



BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM



Lineáris algebra mérnököknek

BMETE93BG20



Jordan-féle normálalak

Kf81 2018-12-04



Wettl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK

E lecke befejezése után a hallgató

- meg tudja határozni mátrixok általánosított sajátvektorait,
- fel tudja írni 3×3 -as mátrixok Jordan-féle normálalakját, valamint
- Jordan-bázisát, Jordan-felbontását.
- ki tudja számolni az $\mathbf{A}$ mátrix $f(\mathbf{A})$ értékét, ha f definiálva van az $\mathbf{A}$ spektrumán.

Mátrixok polinomjai

Cayley–Hamilton-tétel

T Ha $\mathbf{A}$ egy tetszőleges négyzetes mátrix, melynek karakterisztikus polinomja χ , akkor $\chi(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

m Diagonalizálható mátrixokra könnyű a bizonyítás:

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^{-1} \rightsquigarrow \chi(\mathbf{A}) = \mathbf{C}\chi(\mathbf{\Lambda})\mathbf{C}^{-1} \rightsquigarrow$$

$$\chi(\mathbf{A}) = \mathbf{C} \begin{bmatrix} \chi(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \chi(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \chi(\lambda_n) \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\mathbf{O}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{O}.$$

Cayley–Hamilton-tétel bizonyítása*

B^* $\mathbb{L}$ $B = A - \lambda I$. Az A karakterisztikus polinomja így

$$\det B = \chi(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + p_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + p_1 \lambda + p_0.$$

B bármely eleméhez tartozó előjeles aldetermináns λ egy legfölbbebb $n - 1$ -edfokú polinomja, így léteznek olyan konstans elemű $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}$ mátrixok, hogy

$$\operatorname{adj} B = \lambda^{n-1} C_{n-1} + \dots + \lambda C_1 + C_0.$$

$$\det(B)I = B \operatorname{adj}(B) \rightsquigarrow$$

$$\begin{aligned} B \operatorname{adj} B &= (A - \lambda I) \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k C_k \right) \\ &= AC_0 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k (AC_k - C_{k-1}) \right) - \lambda^n C_{n-1}. \end{aligned}$$

Együtthatóösszehasonlítás:

$\det(\mathbf{B})\mathbf{I}$	$\mathbf{B} \operatorname{adj} \mathbf{B}$
$(-1)^n \mathbf{I} = -\mathbf{C}_{n-1}$	$\cdot \mathbf{A}^n$
$p_{n-1} \mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{C}_{n-1} - \mathbf{C}_{n-2}$	$\cdot \mathbf{A}^{n-1}$
$\vdots$	$\vdots$
$p_2 \mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1$	$\cdot \mathbf{A}^2$
$p_1 \mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_0$	$\cdot \mathbf{A}$
$p_0 \mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{C}_0.$	

A beszorzás után kapott egyenlőségeket összeadva

$$(-1)^n \mathbf{A}^n + p_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \dots + p_1 \mathbf{A} + p_0 \mathbf{I} = \mathbf{O}.$$

- K** Minden $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ mátrixhoz és minden $\mathbb{F}$ fölötti p polinomhoz van olyan legföljebb $n - 1$ -edfokú r polinom, hogy $p(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$.
- B** Ha p -t elosztjuk χ -vel maradékosan, azaz $p = \chi q + r$, ahol tehát r az osztás maradéka, akkor $\chi(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$ miatt

$$p(\mathbf{A}) = \chi(\mathbf{A})q(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A}) = \mathbf{O}q(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}).$$

- P** Ha $\chi(x) = x^4 - x^3 + x^2$, és az $x^{100} : x^4 - x^3 + x^2$ osztás maradéka $x^3 - x^2$, akkor hogy számítjuk ki az $\mathbf{A}^{100}$ mátrixot?
- M** E mátrixra $\mathbf{A}^{100} = \mathbf{A}^3 - \mathbf{A}^2$.
- K** Minden invertálható $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ mátrixhoz létezik egy legf. $n - 1$ -edfokú $\mathbb{F}$ fölötti q polinom, hogy $\mathbf{A}^{-1} = q(\mathbf{A})$.
- P** Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ mátrix karakterisztikus polinomja $\chi(x) = x^5 + x^3 - 1$. Hogyan számolnánk ki az inverzét?
- M** $\mathbf{O} = \chi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^5 + \mathbf{A}^3 - \mathbf{I}$, beszorozva $\mathbf{A}^{-1}$ -gyel: $\mathbf{A}^4 + \mathbf{A}^2 - \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{O}$
 $\rightsquigarrow \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^4 + \mathbf{A}^2$ (ez 2 négyzetre emelés és egy összeadás).
- m** Valójában **minden mátrixfüggvény** kiszámolható polinommal!

Invariāns alterek

Invariáns alterek definíciója

- D** Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ altér az $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lineáris transzformáció (illetve az L valamely bázisbeli L mátrixának) **invariáns altére**, ha minden $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ vektorra $L\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ ($L\mathbf{x} \in \mathcal{U}$).
- T** Az $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ altér pontosan akkor invariáns altér az L lineáris transzformációra nézve, ha $\mathcal{U}$ egy $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ bázisának minden vektorára $L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$ ($i = 1, \dots, k$).
- B** $(\Rightarrow)$ $\mathcal{U}$ invariáns altér $\leadsto \mathcal{U}$ minden vektorának képe $\mathcal{U}$ -ban van $\leadsto L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$ ($i = 1, \dots, k$).
- $(\Leftarrow) \forall \mathbf{u}_i : L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$
- $L! \mathbf{x} \in \mathcal{U} : \mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \dots + x_k\mathbf{u}_k \leadsto$

$$L\mathbf{x} = x_1L\mathbf{u}_1 + x_2L\mathbf{u}_2 + \dots + x_kL\mathbf{u}_k \in \mathcal{U},$$

P* Tekintsük az $L : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Lx}$ mátrixleképezést, ahol

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Mutassuk meg, hogy az $\mathcal{U} = \text{span}((1, -1, 2, -1), (1, 2, -1, 2))$ altér invariáns altere az L lineáris transzformációnak.

M $L\mathbf{u} = (1, -2, 3, -2)$, $L\mathbf{v} = (1, 1, 0, 1)$

Elég megmutatni, hogy az $[\mathbf{u} \mid \mathbf{v} \mid L\mathbf{u} \mid L\mathbf{v}]$ rangja 2.

- (még megmutathatjuk azt is, hogy e vektorok és képeik közt mi a lineáris kapcsolat:

$$\text{rref}([\mathbf{u} \mid \mathbf{v} \mid L\mathbf{u} \mid L\mathbf{v}]) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix},$$

azaz $L\mathbf{u} = \frac{4}{3}\mathbf{u} - \frac{1}{3}\mathbf{v}$, $L\mathbf{v} = \frac{1}{3}\mathbf{u} + \frac{2}{3}\mathbf{v}$.)

Blokkdiagonális mátrixok

- T **Blokkdiagonális mátrixok és az invariáns alterek:** L : az $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lin trafő két invariáns altere $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$. Ha $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, akkor L mátrixa

$$L = \begin{bmatrix} U & O \\ O & W \end{bmatrix}$$

a $\mathcal{V}$ $\forall$ olyan bázisában, mely az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ bázisainak uniója.

- m Általánosítás: ha $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_k$ a $\mathcal{V}$ vektortér invariáns alterei, és $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_k$, akkor L mátrixa blokkdiagonális alakú minden olyan bázisban, mely az alterek bázisainak egyesítése.

$$m \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}, \\ \mathcal{U}_2 &= \{\mathbf{e}_4\}, \\ \mathcal{U}_3 &= \{\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6\} \\ \mathcal{V} &= \mathbb{R}^6 = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \mathcal{U}_3 \end{aligned}$$

B $L!$ $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ és $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-r}\}$ az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ egy-egy bázisa. Mivel $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, ezért egyesítésük a $\mathcal{V}$ egy bázisát adja. L e bázisra vonatkozó mátrixa a bázisvektorok képvektoraiból alkotott mátrix:

$$L\mathbf{u}_i = u_{i1}\mathbf{u}_1 + \dots + u_{ir}\mathbf{u}_r + 0\mathbf{w}_1 + \dots + 0\mathbf{w}_{n-r}$$

$$L\mathbf{w}_j = 0\mathbf{u}_1 + \dots + 0\mathbf{u}_r + w_{j,r+1}\mathbf{w}_1 + \dots + w_{j,n}\mathbf{w}_{n-r}$$

ahol $i = 1, \dots, r, j = r+1, \dots, n$. Így a mátrix alakja

$$L = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & \dots & u_{r1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{1r} & u_{2r} & \dots & u_{rr} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & w_{r+1,r+1} & w_{r+2,r+1} & \dots & w_{n,r+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & w_{r+1,n} & w_{r+2,n} & \dots & w_{n,n} \end{bmatrix},$$

Általánosított sajátvektorok

$$\text{m Az } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_1 = 4\mathbf{e}_1$$

mátrix hatása a standard bázison: $\mathbf{A}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$$

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$$

Átrendezés után: $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1$

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2$$

- $\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$ hatásának diagramja:

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_1 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_2 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_3$$

- Eszerint $\mathbf{e}_1$ sajátvektor, és $\mathbf{A}$ -nak más sajátvektora nincs, viszont

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}.$$

Általánosított sajátvektor

D Az $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektort a négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékéhez tartozó **általánosított sajátvektorának** nevezzük, ha valamilyen k természetes számra $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^k \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$k = 1$ esetén $\mathbf{x}$ sajátvektor. Az általánosított sajátvektorokból álló $\mathbf{x}_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) sorozatot **Jordan-láncnak** nevezzük, ha $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1}$ és $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$.

Egy tér **diszjunkt Jordan-láncokból** álló bázisát **Jordan-bázisnak** nevezzük.

Jordan-lánc és Jordan-bázis konstrukciója

P Keressünk egy Jordan-bázist! Tudjuk, hogy $\chi(x) = (4 - x)^3$.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

M A sajátaltér 1-dimenziós, melyet az $\mathbf{x} = (1, -1, 1)$ vektor feszít ki.

- $(A - 4I)^3 = \mathbf{0}$, de $(A - 4I)^2 \neq \mathbf{0} \rightsquigarrow \exists \mathbf{x}_3 : (A - 4I)^2 \mathbf{x}_3 \neq \mathbf{0}$

-

$$(A - 4I)^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$\rightsquigarrow (A - 4I)^2(x, y, z) = (-x + z, x - z, -x + z) \rightsquigarrow x \neq z$, pl $(1, 0, 0)$

$\mathbf{0} \xleftarrow{A-4I} \mathbf{x}_1 = (-1, 1, -1) \xleftarrow{A-4I} \mathbf{x}_2 = (2, -1, 2) \xleftarrow{A-4I} \mathbf{x}_3 = (1, 0, 0)$

- A alakja az $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ bázisban

$$J = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

ugyanis $A\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2 + 4\mathbf{x}_3$, $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 + 4\mathbf{x}_2$, $A\mathbf{x}_1 = 4\mathbf{x}_1$, aminek mátrixszorzat alakja:

$$A[\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_3] = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_3] \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\leadsto X^{-1}AX = J$, ahol $X = [\mathbf{x}_1 \mid \mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_3]$ (X az $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{X}$ áttérés mátrixa!)

- Konkrétan: $J = X^{-1}AX =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$\text{P } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 10 & -4 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \chi_{\mathbf{C}}(x) = (4 - x)^3.$$

M Sajátaltér: $\text{span}((1, 0, 1), (0, 2, 3))$

$(\mathbf{C} - 4\mathbf{I})^2 = \mathbf{O}$ (legföljebb kettő hosszú láncra számíthatunk),

$$\exists \mathbf{x}_2 : (\mathbf{C} - 4\mathbf{I})\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$$

$$- \quad \mathbf{C} - 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & -4 \\ 4 & 6 & -4 \end{bmatrix},$$

$\rightsquigarrow$ pl. $\mathbf{x}_2 = (1, 0, 0)$ megfelel.

- $\mathbf{x}_1 = (\mathbf{C} - 4\mathbf{I})\mathbf{x}_2 = (-2, 4, 4)$ (a sajátaltérben van, de különbözik a kapott sajátvektoroktól:

$$\mathbf{x}_1 = (-2, 4, 4) = -2(1, 0, 1) + 2(0, 2, 3).)$$

- $\mathbf{y}_1$ legyen független $\mathbf{x}_1$ -től:

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{C}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_1 = (-2, 4, 4) \xleftarrow{\mathbf{C}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_2 = (1, 0, 0)$$

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{C}-4\mathbf{I}} \mathbf{y}_1 = (1, 0, 1)$$

- C alakja az $\{x_1, x_2, y_1\}$ bázisban

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

- $J = X^{-1}AX =$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & -4 \\ 4 & 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Jordan-blokk

- D A négyzetes mátrixot, melynek főátlójában azonos λ értékek, fölötte 1-esek, egyebütt 0-k állnak, **Jordan-blokknak** nev.:

$$J_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (1)$$

- m Egy Jordan-blokknak a standard bázisvektorok általánosított sajátvektorai, ui. $i > 1$ esetén $J_\lambda \mathbf{e}_i = \lambda \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i-1}$, azaz $(J_\lambda - \lambda I) \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{i-1}$, és így e vektorok egyetlen Jordan-láncot alkotnak: $\mathbf{0} \xleftarrow{J_\lambda - \lambda I} \mathbf{e}_1 \xleftarrow{J_\lambda - \lambda I} \mathbf{e}_2 \xleftarrow{J_\lambda - \lambda I} \dots \xleftarrow{J_\lambda - \lambda I} \mathbf{e}_n$
- m Sőt, ha egy mátrix Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrix, akkor a standard bázis diszjunkt Jordan-láncokból áll.

Jordan-féle normálalak

Jordan-tétel

T Tfh $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$, és $\chi(x)$ lineáris tényezők szorzatára bomlik $\mathbb{F}$ fölött (azaz minden gyöke $\mathbb{F}$ -beli). Ekkor $\mathbf{A}$ hasonló egy ún. **Jordan-mátrixhoz**, mely Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrix, azaz $\exists \mathbf{C} : \mathbf{J} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ alakja

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{J}_k \end{bmatrix} \quad (2)$$

ahol k az $\mathbf{A}$ független sajátvektorainak maximális száma, és $\mathbf{J}_i$ az i -edik **sajátvektorhoz** tartozó Jordan-blokk. Az $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}$ alakú felbontását az $\mathbf{A}$ **Jordan-felbontásának** nev., mely a Jordan-blokkok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

- m Algebrailag zárt $\mathbb{F}$ test (pl. $\mathbb{C}$) esetén minden $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ mátrix hasonló egy Jordan-mátrixhoz, és minden lineáris $A : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ trafóhoz van olyan bázis, melyben mátrixa Jordan-mátrix.
- K Minden $\mathbb{C}^{n \times n}$ -beli mátrixhoz és minden $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ lineáris transzformációhoz van olyan bázis, melyben mátrixa Jordan-normálalakú.
- m A különböző Jordan-blokkok különböző sajátvektorokhoz tartoznak, de egy sajátérték több Jordan-blokkban is szerepelhet.
- T (Jordan-tétel lineáris transzformációkra) L! $\mathcal{V}$ véges dimenziós $\mathbb{F}$ fölötti vektortér, $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lineáris transzformáció és χ_A minden gyöke legyen $\mathbb{F}$ -beli. Ekkor $\mathcal{V}$ -nek van Jordan-bázisa.
- D E bázisban A mátrixa Jordan-mátrix, melyet az A Jordan-féle normálalakjának nevezünk. Ez egyúttal normálalakja az A bármely más bázisban felírt $\mathbf{A}$ mátrixának is.

P Hány nem hasonló normálalak létezik, ha $\chi(\lambda) = (1 - \lambda)^4$.

M

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mátrixfüggvények*

Diagonalizálható mátrixok függvényei

- m Ha $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ és $\mathbf{D}$ diagonális, továbbá $\mathbf{D}$ főátlóbeli elemei benne vannak a hatványsor konvergenciatartományában, akkor

$$f(\mathbf{D}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mathbf{D}^k = \text{diag} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k d_1^k, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} a_k d_n^k \right) = \text{diag}(f(d_1), \dots, f(d_n))$$

Eszerint például bármely diagonalizálható $\mathbf{A}$ mátrixra értelmezhető az $e^{\mathbf{A}}$ hatvány, nevezetesen

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^n}{n!} + \dots$$

- m Egy hatványsorba fejthető függvénynek egy diagonális mátrixban – és így bármely diagonalizálható mátrixban – fölvelt értékét a függvénynek csak a sajátértékekben való viselkedése befolyásolja.
- m A Cayley–Hamilton-tétel szerint minden mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét, így egy n -edrendű mátrix minden hatványa legföljebb $n - 1$ -edik hatványok lineáris kombinációjával helyettesíthető, azaz a függvény értéke egy polinomba való helyettesítéssel is kiszámolható.
- Á Legyen az $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-felbontása $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}$ és $p \in \mathbb{C}[x]$ egy tetszőleges polinom. Ekkor

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{C}p(\mathbf{J})\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} p(J_1) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & p(J_2) & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & p(J_k) \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-1},$$

m^* Tegyük fel, hogy az f függvény λ körül Taylor-sorba fejthető, azaz

$$f(x) = f(\lambda) + f'(\lambda)(x - \lambda) + \dots + \frac{f^{(m)}(\lambda)}{m!}(x - \lambda)^m + \dots$$

és legyen $\mathbf{J} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ egy Jordan-blokk, azaz

$$\mathbf{J} = \lambda \mathbf{I} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Mivel $\mathbf{N}^n = \mathbf{O}$, fenn kell álljon az

$$f(\mathbf{J}) = f(\lambda \mathbf{I} + \mathbf{N}) = f(\lambda) \mathbf{I} + f'(\lambda) \mathbf{N} + \dots + \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \mathbf{N}^{n-1} \quad (3)$$

összefüggés – ha egyáltalán van értelme az $f(\mathbf{J})$ kifejezésnek. Tehát az f függvénynek csak a Jordan-mátrix rendjénél kisebb rendű deriváltjai játszanak szerepet a függvényértékben.

Mátrixfüggvény a Jordan-alakból*

Spektrumon definiált függvény

- D** Legyen az $\mathbf{A}$ mátrix spektruma $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, a λ_i sajátértékhez tartozó legnagyobb Jordan-blokk rendjét jelölje m_i . Azt mondjuk, hogy f definiálva van az $\mathbf{A}$ spektrumán, ha az

$$f^{(j)}(\lambda_i), \quad j = 0, 1, \dots, m_i - 1, \quad i = 1, \dots, k$$

értékek léteznek. Azt mondjuk, hogy ezek az értékek az f értékei az $\mathbf{A}$ spektrumán.

- m** Minden függvény, mely $\mathbf{C}$ minden pontjában akárhányszor differenciálható, tetszőleges mátrixra értelmezve van annak spektrumán.

Mátrixfüggvény a Jordan-alakból

D Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ Jordan-felbontása $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}$, ahol $\mathbf{J} = \text{diag}(\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_k)$ a Jordan-féle normálalakja, és n_i jelöli a $\mathbf{J}_i$ blokk rendjét. Ekkor

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{C}f(\mathbf{J})\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C} \text{diag}(f(\mathbf{J}_1), \dots, f(\mathbf{J}_k))\mathbf{C}^{-1},$$

ahol

$$f(\mathbf{J}_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n_i-2)}(\lambda_i)}{(n_i-2)!} & \frac{f^{(n_i-1)}(\lambda_i)}{(n_i-1)!} \\ 0 & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \cdots & \cdots & \frac{f^{(n_i-2)}(\lambda_i)}{(n_i-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f'(\lambda_i) & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & f(\lambda_i) \end{bmatrix} \quad (4)$$

- Egyszerű képletbehelyettesítéssel $f(x) = x^3$ esetén

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} f(2) & f'(2) \\ 0 & f(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

- Az $f(x) = e^x$ függvény esetén, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ akkor } e^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^2 & e^2 & \frac{e^2}{2} \\ 0 & e^2 & e^2 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix} = e^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Általában a λ -hoz tartozó Jordan-blokkra

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \text{ esetén } e^{\mathbf{J}} = e^{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \dots & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \dots & \frac{1}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{1}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Mátrix exponenciális függvénye

P Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Határozzuk meg az $e^{\mathbf{A}}$ mátrixot!

M $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja

$$x^3 + 10x^2 + 32x + 32 = (x + 2)(x + 4)^2,$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{P}e^{\mathbf{J}}\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2e^4} \begin{bmatrix} e^2 + 1 & 2e^2 - 2 & e^2 - 1 \\ e^2 - 1 & 2e^2 & e^2 - 1 \\ 1 - e^2 & 2 - 2e^2 & 3 - e^2 \end{bmatrix}$$

P Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ mátrix Jordan-féle normálalakját, $\mathbf{J}$ -t, és az $\mathbf{A}^{100}$, $e^{\mathbf{J}}$, $e^{3\mathbf{A}}$ mátrixokat.

M $\chi(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 5)$. A 2-höz tartozó s.v.: $(1, 0, 0)$, a -5 -höz tartozó $(-9/7, 0, 1) \rightsquigarrow \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

A 2-höz tartozó másik általánosított sajátvektor:

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1, \text{ azaz } \begin{bmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ennek egy megoldása $\mathbf{x}_2 = (0, \frac{1}{3}, 0) \rightsquigarrow$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -9/7 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9/7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Mivel $(x^{100})' = 100x^{99}$, $(e^x)' = e^x$, $(e^{3x})' = 3e^{3x}$, ezért

$$J^{100} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 100 \cdot 2^{99} & 0 \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{bmatrix}, \quad e^J = \begin{bmatrix} e^2 & e^2 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-5} \end{bmatrix},$$

$$e^{3J} = \begin{bmatrix} e^6 & 3e^6 & 0 \\ 0 & e^6 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-15} \end{bmatrix}.$$

Innen az $A^{100} = CJ^{100}C^{-1}$ és $e^{3A} = Ce^{3J}C^{-1}$ felhasználásával

$$A^{100} = \begin{bmatrix} 2^{100} & 100 \cdot 3 \cdot 2^{99} & \frac{9}{7}(2^{100} - 5^{100}) \\ 0 & 2^{100} & 0 \\ 0 & 0 & 5^{100} \end{bmatrix},$$

$$e^{3A} = \begin{bmatrix} e^6 & 9e^6 & \frac{9}{7}(e^6 - e^{-15}) \\ 0 & e^6 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-15} \end{bmatrix}.$$