1. Legyenek megadva az alábbi mátrixok:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 2+i \\ 2 & 3-i \\ 3 & 4i \end{bmatrix}.$$

Végezzük el az alábbi műveleteket, ha lehet:
$\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{D}^2$, $\mathbf{DD}^T$, $\overline{\mathbf{D}}$, $\mathbf{BC}$.

2. Legyen az $\mathbf{A}_{m\times n}$ mátrix redukált lépcsős alakja (a zérussorok elhagyása után) $[\mathbf{I}_r|\mathbf{B}]$, ahol r a mátrix rangja. Írjuk fel az $\mathbf{A}$ együtthatómátrixú homogén lineáris egyenletrendszer összes megoldását mátrixszorzat alakban!

3. Legyenek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ tetszőleges $n\times n$-es mátrixok. Igazoljuk, hogy az $\mathbf{AB}-\mathbf{BA}$ mátrix főátlójában az elemek összege 0.

4. Oldjuk meg szimultán lineáris egyenletrendszerrel az $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ mátrixegyenletet, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Melyik oldalról kell megszorozni és milyen permutáló mátrixszal az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrixot, hogy a

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixot kapjunk? E permutáló mátrix milyen elemi mátrixok szorzataként írható föl?

6. Bizonyítsuk be, hogy a 4×4-es szigorú felsőháromszögmátrixok 4-edik hatványa $\mathbf{O}$. (Szigorú felsőháromszögmátrix az olyan négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix, amelynek a főátlójában és a főátló alatt is csupa 0 van, azaz $a_{ij}=0$, ha $j-i\le 0$. Igaz-e az állítás 4 helyett tetszőleges pozitív n-re?)

7. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Számítsuk ki az alábbi szorzatot 4×4-es mátrixok szorzataként, és a blokkmátrixos felbontás használatával is!

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ \hline \mathbf{O} & -\mathbf{I} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B} & \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{B} & \mathbf{O} \end{array}\right]$$

8. Elemi sorműveletekkel számítsuk ki a következő mátrix inverzét!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

9. Adjuk meg az alábbi mátrix LU-felbontását:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

10. Oldjuk meg az $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ egyenletrendszert LU-felbontás segítségével, ahol $\mathbf{A}$ az előző feladatbeli mátrix és $\mathbf{b}=(5,-1,3,7)$.

11. Bontsuk fel az alábbi mátrixot egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus (antiszimmetrikus) mátrix összegére!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

12. Határozzuk meg az $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$ mátrixot ($n \in \mathbb{N}$)!

13. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 & -5 \\ 2 & 4 & 5 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Határozzuk meg $\mathbf{A}$ bázisfelbontását!

(b) Ezt felhasználva bonsuk fel $\mathbf{A}$-t $\mathrm{r}(\mathbf{A})$ darab diád összegére!

14. Legyen $\mathcal{A} := \{(1,0,1),(1,1,1),(1,-1,0)\}$, $\mathcal{B} := \{(1,2,2),(-1,0,1),(1,1,-1)\}$.

(a) Mutassuk meg, hogy ezek $\mathbb{R}^3$ két bázisa!

(b) Írjuk fel a $\mathbf{T}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ áttérési mátrixot!

(c) Legyen $[\mathbf{v}]_{\mathcal{A}}=(1,1,-1)$ egy $\mathbf{v}$ vektor koordinátavektora az $\mathcal{A}$ bázisban. Mi lesz $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$?

15. Legyen $\mathbb{R}^4$ standard bázisa $\mathcal{C}$, és egy alterének bázisa $\mathcal{B}=\{(1,0,1,-1),(1,1,0,0)\}$.

(a) Írjuk fel az $\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ áttérés mátrixát!

(b) Írjuk fel $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$-t ha $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

16. Elemi sorműveletek alkalmazásával számítsuk ki az alábbi determinánsokat!

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

17. Határozzuk meg az elemi mátrixok determinánsát!

18. Legyen az 5×5-ös $\mathbf{A}$ mátrix determinánsa 3, az 5×5-ös C mátrixé $c\neq 0$. Mi lesz a determinánsa a következő mátrixoknak: *a)* $2\mathbf{A}^{-1}$, *b)* $(2\mathbf{A})^{-1}$, *c)* $\mathbf{A}^2\mathbf{A}^T\mathbf{A}^{-1}$, *d)* $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$.

19. Számítsuk ki a következő $n \times n$-es determináns értékét! (Ötlet: a második sort vonjuk ki az összes többiből.)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$$

20. Számítsuk ki a

$$\begin{vmatrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{vmatrix}$$

determináns értékét! Hogyan lehet ezt általánosítani? (Ötlet: adjuk az összes oszlopot az első oszlophoz.)

21. Számítsuk ki az alábbi mátrix determinánsát és inverzét aldeterminánsok segítségével:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

22. Cramer szabály alkalmazásával oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert, ha $\mathbf{A}$ az előző feladatbeli mátrix, $\mathbf{b} = [1\ 1\ -1]^T$.

23. Oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ és az $\mathbf{x}^T\mathbf{A} = \mathbf{b}^T$ egyenletrendszert $\mathbf{A}^{-1}$-vel való beszorzással az előző feladatbeli $\mathbf{A}$-val és $\mathbf{b}$-vel.

24. Határozzuk meg az alábbi mátrix determinánsát:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -3 & 9 & -27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

25. Határozzuk meg az alábbi $2n \times 2n$-es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{I} \\ \mathbf{O} & \mathbf{X} \end{bmatrix}$$

blokkmátrix determinánsát és inverzét, ahol $\mathbf{I}, \mathbf{O}, \mathbf{X} \in \mathrm{M}_n[\mathbb{R}]$, $\mathbf{O}$ a nullmátrix, $\mathbf{I}$ az egységmátrix, és $\mathbf{X}$ mellékátlójában -1-esek, egyebütt nullák állnak.

26. Határozzuk meg az alábbi két mátrix determinánsát (a nem zérus értékű) kígyók determinánsának összegére való bontással:

$$a)\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b)\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

27. Számítsuk ki az alábbi összeget!

$$\sum_{k=1}^{10} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ (-1)^k 2k & (-1)^k 3k & 2 \end{vmatrix}.$$

28. Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját a maximális méretű nem nulla aldetermináns méretének meghatározásával:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

29. Melyek lineárisak az alábbi leképezések közül? Amelyik igen, annak írjuk fel a standard mátrixát! Mi a lineáris leképezés magtere és képtere (adjuk meg a bázisát)?

(a) $(x, y, z) \mapsto (x - 2y, z, x + y + z)$

(b) $(x, y, z) \mapsto (x + 2y, 3x - y)$

(c) $(x, y, z) \mapsto (1, x, x^2 y)$

30. Tekintsük az $(1, 2, 3, 2)$ és a $(1, 2, 0, 1)$ vektorok által kifeszített alteret $\mathbb{R}^4$-ben. Írjuk fel az altérre való merőleges vetítés mátrixát. Vetítsünk egy altérbe eső és egy altérbe nem eső vektort az altérre e mátrixszal való szorzással. Mekkora az altérbe nem eső vektornak az altértől való távolsága?