1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum$

LinAlgMérnököknek Pót.ZH 19-12-12 Neptun: ____________ **Név:** ________________________________

1. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre

a) (2 pont) Legyen $\mathrm{r}(\mathbf{A}_{m\times n}) = r$. Írjuk fel a kitüntetett alterek dimenzióit!
$\dim(\mathcal{S}(\mathbf{A})) = \dim(\mathcal{O}(\mathbf{A})) = r$,
$\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = n - r$, $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})) = m - r$

b) (2 pont) Legyen $\mathcal{B} = \{(4,1,0),(0,4,1),(0,0,4)\}$, $\mathcal{C} = \{(1,0,0),(2,2,0),(3,3,3)\}$. Írjuk fel (kiszámítani nem kell) az $\mathbf{x}$ vektor $[\mathbf{x}]_\mathcal{B}$ koordinátás alakját az $[\mathbf{x}]_\mathcal{C}$ ismeretében a megfelelő áttérés mátrixának segítségével!

$$[\mathbf{x}]_\mathcal{B} = \mathbf{T}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}\mathbf{T}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{E}}[\mathbf{x}]_\mathcal{C} = \begin{bmatrix}4&0&0\\1&4&0\\0&1&4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&3\end{bmatrix}[\mathbf{x}]_\mathcal{C}$$

c) (1 pont) Írjuk fel a síkbeli 135°-os forgatás mátrixát!

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1&-1\\1&-1\end{bmatrix}$$

2. Írjuk fel az $(1,1,0)$, $(0,1,2)$ és $(1,0,3)$ pontokon átmenő sík explicit vektoregyenletét és implicit egyenletrendszerét!

Az explicit vektoregyenlet:
$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\0\\2\end{bmatrix}s + \begin{bmatrix}0\\-1\\3\end{bmatrix}t$$
Az implicit egyenletrendszer: $2x + 3y + z = 5$

3. Írjuk fel a $-2-2\mathrm{i}$ szám összes köbgyökét algebrai alakban!

Az egyik köbgyök $1-\mathrm{i}$, a többi a harmadik egységgyökökkel való szorzással jön ki legegyszerűbben:
$1-\mathrm{i}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2})\mathrm{i}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + (-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2})\mathrm{i}$

4. Tekintsük az $(1,2,2)$, $(2,4,4)$, $(3,3,6)$, $(4,5,8)$, $(2,1,4)$ vektorok által kifeszített $\mathcal{V}$ alteret. Válasszunk bázist $\mathcal{V}$-ben e vektorokból, és írjuk fel e vektorok koordinátás alakját e bázisra nézve!

A bázis $\{(1,2,2),(3,3,6)\}$, a koordináták:
$(1,0)$, $(2,1)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(-1,1)$

5. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét három különböző módon is: elemi sorműveletekkel, valamely sor vagy oszlop szerinti kifejtéssel és a belőle kiválasztható kígyók segítségével!

$$\det\begin{bmatrix}1&2&0&1\\1&0&2&0\\2&0&0&1\\0&2&1&0\end{bmatrix}$$

-2

6. Határozzuk meg és foglaljuk táblázatba a rangját, nullitását, determinánsát, nyomát az $\mathbb{R}^3$ tér vektorai (1) egy pontra való tükrözésének, (2) egy egyenesre való merőleges vetítésének, (3) egy síkra való tükrözésének!

a táblázat:

	r	null	det	trace
(1)	3	0	-1	-3
(2)	1	2	0	1
(3)	3	0	-1	1

7. Határozzuk meg az inkonzisztens

$$\begin{aligned}x + 2y - 2z &= 3\\2x + 4y - 4z &= 3\\-x - 2y + 2z &= 3\end{aligned}$$

egyenletrendszer összes *optimális* megoldását a normálegyenlet segítségével és a minimális abszolút értékű megoldással kifejezve!

Összes megoldás:

$$\begin{bmatrix}1/9\\2/9\\-2/9\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}s + \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}t.$$

8. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix LU-felbontását $\mathbb{R}$ fölött, és oldjuk meg az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert mátrixinvertálással, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}-4&4&1\\0&2&0\\1&1&0\end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix}2\\4\\3\end{bmatrix}.$$

A megoldás: $(1,2,-2)$, az LU-felbontás:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-\frac{1}{4}&1&1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix}-4&4&1\\0&2&0\\0&0&\frac{1}{4}\end{bmatrix}.$$

9. Legyen $\mathcal{V} = \mathrm{span}((0,1,1,0),(1,2,0,1))$. Adjuk meg egy olyan a $\mathcal{W} \le \mathbb{R}^4$ alteret, melyre igaz, hogy $\mathbb{R}^4$ minden vektora pontosan egyféleképp írható fel egy $\mathcal{V}$-beli és egy $\mathcal{W}$-beli vektor összegeként!

Jó pl. a $\mathcal{W} = \mathcal{V}^\perp$, azaz a fenti sorvektorokból álló mátrix nulltere: $\mathcal{W} = \mathrm{span}((2,-1,1,0),(-1,0,0,1))$.

10. Milyen messze van az előző feladatbeli $\mathcal{V}$ altértől a $(2,2,4,0)$ pont?

A távolság $\sqrt{6}$, a vetület $(0,3,3,0)$, a vetítőmátrix

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&-1&1\\1&3&1&1\\-1&1&3&-1\\1&1&-1&1\end{bmatrix}$$