



Lineáris algebra mérnököknek

BMETE93BG20



Determinánsok

2019-10-25, 29



Wettl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK

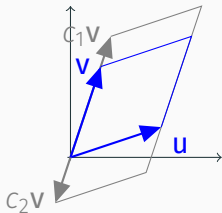
E lecke befejezése után a hallgató

- ki tudja számítani a determináns értékét háromféleképp is: elemi sorműveletekkel, sor vagy oszlop szerinti kifejtéssel, kígyók determinánsainak összegével,
- használni tudja a determinánst
 - egyenletrendszer egyértelmű megoldhatóságának eldöntésében,
 - a megoldás meghatározásában (Cramer-szabály),
 - az inverz kiszámításában,
 - a rang meghatározásában,
 - n darab n -dimenziós vektor függetlenségének eldöntésében.

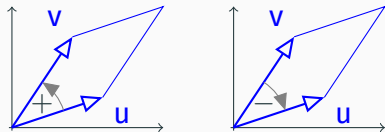
Motiváció

Paralelogramma előjeles területe

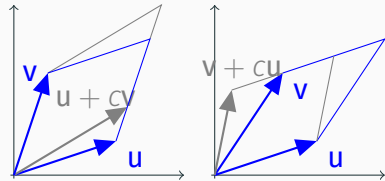
$$\hat{A} \quad f(cu, v) = cf(u, v), \text{ és } f(u, cv) = cf(u, v)$$



$$\hat{A} \quad f(u, v) = -f(v, u)$$



$$\hat{A} \quad f(u, v) = f(u + cv, v) = f(u, v + cu)$$



Determináns: sorvektorok függvénye

D **Determináns (elemi sorműveletekkel)**

Determináns az a valós négyzetes mátrixokon értelmezett skalár értékű függvény, amely

D1 értéke c -szeresére változik, ha egy sorát c -vel szorozzuk,

D2 -1 -szeresére változik különböző sorok fölcserélésekor,

D3 nem változik a hozzáadás sorművelete közben,

D4 az egységmátrixhoz 1 -et rendel.

J Az \mathbf{A} mátrix determinánsát $\det(\mathbf{A})$ vagy $|\mathbf{A}|$ jelöli.

m (sor)vektorok függvényeként is definiálható:

$$\det(\mathbf{I}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \det((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)) = \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3).$$

A determináns létezése

- m $D2$ elhagyható ($S_i \leftrightarrow S_j = S_i + S_j, S_j - S_i, -S_j, S_i - S_j$)
- m A definícióból nem látszik, hogy az így definiált függvény létezik-e. Ezt később bizonyítjuk.
- m Értéke Gauss-módszerrel (lépcsős vagy redukált lépcsős alakra hozással) kiszámolható.
- m A definíció kimondható és a definícióra épülő kiszámítási mód változtatás nélkül átvihető **tetszőleges testre!**
- m A determináns **egységelemes kommutatív nullosztómentes gyűrű (integritási tartomány) fölött** is definiálható, bár kiszámítása a Gauss-módszerrel nehézségekbe ütközik, mivel az osztás nem mindig végezhető el.
- Á **Egységelemes nullosztómentes kommutatív R gyűrű fölött** a fenti $D1$ – $D4$ feltételeket kielégítő függvény létezik és egyértelmű. (Később bizonyítjuk)

Zérus determináns

Á Ha egy mátrixnak van egy zérussora, akkor determinánása 0.

B szorozzuk egy sorát $c \neq 0$ -val

Á Ha egy mátrixnak van két azonos sora, akkor determinánása 0.

T **Mikor zérus egy determináns (ekvivalens állítások)**

1. $\det(\mathbf{A}) = 0$,
2. \mathbf{A} sorvektorai lineárisan összefüggők,
3. \mathbf{A} szinguláris,
4. a homogén lineáris $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása.

B ha egy vektora kifejezhető a többi lin kombjaként, akkor 0-sorba vihető

$$\text{P} \begin{vmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

T Determináns nem 0 volta és az egyenletrendszerek

Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ (\mathbb{F} test). Ekvivalens állítások:

- $\det \mathbf{A} \neq 0$,
- az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyrsz. $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{F}^n$ -re egyértelműen megoldható,
- az $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyrsz.-nek csak triviális megoldása van.

- A közelítéssel óvatosan:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix} = 1, \quad \text{és az} \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2^n}$$

- A véletlen valós mátrixok determinánsa 1 valószínűséggel nem 0, ha a mátrix elemeit valamely folytonos valószínűségeloszlás szerint választjuk.

A determináns értékének kiszámítása

- T** Az alsó vagy felső háromszögmátrix, s így a diagonális mátrix determinánsa megegyezik a főátlóbeli elemek szorzatával.
- K** **det kiszámítása:** elemi sorműveletekkel hozzuk a determinánst olyan alakra, melynek vagy van egy zérussora, vagy háromszög alakú.
- K** Ha létezik determinánsfüggvény, akkor az egyértelmű.
- B** hisz az előbb kiszámolt értéket veszi fel
- P** Pascal-háromszög:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Elemi mátrixok determinánása

Á a hozzáadás sorművelettel kapott elemi mátrix determinánása 1,

Á a sorcserével kapotté -1 ,

Á egy sor c -vel való szorzásával kapotté c ,

P például:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

Permutációk

D **Permutáció**: egy véges halmazt bijektív módon önmagára képező függvény.

Á Ha σ és τ az X halmaz permutációi, akkor kompozíciójuk is permutációja X -nek.

D ezt a σ és τ permutációk szorzatának hívunk: $\sigma\tau = \sigma \circ \tau$.

J Kétsoros jelölés:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \dots \text{ Általánosan:}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \sigma(x_1) & \sigma(x_2) & \cdots & \sigma(x_n) \end{pmatrix}.$$

J Egysoros jelölés: ha az elemek eredeti sorrendje adva van, pl. 24513. Általában: $\sigma(x_1) \sigma(x_2) \cdots \sigma(x_n)$.

D egy permutáló mátrix két sora *inverzióban* áll, ha az előbb álló sorbeli 1-es hátrébb van, mint a másik sorbeli

P
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
 inverzióinak száma például 4.

D Legyen σ az $X = \{1, 2, \dots, n\}$ halmaz egy permutációja. Azt mondjuk, hogy az $i, j \in X$ elemek inverzióban állnak, ha $i < j$, de $\sigma(i) > \sigma(j)$.

P A 3241 permutációban 4 inverzió van.

D Egy permutációt **párosnak** (**páratlannak**) nevezünk, ha inverzióinak száma páros (páratlan).

Permutáló mátrix determinánsa

- T** A permutáló mátrix determinánsa aszerint $+1$ vagy -1 , hogy inverzióban álló sorpárjainak száma páros vagy páratlan. (Ez megegyezik annak a permutációnak a paritásával, mely az 1-es elemek első indexeit a másodikba viszi.)
- B** Elég megmutatni, hogy egy sorcsere mindig megváltoztatja az inverziók számának paritását, vagyis azok száma párosból páratlanra, páratlanból párosra változik.
- Így ha egy permutáló mátrix inverzióinak száma páros, akkor csak páros sok sorcserével vihető az identikus mátrixba.
- Ha a két megcserélendő sor szomszédos, akkor a sorcsere pontosan eggyel változtatja az inverziók számát.
- Ezután cseréljük fel az i -edik és j -edik sorokat (legyen $i < j$). Ehhez összesen $2(j - i) - 1$ szomszédos sor cseréje szükséges, ami a paritást ellenkezőjére változtatja.

Mátrixműveletek és determináns

Á $A_{n \times n}$ márixra és tetszőleges c skalárra $\det(cA) = c^n \det(A)$

T $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

B $\det(EB) = \det(E) \det(B)$

Ha $\det A = 0$, akkor $\det(AB)$ is 0.

Legyen $A = E_1 E_2 \dots E_k$ az elemi mátrixok szorzatára bontás.

$\rightsquigarrow \det(A) \det(B) = \det(E_1) \det(E_2) \dots \det(E_k) \det(B) = \det(AB)$.

Á $\det(A) = \det(A^T)$.

B $A = E_1 E_2 \dots E_k R \rightsquigarrow |A^T| = |R^T E_k^T \dots E_2^T E_1^T| = |R^T| |E_k^T| \dots |E_2^T| |E_1^T|$.

Á Determináns könnyen számolható a PLU-ból.

A determináns additív minden sorban

T Additivitás az i -edik sorban:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{vmatrix}$$

B Ha az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \dots, \mathbf{a}_n$ vektorok lineárisan összefüggők, akkor $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| = |\mathbf{C}| = 0$, ha \mathbf{a}_i és \mathbf{b}_i függ a többitől, ugyanez.

Tfh $\mathbf{b}_i = b_1\mathbf{a}_1 + b_2\mathbf{a}_2 + \dots + b_i\mathbf{a}_i + \dots + b_n\mathbf{a}_n$. Ekkor

$$|\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + b_i|\mathbf{A}| = (1 + b_i)|\mathbf{A}| = |\mathbf{C}|.$$

K A determináns minden sorában „megtartja a lineáris kombinációt”.

B **additivitás** az i -edik sorban és az ún. **homogenitás** (D1) miatt!

Determináns: elemeinek függvénye

Additivitás használata

Mivel $(a, b, c) = (a, 0, 0) + (0, b, 0) + (0, 0, c)$ ezért

$$\begin{vmatrix} a+0+0 & 0+b+0 & 0+0+c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$



Determináns mint kígyók összege

T

Tétel

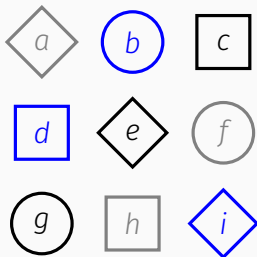
Minden n -edrendű determináns fölbomlik az összes belőle kiválasztható kígyó determinánsának összegére. Jelölje $d_{j_1 j_2 \dots j_n}$ (ennek értéke $+1$ vagy -1) annak a permutáló mátrixnak a determinánsát, mely az $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}$ elemekből álló kígyóhoz tartozik. Ekkor

$$\det([a_{ij}]) = \sum d_{j_1 j_2 \dots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

ahol az összegzés az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaz összes lehetséges $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ permutációján végigfut.

Sarrus-szabály

- P Sarrus-szabály: főátló-sodrásúak – mellékátló-sodrásúak.
Csak $n = 2$, $n = 3$ esetén érvényes!



Következmények

- K** **Determinánsfüggvény létezése** Egységelemes kommutatív nullosztómentes gyűrű fölötti determinánsfüggvény létezik, és egyértelmű.
- B** A kígyók összegére bontott képletről kell bizonyítani, hogy kielégítik a D1, D3, D4 axiómákat (a D2 köv. a többiből).
- Á** A determináns kiszámolásához **elég csak az összeadás és szorzás** művelete, az osztásra, melyet az elemi sorműveletek során használhatunk, nincs szükség. Így a determináns **folytonos**, sőt **differenciálható** függvénye elemeinek.
- Á** Egész számokból álló determináns értéke **egész szám**.
- m** A kígyók determinánsainak összegére bontás tételét nagyobb n -ek esetén nem használhatjuk a determináns kiszámítására, mert műveletigénye $n!$ -ral arányos.

Determináns rendjének csökkentése

- D Az n -edrendű $|A|$ determináns i -edik sorának és j -edik oszlopának elhagyásával kapott $(n - 1)$ -edrendű determináns $(-1)^{i+j}$ -szeresét az $|A|$ determináns a_{ij} eleméhez tartozó **előjeles aldeterminánsának** nevezzük.

+	-	+	-	+	-	+	-
-	+	-	+	-	+	-	+
+	-	+	-	+	-	+	-
-	+	-	+	-	+	-	+
+	-	+	-	+	-	+	-
-	+	-	+	-	+	-	+
+	-	+	-	+	-	+	-
-	+	-	+	-	+	-	+

- Á Ha az n -edrendű $|A|$ determináns a_{ij} elemének sorában vagy oszlopában minden további elem 0, A_{ij} az a_{ij} elemhez tartozó előjeles aldetermináns, akkor

$$|A| = a_{ij}A_{ij}.$$

B Legyen az $|A|$ det. i -edik sorában az a_{ij} -n kívül minden elem 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{1j} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{ij} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 = (-1)^{i-1} (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{2j} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 = (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{ij} A_{ij}.$$

P Számítsuk ki az alábbi determináns értékét!

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 8 & 4 \\ 6 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 8 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

M Ha tudjuk, csökkentjük a determináns rendjét:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 8 & 4 \\ 6 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 8 & 9 & \boxed{8} & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{4+3} \cdot 8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 8 & 4 \\ 6 & 0 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-8) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-8) \cdot (-1)^{2+3} \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \boxed{6} & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-8) \cdot (-5) \cdot (-1)^{2+1} \cdot 6 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-8) \cdot (-5) \cdot (-6) \cdot (-12) = 2880.$$

Kifejtési tétel

T Az n -edrendű $|\mathbf{A}|$ determináns értéke kifejezhető bármely sorának vagy oszlopának elemeivel és a hozzájuk tartozó előjeles aldeterminánsok segítségével. Az i -edik sora, illetve a j -edik oszlopa szerint kifejezve (kifejtve):

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik}, \text{ illetve } |\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kj}.$$

$$\mathbf{P} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

M Harmadik oszlop szerint érdemes:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1.$$

Cramer-szabály

$$J \quad A_{i,b} = [a_{*1} \ \dots \ a_{*,i-1} \ \mathbf{b} \ a_{*,i+1} \ \dots \ a_{*n}].$$

T Cramer-szabály egyenletrendszer megoldására

Az $Ax = b$ egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha $\det A \neq 0$, és ekkor

$$x_i = \frac{\det A_{i,b}}{\det A}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$B \quad Ae_j = a_{*j}, \text{ és } \det(I_{i,x}) = x_i, \text{ így}$$

$$\begin{aligned} A I_{i,x} &= A[e_{*1} \ \dots \ e_{*,i-1} \ x \ e_{*,i+1} \ \dots \ e_{*n}] \\ &= [Ae_{*1} \ \dots \ Ae_{*,i-1} \ Ax \ Ae_{*,i+1} \ \dots \ Ae_{*n}] \\ &= [a_{*1} \ \dots \ a_{*,i-1} \ \mathbf{b} \ a_{*,i+1} \ \dots \ a_{*n}] \\ &= A_{i,b} \end{aligned}$$

Példa a Cramer-szabályra

- Oldjuk meg az

$$2x + 5y = 4$$

$$5x + 3y = 6$$

egyenletrendszert a Cramer-szabállyal!

- $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -19$, $|A_{1,b}| = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -18$, $|A_{2,b}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -8$.

$$\text{Innen } x = \frac{-18}{-19} = \frac{18}{19}, y = \frac{-8}{-19} = \frac{8}{19}.$$

Inverz mátrix elemei

D **A (klasszikus) adjungáltja** $\text{adj } \mathbf{A} = [A_{ij}]^T$, ahol A_{ij} az a_{ij} -hez tartozó előjeles aldetermináns.

T **Mátrix inverze**

$$[A^{-1}]_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det \mathbf{A}}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} [A_{ij}]^T = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \text{adj } \mathbf{A}.$$

B $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$, azon belül az $\mathbf{Ax}_{*j} = \mathbf{e}_j$ megoldása (Cramer-szabály):

$$x_{ij} = \frac{\det \mathbf{A}_{i,e_j}}{\det \mathbf{A}}, \quad \text{ahol } \det \mathbf{A}_{i,e_j} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & 1 & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = A_{ji},$$

$$\rightsquigarrow x_{ij} = \frac{\det \mathbf{A}_{i,e_j}}{\det \mathbf{A}}.$$

P Számítsuk ki a szemléltetés céljából csupa különböző elemet tartalmazó következő mátrix inverzét!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

M Az $\text{adj } \mathbf{A}$ mátrix elemei determinánsok, az elhagyandó elemeket színessel jelöltük: $\text{adj } \mathbf{A} =$

$$\begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 5 & -8 & 4 \\ -4 & 6 & -3 \end{bmatrix}^T.$$

Mivel $\det \mathbf{A} = -1$, ezért $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \text{adj } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -5 & 4 \\ 3 & 8 & -6 \\ -1 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$

További következmények*

Á $\mathbf{A} \operatorname{adj} \mathbf{A} = \det(\mathbf{A})\mathbf{I}$ (szinguláris mátrixra is).

L **Kifejtés és ferde kifejtés** sorokra:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}A_{uk} = \begin{cases} \det \mathbf{A}, & \text{ha } i = u, \\ 0, & \text{ha } i \neq u, \end{cases}$$

oszlopokra:

$$\sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kv} = \begin{cases} \det \mathbf{A}, & \text{ha } j = v, \\ 0, & \text{ha } j \neq v. \end{cases}$$

B Ha az i -edik sor elemeit az u -adik sorhoz tartozó előjeles aldeterminánsokkal szorozzuk és $u \neq i$, akkor az u -adik sor elemeit nem használjuk, tehát szabadon megváltoztathatjuk: másoljuk az i -edik sort az u -adik helyébe. Ekkor

$\sum_{k=1}^n a_{ik}A_{uk} = \sum_{k=1}^n a_{uk}A_{uk}$, másrészt e mátrix kifejtését kaptuk, aminek van két azonos sora, tehát értéke 0.

További következmények 2

- K Az inverz mátrix minden eleme folytonos függvénye a mátrix minden elemének minden olyan helyen, ahol a determináns nem 0, azaz minden olyan helyen, ahol az inverz létezik.
- K Egy n -ismeretlenes n egyenletből álló egyenletrendszer megoldásvektorának minden koordinátája folytonos függvénye az egyenletrendszer együtthatóinak és a jobb oldalán álló vektor koordinátáinak, hisz a megoldás az inverzzel való szorzással megkapható.
- K Egészelemű mátrix inverze pontosan akkor egészelemű, ha determinánsa 1 vagy -1 ($\det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{A}^{-1}) = \det \mathbf{I} = 1$).

Vandermonde-determináns

D Vandermonde-determináns

x_1, x_2, \dots, x_n számokhoz tartozó Vandermonde-determináns

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

T Vandermonde-determináns értéke

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i < j} (x_j - x_i).$$

B Az utolsó előtti oszlop x_1 -szeresésével elimináljuk az utolsó oszlop első elemét, majd az $n - 2$ -edik oszloppal az $n - 1$ -edik első elemét...

$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1x_2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1x_n & \dots & x_n^{n-1} - x_1x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1x_2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1x_n & \dots & x_n^{n-1} - x_1x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \dots (x_n - x_1) V_{n-1}(x_2, \dots, x_n)$$

$$= V_{n-1}(x_2, \dots, x_n) \prod_{1 < j} (x_j - x_1).$$

Blokkháromszög-mátrixok determinánása

T Ha A és D négyzetes mátrixok, akkor $\begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D|$.

B E determinánsok kigyók determinánsainak összegére bontása megegyezik az A és D ilyen felbontásának szorzatával.

T Ha $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ azonos méretű és egymással **fölcserélhető** részmatrixokra particionálható és A invertálható, akkor $|M| = |AD - BC|$.

B Trükk

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

Blokkmátrixok determinánsa*

T Legyen $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, ahol A és D négyzetes mátrixok. Ekkor

Ha $|A| \neq 0$, akkor $|M| = |A||D - CA^{-1}B|$.

Ha $|D| \neq 0$, akkor $|M| = |A - BD^{-1}C||D|$.

B Trükk

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ CA^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ O & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ D^{-1}C & I \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Determináns és rang

T Egy $\mathbf{M}_{m \times n}$ mátrix r rangja megegyezik

- a belőle kiválasztható legnagyobb méretű nonszinguláris négyzetes mátrix rendjével,
- a belőle kiválasztható legnagyobb méretű nemnulla aldetermináns rendjével.

B Sor és oszlopműveletek közben a rang nem változik. A rang megegyezik a maximális független sorok, illetve oszlopok számával.

Válasszunk ki r független sort és oszlopot, kereszteződésükben áll az \mathbf{A} mátrix. Sorcseréssel és oszlopcseréssel vigyük a bal felső sarokba. Tehát léteznek olyan \mathbf{P}_1 és \mathbf{P}_2 permutáló mátrixok, hogy

$$\mathbf{M}' = \mathbf{P}_1 \mathbf{M} \mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}.$$

Determináns és rang 2

- A invertálható, mert M' első r sorára vonatkozó elemi sorműveletekkel I -be vihető, így determinánsa nem 0.
- Léteznek olyan invertálható $m \times m$ -es Q_1 és $n \times n$ -es Q_2 mátrixok, hogy

$$Q_1 P_1 M P_2 = \begin{bmatrix} A & B \\ O & O \end{bmatrix}, \quad Q_1 P_1 M P_2 Q_2 = \begin{bmatrix} A & O \\ O & O \end{bmatrix}.$$

- Végül, ha bármely $(r+1) \times (r+1)$ -es Y részmátrixot tekintjük M -ben, annak oszlopai és sorai lineárisan összefüggők, így Y -ban is.
- A determinánsokról szóló állítás következik az előzőkből.

Összefoglalás

- A determináns fogalma a paralelogramma előjeles területe, illetve a paralelepipedon előjeles térfogata fogalmának általánosítása tetszőleges test (vagy egységelemes kommutatív nullosztómentes gyűrű) fölötti $n \times n$ -es mátrixokra. Ekkor úgy tekintünk a determinánusra, mint sorvektorainak függvényére.
- Fogalma definiálható az elemi sorműveletekkel, hozzáátéve, hogy az egységmátrix determinánusa 1. (és ezzel ki is számolható)
- A determináns kifejezhető elemeinek függvényeként is, ami abból adódik, hogy minden determináns fölbonlik a belőle kiválasztható kigyók determinánsainak összegére. Ugyancsak e felbontás vezet a sor, illetve oszlop szerinti kifejtéshez.
- Még: egyenletrendszer megoldása (Cramer-szabály); mátrix inverze elemei függvényeként; tetszőleges méretű mátrix rangja a minorok segítségével; Vandermonde-determináns.