1	2	3	4	5	6	$\sum$

LinAlgMérnököknek 2.ZH 19-11-27 **Neptun:** ____________ **Név:** ______________________________

A dolgozat feladatainak eredményeit erre a lapra kell írni, de a mellékszámítások is beadandók! Minden további papírlap jobb felső sarkára mindenki írja föl a saját nevét és a Neptun-kódját! A feladatok megoldásához segédeszköz nem használható!

1. Válaszoljunk az alábbi kérdésre!

a) *(1 pont)* Hány állítás igaz az alábbiak közül a mátrixszorzásra? *(1)* ha $\mathbf{XY} = \mathbf{XZ}$ és $\mathbf{X} \neq \mathbf{O}$, akkor $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$, *(2)* ha $\mathbf{XY} = \mathbf{O}$, akkor $\mathbf{X} = \mathbf{O}$ vagy $\mathbf{Y} = \mathbf{O}$, *(3)* ha $\mathbf{X}(\mathbf{YZ})$ elvégezhető, akkor $(\mathbf{XY})\mathbf{Z}$ is. $\boxed{1}$

b) *(1 pont)* *Írjuk fel (kiszámolni nem kell)* az $\{(1,2),(2,3)\}$ bázisról a $\{(2,2),(0,1)\}$ bázisra való áttérés mátrixát!

$$\mathbf{T}_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1} = \mathbf{T}^{-1}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}_2} \mathbf{T}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

c) *(1 pont)* Mi a sík $30°$-kal való forgatásának mátrixa?

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$$

d) *(1 pont)* Legyen $\mathbb{R}[x]_n$ a legföljebb n-edfokú polinomok vektortere és jelölje D_2 a kétszeres deriválást, azaz a $p \mapsto p''$ lineáris leképezést. Hány dimenziós az alábbi három vektortér?

$\dim(\mathbb{R}[x]_n) = n + 1$

$\dim(\operatorname{Ker}(D_2)) = 2$ $\qquad$ $\dim(\operatorname{Im}(D_2)) = n - 1$

e) *(1 pont)* (I vagy N kérdés) Lineáris transzformáció-e az $(x, y, z, w) \mapsto (x - y, z + 1, w - x, z + w)$ leképezés? $\boxed{\text{H}}$

2. *(4 pont)* Írjuk fel az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

LU-felbontását, és annak segítségével, csak visszahelyettesítésekkel oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert, ahol $\mathbf{b} = (2, 1, 3)$. (A keretbe írjuk be az $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ mátrixokat, és a köztes lépés eredményét is.)

Az LU-felbontás, az $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ és az $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ megoldásai:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. *(4 pont)* Írjuk fel a $(0, 1, 0)$ és a $(2, 0, 1)$ vektorok által kifeszített síkra való merőleges vetítés mátrixát, és számítsuk ki a $(3, 0, 4)$ vektornak e síktól való távolságát!

A vetítőmátrix az $\mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ képlet szerint

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a vetület $(4, 0, 2)$, a távolság $\sqrt{5}$.

4. *(3 pont)* Bontsuk fel az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

mátrixot a rangjával egyező számú diadikus szorzat összegére a bázisfelbontás segítségével!

Bázisfelbontás és a diadikus szorzatok összegére bontás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. *(5 pont)* Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 10 \\ 2x + 4y - 2z &= 10 \end{aligned}$$

egyenletrendszer összes *optimális* megoldását a minimális abszolút értékű megoldással kifejezve!

Normálegyenlet, bővített mátrixának redukált lépcsős alakja és a sortérbe eső megoldáshoz megoldandó egyenletrendszer mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 & -5 \\ 10 & 20 & -10 \\ -5 & -10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 60 \\ -30 \end{bmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad [1\ 2\ -1 \mid 6]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Összes megoldás: $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t.$

6. *(4 pont)* Számítsuk ki az alábbi determináns értékét három különböző módon is: *(a)* elemi sorműveletekkel, *(b)* a belőle kiválasztható kígyók segítségével és *(c)* valamely sor vagy oszlop szerinti kifejtéssel!

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(a) $\operatorname{rref}(\mathbf{A}) = \mathbf{I} \rightsquigarrow \det(\mathbf{A}) = 1.$

(b) Kígyókkal:

$$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & 2 & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \\ 1 & & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} & & & 1 \\ 2 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \end{vmatrix} = 1 + 2 - 2 = 1$$

(c) pl. a negyedik sorral: $-\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$