! *(5 pont)*

**14.** Mondjuk ki és igazoljuk a diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltételéről szóló tételt! *(5 pont)*