0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ

NÉV ______________________________ **NEPTUNKÓD** __________

Lineáris algebra mérnököknek **2. vizsga** **2020-01-14**

Az összpontszám 50. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Segédeszköz nem használható!

0. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre valamely **definíció** alapján! (*1-1 pont*)

a) Az $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixok hasonlóak, ha

b) Legyen $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ két $\mathbb{F}$ test fölötti vektortér. Egy $L : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ függvényt lineáris leképezésnek nevezünk, ha

c) Azt mondjuk, hogy a λ szám az $L\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris transzformáció sajátértéke, ha

d) Az x_1, x_2, x_3, x_4 számokhoz tartozó Vandermonde-determináns definíció szerint =

e) Az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot ortogonálisnak nevezzük, ha

1. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre valamely **tétel** alapján! (*1-1-1-2 pont*)

a) Egy lineáris egyenletrendszer ekvivalens átalakításai a következők:

b) Hány elemű lehet egy 3-ismeretlenes, $\mathbb{F}_2$ fölötti inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza?

c) Soroljon fel a rangon kívül további legalább négy, a báziscserére nézve invariáns mátrixtulajdonságot (vagy a mátrixhoz rendelt valamely objektumot)!

d) A táblázat bal felében az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix diagonalizálhatóságának két típusa, a jobb felében az $\mathbf{A}$ mátrixra vonatkozó tulajdonságok szerepelnek. Írjuk le a köztük lévő kapcsolatokat ($\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$)!

A: diagonalizálható	1: szimmetrikus
	2: sajátértékei különbözők
B: ortogonálisan diagonalizálható	3: sajátalterei direkt összege $\mathbb{R}^n$
	4: $\mathbb{R}^n$-nek van sajátvektoraiból álló bázisa

2. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(5 pont)*

a) Egy konzisztens egyenletrendszer minden megoldása egyúttal optimális megoldás is. ☐

b) Ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, és $\mathbf{A}$ négyzetes, akkor $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. ☐

c) Ha $\mathcal{U}$ altere $\mathcal{V}$-nek és $\mathcal{V}$ altere $\mathcal{W}$-nek, akkor $\mathcal{U}$ altere $\mathcal{W}$-nek! ☐

d) Ha az $\mathbf{A}$ mátrix nilpotens, akkor $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ invertálható! ☐

e) Tetszőleges $\mathbf{A}$ valós mátrixra $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})$. ☐

3. Írjuk le a legjobb közelítés tételét, és annak bizonyítását! *(5 pont)*

NÉV ____

4. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátfelbontását! *(4 pont)*

5. Írjuk fel az **A** mátrix egy Jordan-bázisát és Jordan-felbontását! *(5 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

6. *a)* Mennyi az $(1, 1, 2)$, $(-1, 1, 0)$, $(1, 2, 1)$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata? E három vektor jobbrendszert vagy balrendszert alkot?

b) $\mathbf{u} = (-1, 1, -1, 1, -1, 1), \mathbf{v} = (1, 0, 1, 0, 1, 0) \in \mathbb{R}^6$ vektorok hajlásszöge?

c) $\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} \end{bmatrix}^{\mathsf{H}} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} =$

d) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$

e) Hány dimenziós a $D : \mathcal{P}_4 \to \mathcal{P}_4; p(x) \mapsto p''(x)$ leképezés magtere és képtere? ($\mathcal{P}_4$ a legföljebb negyedfokú valósegyütthatós polinomok vektortere) *(2 pont)*

7. Határozzuk meg x értékét a Cramer-szabállyal, és adjuk meg az együtthatómátrix LU-felbontását!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

8. Keressünk *ortogonális bázist*, melyben az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix diagonális alakú!

9. Legyen $f(x, y) = ax + by + c$. E függvény grafikonja egy sík. Egy mérés során adott (x, y) helyeken a következő $f(x, y)$ értékeket mérjük:

(x, y)	$(0, 0)$	$(1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 1)$
$f(x, y)$	2	2	2	6

E pontok nincsenek egy síkon. Határozzuk meg az a, b, c értékeket úgy, hogy az eltérések négyzetösszege minimális legyen (írjunk fel az a, b, c ismeretlenekre egyenletrendszert, és határozzuk meg annak optimális megoldását)!