BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Lineáris algebra mérnököknek

BMETE93BG20

Mátrixműveletek

2019-10-11

Wettl Ferenc
ALGEBRA TANSZÉK

Mátrixműveletek definíciói

Célok

E lecke befejezése után a hallgató

- el tudja végezni a mátrixok közti alapműveleteket és az invertálást,
- fel tudja írni a mátrixszorzást szumma-jelek segítségével,
- fel tudja írni az egyenletrendszert, a lineáris helyettesítést, egy vektor koordinátás alakját egy másik bázisban mátrixszorzás segítségével,
- ki tudja számolni egy mátrix bázisfelbontását és LU-felbontását,
- alkalmazni tudja a mátrixműveletek algebrai tulajdonságait, beleértve a speciális típusú mátrixok (elemi mátrixok, kígyók, permutáló mátrixok, háromszögmátrixok, szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok…) egyéni tulajdonságait,

Mátrixműveletek definíciói

Műveletek táblázatokkal

Összeadás

- A valós számok közti műveletek természetes módon kiterjeszthetők mátrixokkal való műveletekké.
- Ezek definícióihoz az összeadás és a szorzás hétköznapi alkalmazásainak táblázatokra való kiterjesztésén keresztül fogunk eljutni.
- 3 alma meg 2 alma az 5 alma
- Azonos méretű, azonos fejlécű táblázatok összeadásának egy lehetséges módja:

	alma (db)	szőlő (fürt)
piros	3	2
zöld	2	1

$+$

	alma (db)	szőlő (fürt)
piros	2	2
zöld	0	1

$=$

	alma (db)	szőlő (fürt)
piros	5	4
zöld	2	2

Szorzás számmal

- Az asztalon 2 alma van. Ha számukat megháromszorozzuk, összeszorzunk egy mértékegység nélküli számot (3) egy mértékegységgel rendelkezővel (2 darab).
- Ezt megtehetjük egy kosár egész tartalmával is:

$$3 \cdot \begin{array}{lcc} & \text{alma (db)} & \text{szőlő (fürt)} \\ \hline \text{piros} & 3 & 2 \\ \text{zöld} & 2 & 1 \end{array} = \begin{array}{lcc} & \text{alma (db)} & \text{szőlő (fürt)} \\ \hline \text{piros} & 9 & 6 \\ \text{zöld} & 6 & 3 \end{array}$$

Táblázatok szorzása

- Egy adag (10 dkg) alma energiatartalma 30 kcal, 5 adag energiatartalma

$$5\,\text{adag} \cdot 30\,\frac{\text{kcal}}{\text{adag}} = 150\,\text{kcal}.$$

- Gyümölcssaláták (A, B, C), gyümölcsök (alma, banán, narancs), tartalmuk (szénhidrát- és energiatartalom).
- Két táblázat: a sorokba kerülnek azok a tételek, melyek tartalmát az oszlopokban részletezzük:

	Alma (adag)	Banán (adag)	Narancs (adag)
A	5	1	4
B	4	4	2
C	4	2	4

	Szénhidrát (g/adag)	Energia (kcal/adag)
Alma	7	30
Banán	24	105
Narancs	8	40

Táblázatok szorzása (folytatás)

- Az A saláta energiatartalma:

$$5\,\text{adag}\cdot 30\,\frac{\text{kcal}}{\text{adag}}+1\,\text{adag}\cdot 105\,\frac{\text{kcal}}{\text{adag}}+4\,\text{adag}\cdot 40\,\frac{\text{kcal}}{\text{adag}}=415\,\text{kcal},$$

	Szénhidrát (g/adag)	Energia (kcal/adag)
Alma	7	30
Banán	24	105
Narancs	8	40

	Alma (adag)	Banán (adag)	Narancs (adag)
A	5	1	4
B	4	4	2
C	4	2	4

	Szénhidrát (g)	Energia (kcal)
A	91	415
B	140	620
C	108	490

Lineáris helyettesítés

D **Lineáris helyettesítés**

Lineáris helyettesítésről beszélünk, ha változók egy halmazát más változók konstansszorosainak összegeként állítjuk elő.

- Legyen pl.

$$\begin{aligned} a &= 5x + y + 4z \\ b &= 4x + 4y + 2z \\ c &= 4x + 2y + 4z \end{aligned} \quad \text{és} \quad \begin{aligned} x &= 7s + 30k \\ y &= 24s + 105k \\ z &= 8s + 40k \end{aligned}$$

- Egy pillanatra visszalépünk (táblázatosítunk)

	x	y	z
a	5	1	4
b	4	4	2
c	4	2	4

	s	k
x	7	30
y	24	105
z	8	40

Lineáris helyettesítések kompozíciója

- kompozíció: egymás után való elvégzés
- Az $a = 5x + y + 4z$ kifejezésben helyettesítsük x, y és z helyébe a második lineáris helyettesítés szerinti kifejezéseket

$$a = 5x+y+4z = 5(7s+30k)+(24s+105k)+4(8s+40k) = 91s+415k.$$

- Pl. k együtthatója: $5 \cdot 30 + 1 \cdot 105 + 4 \cdot 40 = 415$.

	s	k
x	7	30
y	24	105
z	8	40

	x	y	z
a	5	1	4
b	4	4	2
c	4	2	4

	s	k
a	91	415
b	140	620
c	108	490

Mátrixműveletek definíciói

Mátrixűveletek

Mátrixok

- S fölötti $m \times n$ típusú mátrixok tere $S^{m \times n}$ vagy $\mathrm{M}_{m \times n}[S]$, ahol S egy halmaz (pl. $S = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}...$)
- Két mátrixot akkor tekintünk egyenlőnek, ha azonos típusúak, és az azonos indexű elemek egyenlőek.
- Például

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

- négyzetes mátrix, főátló, diagonális mátrix,

$$\mathrm{diag}(1, 2, 3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Elemenkénti mátrixműveletek

- $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ azonos típusúak:

  $$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij}] + [b_{ij}] := [a_{ij} + b_{ij}], \quad \mathbf{A} - \mathbf{B} = [a_{ij}] - [b_{ij}] := [a_{ij} - b_{ij}].$$

- Zérusmátrix: $\mathbf{O}_{m\times n}$, $\mathbf{O}_n$
- c skalárral szorzás

  $$c\mathbf{A} = c[a_{ij}] := [ca_{ij}].$$

-  $\circledcirc$  $=$ 
- Mátrixokra is definiálhatjuk a lineáris kombináció, a lineáris függetlenség és a kifeszített altér fogalmát.

Mátrixszorzás

D Egy $m \times t$-s $\mathbf{A}$ és egy $t \times n$-es $\mathbf{B}$ mátrix szorzatán azt az $\mathbf{AB}$-vel jelölt $m \times n$-es $\mathbf{C}$ mátrixot értjük, amelynek i-edik sorában és j-edik oszlopában álló eleme

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} + \ldots + a_{it}b_{tj} = \sum_{k=1}^{t} a_{ik}b_{kj} = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{b}_{*j}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{tj} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{it} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{ij} \end{bmatrix} \end{array}$$

$\mathbf{A}$ $\quad$ $\mathbf{B}$

$m \times s$ $\quad$ $t \times n$

feltéve, hogy $s = t$

$\mathbf{AB}$ típusa $m \times n$

Műveletek blokkmátrixokkal

- Hatalmas méretű mátrixokkal végzett műveletek párhuzamosíthatók, és a memóriakezelésük is hatékonyabbá válik, ha a mátrixokat vízszintes és függőleges vonallal részmátrixokra, ún. blokkokra osztjuk.
- Ha A és B azonos típusú, azonos módon particionált blokkmátrix, akkor

$$c[\mathsf{A}_{ij}] := [c\mathsf{A}_{ij}], \qquad [\mathsf{A}_{ij}] + [\mathsf{B}_{ij}] := [\mathsf{A}_{ij} + \mathsf{B}_{ij}].$$

- Ha $\mathsf{A} = [\mathsf{A}_{ik}]_{m\times t}$, $\mathsf{B} = [\mathsf{B}_{kj}]_{t\times n}$ két blokkmátrix, és minden k-ra az A_{ik} blokk oszlopainak száma megegyezik B_{kj} sorainak számával, akkor a $\mathsf{C} = \mathsf{AB}$ szorzatra

$$\mathsf{C}_{ij} = \sum_{k=1}^{t} \mathsf{A}_{ik}\mathsf{B}_{kj}.$$

Műveletek blokkmátrixokkal

P Számítsuk ki a $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} 1 & 4 \\ \hline 1 & 1 \\ 6 & 0 \end{array}\right]$ mátrixot!

M

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 2 & 6 \\ \hline 4 & 6 \\ 9 & 7 \end{array}\right]$$

Mátrixműveletek definíciói

A mátrixszorzás használata

Skaláris szorzat és diadikus szorzat mátrixszorzatos alakja

- $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, ekkor
$$\mathbf{a}^\top \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$
- $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Az $\mathbf{u}\mathbf{v}^\top$ szorzatot a két vektor diadikus szorzatának, röviden diádnak nevezzük. E szorzat egy $m \times n$-es mátrix:
$$\mathbf{u}\mathbf{v}^\top = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \dots & u_1v_n \\ u_2v_1 & u_2v_2 & \dots & u_2v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_mv_1 & u_mv_2 & \dots & u_mv_n \end{bmatrix}.$$
- $\mathbf{u} = (1, 0, 2)$, $\mathbf{v} = (3, 2, 1)$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ?$, $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = ?$
$$\mathbf{u}^\top\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 5, \ \ \mathbf{u}\mathbf{v}^\top = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Lineáris egyenletrendszer mátrixszorzatos alakja

- Ha A jelöli egy egyenletrendszer együtthatómátrixát, illetve $\mathbf{b}$ a konstans tagok és $\mathbf{x}$ az ismeretlenek oszlopvektorát, azaz

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

akkor az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ & a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n = \ b_1 \\ a_{21}x_1 + \ & a_{22}x_2 + \ldots + \ a_{2n}x_n = \ b_2 \\ \vdots \qquad & \ \ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned}$$

egyenletrendszer $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ alakba írható.

- $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5,$ $\qquad \begin{aligned} ax \quad &= u \\ by \quad &= v \\ cz &= w \end{aligned}$ $\qquad$ és $\qquad \begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ y &= 1 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$
- mátrixszorzatos alakjaik rendre:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 5, \quad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- A szimultán egyenletrendszerek $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ alakba írhatók, pl.:

$$\begin{aligned} 2x_{11} + 3x_{21} &= 7 \qquad & 2x_{12} + 3x_{22} &= 9 \\ 3x_{11} - 4x_{21} &= 2 \qquad & 3x_{12} - 4x_{22} &= 5 \end{aligned}$$

- $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$

Lineáris helyettesítés mátrixszorzatos alakja

- Hasonlóan az egyenletrendszer mátrixszorzatos alakjához, pl.:

$$\begin{aligned} x &= 3a + 2b + 4c \\ y &= a - 3b + 2c \\ z &= 2a - b + 2c \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Á

Mátrixszorzás és lineáris kombináció

Legyen $\mathbf{A}$ $m \times n$*-es mátrix,* $\mathbf{x}$ n*-dimenziós,* $\mathbf{y}$ m*-dimenziós vektor. Ekkor az* $\mathbf{Ax}$ *szorzat az* $\mathbf{A}$ *oszlopvektorainak*

$$\mathbf{a}_{*1}x_1 + \mathbf{a}_{*2}x_2 + \cdots + \mathbf{a}_{*n}x_n$$

lineáris kombinációját, míg az $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ *szorzat az* $\mathbf{A}$ *sorvektorainak*

$$\mathbf{a}_{1*}y_1 + \mathbf{a}_{2*}y_2 + \cdots + \mathbf{a}_{m*}y_m$$

lineáris kombinációját adja.

Szorzás standard egységvektorral

Á **Mátrix elemeinek, sor- és oszlopvektorainak előállítása**

Legyen $\mathbf{A}$ *egy* $m \times n$*-es mátrix,* $\mathbf{e}_i$ m*-dimenziós,* $\mathbf{e}_j$ n*-dimenziós standard egységvektor. Ekkor*

$$\mathbf{e}_i^\mathsf{T}\mathbf{A} = \mathbf{a}_{i*},\ \mathbf{A}\mathbf{e}_j = \mathbf{a}_{*j},\ \textit{továbbá}\ \mathbf{e}_i^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i^\mathsf{T}\mathbf{A})\mathbf{e}_j = a_{ij}.$$

Az $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^\mathsf{T}$ diád (i,j)-indexű eleme 1, az összes többi 0:

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

A báziscsere mátrixszorzatos alakja

P Áttérés standard bázisra: $\mathcal{B} = \{\,(1,2,3),(0,2,3),(3,5,8)\,\}$ az $\mathbb{R}^3$ egy bázisa. Írjuk fel $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ standard bázisbeli koordinátás alakját egyetlen mátrixszorzással. (Pl. $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (3,2,-1)$)

M $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (3,2,-1)$ azt jelenti, hogy

$$\mathbf{v} = 3\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3\\5\\8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\5\\7\end{bmatrix}, \text{ azaz } \mathbf{v} = \begin{bmatrix}1&0&3\\2&2&5\\3&3&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\5\\7\end{bmatrix}.$$

Legyen $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (x,y,z)$. Ekkor

$$\mathbf{v} = x\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}3\\5\\8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&3\\2&2&5\\3&3&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}.$$

D

Áttérés mátrixa

Legyen $\mathcal{B} = \{ \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n \}$ a $\mathcal{V}$ egy bázisa és $\mathcal{C}$ egy $\mathcal{V}$-t tartalmazó vektortér egy bázisa (pl. a $\mathcal{V}$ vektortéré). Az

$$\mathbf{T}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = [\, [\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} \mid [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} \mid \cdots \mid [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}} \,]$$

mátrixot a $\mathcal{B}$ bázisról a $\mathcal{C}$-re való áttérés mátrixának nevezzük.

Á

Koordináták változása a bázis cseréjénél

Ha $\mathcal{B}$ a $\mathcal{V}$ vektortér bázisa, és $\mathcal{C}$ egy $\mathcal{V}$-t tartalmazó tér bázisa, akkor bármely $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektorra

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \mathbf{T}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}.$$

B Legyen $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. A koordinátás alak jelentése szerint

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{b}_1 + v_2\mathbf{b}_2 + \ldots + v_n\mathbf{b}_n.$$

Ennek koordinátás alakja a $\mathcal{C}$ bázisban

$$\begin{aligned}
[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} &= v_1[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} + v_2[\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} + \ldots + v_n[\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}} \\
&= [\,[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} \mid [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} \mid \cdots \mid [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}}\,]\,[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} \\
&= \mathbf{T}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}.
\end{aligned}$$

P $\mathcal{E}$ az $\mathbb{R}^4$ standard bázisa, és $\mathcal{B} = \{(1,1,0,-2),(2,3,3,-2)\}$. vektorok által kifeszített altér. Írjuk fel az $\mathsf{T}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$ mátrixot és adjuk meg a $(-1,1)_{\mathcal{B}}$ és a $(-3,2)_{\mathcal{B}}$ vektorok $\mathcal{E}$-beli koordinátás alakját!

M Az áttérés mátrixa

$$\mathsf{T}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = [\,[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{E}} \mid [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{E}}\,] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Így a két vektor koordinátás alakja a standard bázisban

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Á **Bázisfelbontás**

Legyen $\mathbf{A}$ *redukált lépcsős alakja a zérussorok nélkül* $\mathbf{R}$*, az* $\mathbf{A}$ *főszlopaiból álló mátrix* $\mathbf{B}$*. Ekkor* $\mathbf{A} = \mathbf{BR}$.

P Írjuk fel az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ bázisfelbontását!

B Redukált lépcsős alak: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Innen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{BR}.$

Teljes rangú mátrixok

D Az $\mathbf{A}$ mátrix teljes sorrangú, ha sorvektorai függetlenek, teljes oszloprangú, ha oszlopvektorai függetlenek.

- Ez azt jelenti, hogy egy mátrix teljes sorrangú, ha rangja megegyezik sorainak számával, illetve teljes oszloprangú, ha rangja megegyezik oszlopainak számával.
- A bázisfelbontás egy mátrixot egy teljes oszloprangú és egy teljes sorrangú mátrix szorzatára bont!

D Az $\mathbf{A}$ mátrix teljes rangú, ha teljes sorrangú vagy teljes oszloprangú.

Egységmátrix, elemi mátrixok

- $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.
- Az $n \times n$-es $\mathbf{I}_n := \operatorname{diag}(1, 1, \dots, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ mátrixot egységmátrixnak nevezzük.
- Az $\mathbf{I}_n$ egységmátrixon végrehajtott egyetlen elemi sorművelettel kapott mátrixot elemi mátrixnak nevezzük.
- Az alábbi mátrixok elemi mátrixok:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Szorzás elemi mátrixszal

- Mit veszünk észre az alábbi szorzások eredményén?

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 5a_{21} & 5a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + 2a_{31} & a_{12} + 2a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix}.$$

Elemi sorművelet mátrixszorzással

Á Legyen $\mathbf{E}$ az az elemi mátrix, melyet $\mathbf{I}_m$-ből egy elemi sorművelettel kapunk. Ha ugyanezt a sorműveletet egy tetszőleges $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrixra alkalmazzuk, akkor eredményül az $\mathbf{EA}$ mátrixot kapjuk.

Homogén lin. egyrsz. megoldásai blokkmátrixszorzat alakban

P Egy homogén lin. egyenletrendszer és redukált lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{7} \\ 0 & 1 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}.$$

- A megoldások lineáris kombinációk, így mátrixszorzat alakba is felírhatók:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-7} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}.$$

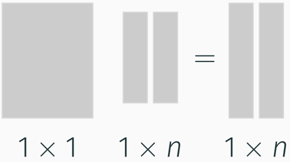
Á Ha $\mathsf{A} \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $\mathrm{r}(\mathsf{A}) = r$, $\mathbf{rref}(\mathsf{A}) = [\mathsf{I}|\mathsf{S}]_{r\times n}$, akkor

$$\mathcal{N}(\mathsf{A}) = \left\{ \left[\begin{array}{c} -\mathsf{S} \\ \hline \mathsf{I} \end{array}\right] \mathbf{t} \;\middle|\; \mathbf{t} \in \mathbb{F}^{n-r} \right\}.$$

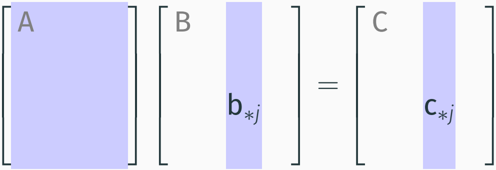
$m \times 1 \quad 1 \times n \quad m \times n$

$$\mathsf{AB} = \begin{bmatrix} \mathsf{a}_{1*} \\ \hline \mathsf{a}_{2*} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathsf{a}_{m*} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c} \mathsf{b}_{*1} & \dots & \mathsf{b}_{*n} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathsf{a}_{1*}\mathsf{b}_{*1} & \mathsf{a}_{1*}\mathsf{b}_{*2} & \dots & \mathsf{a}_{1*}\mathsf{b}_{*n} \\ \mathsf{a}_{2*}\mathsf{b}_{*1} & \mathsf{a}_{2*}\mathsf{b}_{*2} & \dots & \mathsf{a}_{2*}\mathsf{b}_{*n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathsf{a}_{m*}\mathsf{b}_{*1} & \mathsf{a}_{m*}\mathsf{b}_{*2} & \dots & \mathsf{a}_{m*}\mathsf{b}_{*n} \end{bmatrix}.$$

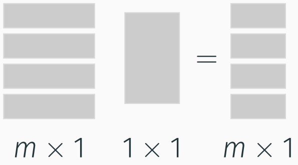
Particionálás: [mátrix] · [oszlopvektorok]



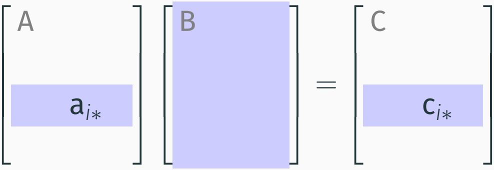
$$C = AB = A \left[\begin{array}{c|c|c|c} b_{*1} & b_{*2} & \ldots & b_{*n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} Ab_{*1} & Ab_{*2} & \ldots & Ab_{*n} \end{array}\right]$$



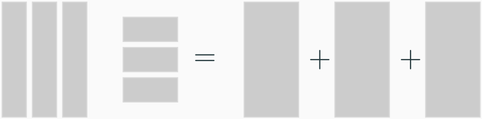
Particionálás: [sorvektorok] · [mátrix]



$$C = AB = \left[\begin{array}{c} a_{1*} \\ \hline a_{2*} \\ \hline \vdots \\ \hline a_{m*} \end{array}\right] B = \left[\begin{array}{c} a_{1*}B \\ \hline a_{2*}B \\ \hline \vdots \\ \hline a_{m*}B \end{array}\right]$$



Particionálás: [oszlopvektorok] · [sorvektorok], diádok összege



$1 \times t$ $\quad$ $t \times 1$

$$\mathbf{AB} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{a}_{*1} & \dots & \mathbf{a}_{*t} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{b}_{1*} \\ \hline \mathbf{b}_{2*} \\ \hline \dots \\ \hline \mathbf{b}_{t*} \end{array}\right] = \mathbf{a}_{*1}\mathbf{b}_{1*} + \mathbf{a}_{*2}\mathbf{b}_{2*} + \dots + \mathbf{a}_{*t}\mathbf{b}_{t*}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

A szorzat oszlopai és sorai

Á Az $\mathbf{AB}$ mátrix minden oszlopa az $\mathbf{A}$ oszlopainak lineáris kombinációja, és minden sora a $\mathbf{B}$ sorainak lineáris kombinációja.

B Az $\mathbf{AB}$ mátrix j-edik oszlopa

$$(\mathbf{AB})_{*j} = \mathbf{A}\mathbf{b}_{*j} = \mathbf{a}_{*1}b_{1j} + \mathbf{a}_{*2}b_{2j} + \ldots + \mathbf{a}_{*t}b_{tj}$$

az i-edik sora pedig

$$(\mathbf{AB})_{i*} = \mathbf{a}_{i*}\mathbf{B} = a_{i1}\mathbf{b}_{1*} + a_{i2}\mathbf{b}_{2*} + \ldots + a_{it}\mathbf{b}_{t*},$$

Mátrixműveletek és rang

Á $\mathrm{r}(\mathsf{AB}) \leqslant \mathrm{r}(\mathsf{A})$ és $\mathrm{r}(\mathsf{AB}) \leqslant \mathrm{r}(\mathsf{B})$, így

$$\mathrm{r}(\mathsf{AB}) \leqslant \min\left(\mathrm{r}(\mathsf{A}), \mathrm{r}(\mathsf{B})\right).$$

B Az AB mátrix minden oszlopa az A oszlopainak lineáris kombinációja $\rightsquigarrow \mathcal{O}(\mathsf{AB}) \leqslant \mathcal{O}(\mathsf{A}) \rightsquigarrow \mathrm{r}(\mathsf{AB}) \leqslant \mathrm{r}(\mathsf{A})$.

Hasonlóan az AB minden sora a B sorainak lineáris kombinációja $\rightsquigarrow \mathcal{S}(\mathsf{AB}) \leqslant \mathcal{S}(\mathsf{B}) \rightsquigarrow \mathrm{r}(\mathsf{AB}) \leqslant \mathrm{r}(\mathsf{B})$.

Á $\mathrm{r}(\mathsf{A}+\mathsf{B}) \leqslant \mathrm{r}(\mathsf{A}) + \mathrm{r}(\mathsf{B})$

B $\mathcal{S}(\mathsf{A}+\mathsf{B}) \leqslant \mathrm{span}(\mathcal{S}(\mathsf{A}) \cup \mathcal{S}(\mathsf{B}))$, az utóbbinak van $\mathrm{r}(\mathsf{A}) + \mathrm{r}(\mathsf{B})$ elemű generátorrendszere $\rightsquigarrow$

\- $\mathrm{r}(\mathsf{A}+\mathsf{B}) = \dim(\mathcal{S}(\mathsf{A}+\mathsf{B})) \leqslant \dim(\mathrm{span}(\mathcal{S}(\mathsf{A}) \cup \mathcal{S}(\mathsf{B}))) \leqslant \mathrm{r}(\mathsf{A}) + \mathrm{r}(\mathsf{B})$

Mátrixműveletek algebrája

Mátrixműveletek algebrája

Az alapműveletek tulajdonságai

Az összeadás és a skalárral való szorzás tulajdonságai

Legyenek a következőkben szereplő mátrixok egy egységelemes kommutatív R gyűrű fölötti mátrixok.

- $\mathsf{A} + \mathsf{B} = \mathsf{B} + \mathsf{A}$,
- $\mathsf{A} + (\mathsf{B} + \mathsf{C}) = (\mathsf{A} + \mathsf{B}) + \mathsf{C} = \mathsf{A} + \mathsf{B} + \mathsf{C}$,
- $c(\mathsf{A} + \mathsf{B}) = c\mathsf{A} + c\mathsf{B}$, $(c + d)\mathsf{A} = c\mathsf{A} + d\mathsf{A}$.

Mire vigyázzunk a mátrixszorzásnál?

- A mátrixszorzás nem kommutatív, azaz $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ nem áll fenn bármely két összeszorozható mátrixra.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{de} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Ha $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, akkor az $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ feltétel kevés ahhoz, hogy a $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ következtetésre jussunk.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{de} \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Az $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$-ból nem következik, hogy $\mathbf{A}$ vagy $\mathbf{B}$ a nullmátrix.

D Nullosztó: egy alg. strukt. $a \neq 0$ eleme, melyhez $\exists\, b \neq 0$, hogy $ab = 0$. ($\mathbb{R}$-ben nincs, $\mathbb{Z}_m$-ben van, ha m nem prím.)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A szorzás tulajdonságai

Á $A(BC) = (AB)C$ csoportosíthatóság, asszociativitás

- $A(B + C) = AB + AC$ disztributivitás
- $(A + B)C = AC + BC$ disztributivitás
- $(cA)B = c(AB) = A(cB)$
- $A_{m\times n}O_{n\times t} = O_{m\times t}$ szorzás nullmátrixszal
- $I_mA_{m\times n} = A_{m\times n}I_n = A_{m\times n}$ szorzás egységmátrixszal

Az asszociativitás bizonyítása

B Ha az egyenlőség egyik oldalán kijelölt szorzások elvégezhetők, akkor a másik oldalon is. ($\mathsf{A}_{m\times s}$, $\mathsf{B}_{u\times v}$, $\mathsf{C}_{t\times n} \rightsquigarrow s = u$, $v = t$)

- Elég sorvektor alakú A és oszlopvektor C-re bizonyítani, ui.

$$((\mathsf{AB})\mathsf{C})_{ij} = (\mathbf{a}_{i*}\mathsf{B})\mathbf{c}_{*j}, \quad (\mathsf{A}(\mathsf{BC}))_{ij} = \mathbf{a}_{i*}(\mathsf{B}\mathbf{c}_{*j}).$$

- $$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{m} a_k b_{k1} & \sum_{k=1}^{m} a_k b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{m} a_k b_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_k b_{kl} c_l.$$

- $$\begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^{n} b_{1l} c_l \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^{n} b_{ml} c_l \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{m} a_k \left(\sum_{l=1}^{n} b_{kl} c_l \right) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_k b_{kl} c_l.$$

Asszociativitás következményei

- Több mátrix szorzatát nem kell zárójelezni.
- Ha $\mathbf{D} = \mathbf{ABC}$, akkor

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{ik} b_{kl} c_{lj}.$$

- A fizikusok által használt Einstein-konvenció: az indexelt változók szorzatainak összegében a szumma jelek feleslegesek, hisz azokra az indexekre kell összegezni, amelyek legalább kétszer szerepelnek, míg az egyszer szereplőkre nem:

$$d_{ij} = a_{ik} b_{kl} c_{lj}.$$

Mátrix hatványozása

D $A^1 := A$ és $A^{k+1} := A^k A$, itt $A \in R^{n\times n}$, ahol R tetszőleges gyűrű

m csak négyzetes mátrixok szorozhatók önmagukkal

Á $A^k A^m = A^{k+m}$

- $(A^k)^m = A^{km}$

K $A^0 =?$

- precedencia-elv:

$$A^k A^0 = A^{k+0} = A^k.$$

D $A^0 = I_n$

Hatvány kiszámítása

P $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathsf{A}^n = ?$

M $\mathsf{A}^2 = \mathsf{I} \rightsquigarrow \mathsf{A}^{2k} = \mathsf{I}_2$ és $\mathsf{A}^{2k+1} = \mathsf{A}$.

P $\mathsf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & a \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $\lim\limits_{k\to\infty} \mathsf{B}^k = ?$

M $\mathsf{B}^k = \begin{bmatrix} \frac{1}{2^k} & \frac{k}{2^{k-1}}a \\ 0 & \frac{1}{2^k} \end{bmatrix}$ (teljes indukcióval!) $\rightsquigarrow \lim\limits_{k\to\infty} \mathsf{B}^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathsf{O}$.

P Legyen $\mathsf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix}$. Mennyi $p(\mathsf{C})$, ha $p(x) = x^3 + 2x^2 - 1$?

M $p(\mathsf{C}) = \mathsf{C}^3 + 2\mathsf{C}^2 - \mathsf{I} =$

$$\begin{bmatrix} 9 & 8 & -14 \\ 8 & 7 & -12 \\ 14 & 12 & -21 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -4 & -4 & 7 \\ -4 & -3 & 6 \\ -7 & -6 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

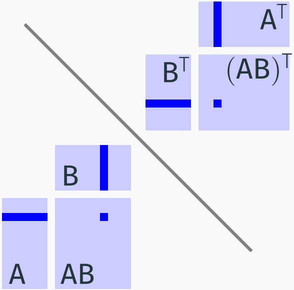
A transzponálás tulajdonságai

Á $(\mathsf{A}^\mathsf{T})^\mathsf{T} = \mathsf{A}$,

- $(\mathsf{A} + \mathsf{C})^\mathsf{T} = \mathsf{A}^\mathsf{T} + \mathsf{C}^\mathsf{T}$,
- $(c\mathsf{A})^\mathsf{T} = c\mathsf{A}^\mathsf{T}$,
- $(\mathsf{AB})^\mathsf{T} = \mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{A}^\mathsf{T}$,

$$\left((\mathsf{AB})^\mathsf{T}\right)_{ij} = (\mathsf{AB})_{ji} = (\mathsf{A})_{j*}\,(\mathsf{B})_{*i}\,.$$

$$\left(\mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{A}^\mathsf{T}\right)_{ij} = \left(\mathsf{B}^\mathsf{T}\right)_{i*}\left(\mathsf{A}^\mathsf{T}\right)_{*j} \stackrel{*}{=} (\mathsf{A})_{j*}\,(\mathsf{B})_{*i}\,.$$



Mátrixszorzás inverze – mátrixok osztása

m A mátrixszorzás nem kommutatív ezért az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ és az $\mathbf{YA} = \mathbf{B}$ egyenletek megoldása különböző is lehet.

- Be lehet vezetni egy balról és egy jobbról való osztást, de ahhoz a később tanulandó pszeudoinverz fogalmára lesz szükség. Viszont általában még az sem igaz, hogy ha

$$\mathbf{YA} = \mathbf{B}, \text{ akkor } \mathbf{Y} = \mathbf{B}/\mathbf{A}, \quad \text{illetve ha}$$

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}, \text{ akkor } \mathbf{X} = \mathbf{A}\backslash\mathbf{B}.$$

- Ha csak egyetlen megoldás létezik (a következőkben megtudjuk mikor), akkor igazak a fönti implikációk, pl.:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \text{ így } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Bigg\backslash \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ és}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \text{ így } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Bigg/ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Mátrix inverzének definíciója

D **Mátrix inverze**

Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$-es mátrix, ahol $\mathbb{F}$ test. Azt mondjuk, hogy $\mathbf{A}$ invertálható, ha létezik olyan $\mathbf{B}$ mátrix, melyre

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n.$$

A $\mathbf{B}$ mátrixot $\mathbf{A}$ inverzének nevezzük, és $\mathbf{A}^{-1}$-nel jelöljük. A nem invertálható mátrixot szingulárisnak nevezzük.

m Ha $\mathbf{A}$ inverze $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}$ inverze $\mathbf{A}$.

- $$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Á Egy mátrixnak egy inverze lehet. Tfh $\mathbf{A}$ inverze $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = \mathbf{CI} = \mathbf{C}(\mathbf{AB}) = (\mathbf{CA})\mathbf{B} = \mathbf{IB} = \mathbf{B}$$

m $\mathbf{A}^{-1}$, precedenciaelv: $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1+1} = \mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$

Példa mátrix inverzére

D Amh az $\mathbf{A}$ mátrix nilpotens, ha van olyan k pozitív egész, hogy $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$.

- $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Á Ha $\mathbf{A}$ nilpotens, és $\mathbf{A}^k = \mathbf{O}$, akkor $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ invertálható, és inverze $\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^{k-1}$.

B
$$\begin{aligned}(\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^{k-1}) \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^{k-1} - \mathbf{A} - \mathbf{A}^2 - \ldots - \mathbf{A}^{k-1} - \mathbf{A}^k \\ &= \mathbf{I} - \mathbf{A}^k \\ &= \mathbf{I}\end{aligned}$$

m Ha $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, akkor $\mathrm{r}(\mathbf{A})$ és $\mathrm{r}(\mathbf{B})$ egyike sem lehet kisebb $\mathrm{r}(\mathbf{I})$-nél, azaz a mátrixok rendjénél.

Invertálható mátrix tulajdonságai

T

Invertálhatóság

$\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Az alábbiak ekvivalensek:

1. A invertálható;
2. A oszlopvektorai lineárisan függetlenek;
3. A oszlopvektorai bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben;
4. A sorvektorai lineárisan függetlenek;
5. A sorvektorai bázist alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben;
6. $\mathrm{r}(\mathsf{A}) = n$.

T

Szingularitás

$\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Az alábbiak ekvivalensek:

1. A szinguláris;
2. A oszlopvektorai lineárisan összefüggők;
3. $\dim(\mathcal{O}(\mathsf{A})) < n$;
4. A sorvektorai lineárisan összefüggők;
5. $\dim(\mathcal{S}(\mathsf{A})) < n$;
6. A bármely lépcsős alakjának van zérus sora, így $\mathrm{r}(\mathsf{A}) < n$.

Elemi mátrixok inverze

elemi mátrix	sorművelet	inverz sorművelet	inverz mátrix
E_{ij}	$S_i \leftrightarrow S_j$	$S_i \leftrightarrow S_j$	$\mathsf{E}_{ij}^{-1} = \mathsf{E}_{ij}$
$\mathsf{E}_i(c)$	cS_i	$\frac{1}{c}S_i$	$\mathsf{E}_i(c)^{-1} = \mathsf{E}_i(\frac{1}{c})$
$\mathsf{E}_{ij}(c)$	$S_i + cS_j$	$S_i - cS_j$	$\mathsf{E}_{ij}(c)^{-1} = \mathsf{E}_{ij}(-c)$

Inverz kiszámítása

Á **Inverz kiszámítása elemi sorműveletekkel**

A négyzetes $\mathbf{A}$ *mátrix invertálható, ha az* $[\mathbf{A}|\mathbf{I}]$ *mátrix elemi sorműveletekkel* $[\mathbf{I}|\mathbf{B}]$ *alakra hozható, ekkor* $\mathbf{A}$ *inverze* $\mathbf{B}$. *Ha* $\mathbf{rref}(\mathbf{A}) \neq \mathbf{I}$, *akkor* $\mathbf{A}$ *nem invertálható.*

B Az $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ tekinthető egy szimultán egyenletrendszernek, mely pontosan akkor oldható meg (akkor viszont egyértelműen), ha $\mathbf{rref}[\mathbf{A}|\mathbf{I}] = [\mathbf{I}|\mathbf{B}]$, és ekkor $\mathbf{X} = \mathbf{B}$.

- Ha $\mathbf{rref}(\mathbf{A}) \neq \mathbf{I}$, azaz $\mathrm{r}(\mathbf{A}) < n$, akkor $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ nem oldható meg, mivel $\mathrm{r}(\mathbf{I}) = n$ miatt $\mathrm{r}[\mathbf{A}|\mathbf{I}] = n > \mathrm{r}(\mathbf{A})$.
- Ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = n$, akkor az $\mathbf{YA} = \mathbf{I}$ egyenlet is megoldható, hisz az ekvivalens az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Y}^\mathsf{T} = \mathbf{I}$ egyenlettel, ami $\mathrm{r}(\mathbf{A}) = \mathrm{r}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = n$ miatt megoldható.
- Be kell még látnunk, hogy $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$.

Az inverz létezése

T **Az inverz létezéséhez elég egy feltétel**

A négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha létezik olyan $\mathbf{B}$ mátrix, hogy az $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ és a $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ feltételek egyike teljesül. Ha ilyen $\mathbf{B}$ mátrix létezik, az egyértelmű.

B Ha $[\mathbf{A}|\mathbf{I}] \to [\mathbf{I}|\mathbf{B}]$, akkor az elemi sorműveletek inverzeit fordított sorrendben elvégezve kapjuk, hogy $[\mathbf{B}|\mathbf{I}] \to [\mathbf{I}|\mathbf{A}]$.

Példák inverz kiszámítására

P $$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 4\\3 & 4 & 6\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\\0 & 3 & -2\\1 & -2 & 1\end{bmatrix}, \text{ mert}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0\\3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0\\0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0\\0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0\\0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1\end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2\\0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1\end{array}\right]$$

2×2-es mátrix inverze

Á Az $\mathsf{A} = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ mátrix pontosan akkor invertálható, ha $ad - bc \neq 0$, és ekkor

$$\mathsf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

B mátrixszorzással ellenőrizzük

- a feltétel elégségességét a képlet igazolja
- szükségesség: $ad - bc = 0$, azaz $ad = bc \iff \mathsf{A}$ egyik sora a másik skalárszorosa
- ekkor A nem alakítható elemi sorműveletekkel egységmátrixszá.

Az inverz alaptulajdonságai

T A és B egyaránt $n \times n$-es invertálható mátrixok

a) A^{-1} invertálható, és inverze $\left(\mathsf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathsf{A}$,

b) $c \neq 0$ esetén $c\mathsf{A}$ invertálható, és inverze $\frac{1}{c}\mathsf{A}^{-1}$,

c) AB invertálható, és inverze $\mathsf{B}^{-1}\mathsf{A}^{-1}$,

d) A^k invertálható, és inverze $\left(\mathsf{A}^k\right)^{-1} = \left(\mathsf{A}^{-1}\right)^k$, definíció szerint ezt értjük A^{-k}-n,

e) A^T invertálható, és $\left(\mathsf{A}^\mathsf{T}\right)^{-1} = \left(\mathsf{A}^{-1}\right)^\mathsf{T}$.

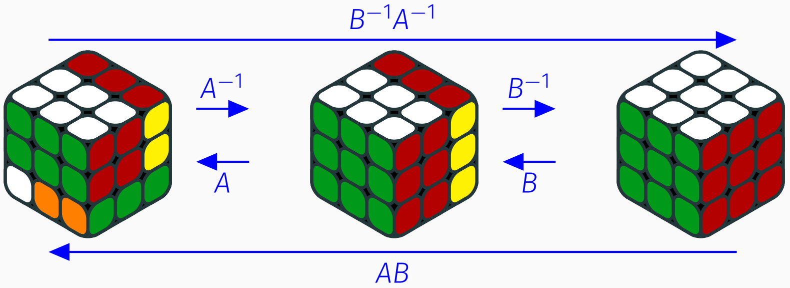
B *c)* Az

$$(\mathsf{AB})(\mathsf{B}^{-1}\mathsf{A}^{-1}) = \mathsf{A}(\mathsf{BB}^{-1})\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{AA}^{-1} = \mathsf{I}$$

szorzat bizonyítja, hogy AB invertálható, és inverze $\mathsf{B}^{-1}\mathsf{A}^{-1}$.

\- *d)* Az $\left(\mathsf{A}^k\right)^{-1} = \left(\mathsf{A}^{-1}\right)^k$ egyenlőséget igazolja:

$$\underbrace{\mathsf{AA}\ldots\mathsf{A}}_{k \text{ tényező}}\underbrace{\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A}^{-1}\ldots\mathsf{A}^{-1}}_{k \text{ tényező}} = \underbrace{\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A}^{-1}\ldots\mathsf{A}^{-1}}_{k \text{ tényező}}\underbrace{\mathsf{AA}\ldots\mathsf{A}}_{k \text{ tényező}} = \mathsf{I}$$


$B^{-1}A^{-1}$
A^{-1}
A
B^{-1}
B
AB

Invertálhatóság és az egyenletrendszerek megoldhatósága

T

Az invertálhatóság és az egyenletrendszerek

Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ mátrix. Az alábbi állítások ekvivalensek:

1. $\mathbf{A}$ invertálható;
2. az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ mátrixegyenlet bármely $n \times t$-es $\mathbf{B}$ mátrixra egyértelműen megoldható;
3. az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer bármely n dimenziós $\mathbf{b}$ vektorra egyértelműen megoldható;
4. a homogén lineáris $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek a triviális $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ az egyetlen megoldása;
5. $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja $\mathbf{I}$;
6. $\mathbf{A}$ előáll elemi mátrixok szorzataként.

Mátrixegyenlet megoldása mátrixinvertálással

P Oldjuk meg a következő egyenletrendszert mátrixinvertálással!

$$\begin{aligned} 2x + y &= 2 \\ 5x + 3y &= 3 \end{aligned}$$

M Az együtthatómátrix és inverze

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix},$$

így az ismeretlenek (x, y) vektorára

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathsf{A}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Mátrixegyenlet megoldása mátrixinvertálással

P Oldjuk meg az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ mátrixegyenletet, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

1M Az $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ mátrixegyenlet megoldása:

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 3 & -9 & -8 \end{bmatrix}.$$

2M Minden $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ alakú mátrixegyenlet invertálható $\mathbf{A}$ esetén megoldható szimultán egyenletrendszerként az $[\mathbf{A}|\mathbf{B}]$ mátrix redukált lépcsős alakra hozásával. Tehát így számolható minden $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ szorzat:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & -1 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -9 & -8 \end{array}\right]$$

Mátrix elemi mátrixok szorzatára bontása*

- Ha $\mathbf{A}$-t elemi sorműveletek $\mathbf{I}$-be viszik, akkor a sorműveletek inverzei fordított sorrendben elvégezve $\mathbf{I}$-t $\mathbf{A}$-ba.

Elemi sorműveletek		Elemi mátrixok	Elemi mátrixok inverzei
$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}$			
$\Downarrow$	$S_2 - 3S_1$	$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix}$	$\mathbf{E}_1^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$			
$\Downarrow$	$-S_2$	$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$	$\mathbf{E}_2^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$			
$\Downarrow$	$S_1 - 2S_2$	$\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$	$\mathbf{E}_3^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$			

$$\rightsquigarrow \mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \mathbf{I} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Báziscsere

- $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ az $\mathbf{R}^n$ két bázisa. Legyen $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges. Ekkor

$$[\mathsf{v}]_{\mathcal{C}} = \mathsf{T}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathsf{v}]_{\mathcal{B}}, \quad \text{és} \quad [\mathsf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathsf{T}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}[\mathsf{v}]_{\mathcal{C}}.$$

- A második egyenletbe helyettesítve az elsőt kapjuk, hogy

$$[\mathsf{v}]_{\mathcal{B}} = \mathsf{T}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}\mathsf{T}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathsf{v}]_{\mathcal{B}},$$

  azaz $\mathsf{T}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}\mathsf{T}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ minden vektort önmagába visz, tehát egyenlő az egységmátrixszal.

- $\mathsf{T}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}\mathsf{T}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathsf{I}$, azaz e mátrixok egymás inverzei.

Báziscsere

P $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}, \mathcal{C} = \{(1,2,3),(0,1,2),(0,0,1)\}$, $\mathsf{T}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = ?$

1M A bázisokból leolvasható

$$\mathsf{T}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{T}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathsf{T}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}} = \mathsf{T}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}^{-1}$, így $\mathsf{T}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathsf{T}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}}\mathsf{T}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$.

$$\mathsf{T}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Báziscsere (folytatás)

2M $T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}T_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$, ahol $T_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ az ismeretlen mátrix.

megoldása a $[T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}|T_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}]$ redukált lépcsős alakjából:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

- Tehát

$$T_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mátrixműveletek algebrája

Műveletek speciális mátrixokkal

T **Műveletek diagonális mátrixokkal**

Legyen $\mathsf{A} = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\mathsf{B} = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, és legyen k egész szám. Ekkor

1. $\mathsf{AB} = \operatorname{diag}(a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_n b_n)$,
2. $\mathsf{A}^k = \operatorname{diag}(a_1^k, a_2^k, \ldots, a_n^k)$, speciálisan
3. $\mathsf{A}^{-1} = \operatorname{diag}(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_n^{-1})$.

D **Permutáló mátrix, kígyó**

A diagonális mátrixok sorainak permutációjával kapott mátrixot kígyónak (más néven transzverzálisnak) nevezzük, speciálisan az egységmátrixból ugyanígy kapott mátrixot permutáló mátrixnak (más néven permutációmátrixnak) hívjuk.

- Az alábbi mátrixok mindegyike kígyó, az utolsó kettő egyúttal permutáló mátrix is:

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Műveletek permutáló mátrixokkal

Á Bármely két azonos méretű permutáló mátrix szorzata és egy permutáló mátrix bármely egész kitevős hatványa permutáló mátrix.

B $\mathbf{P}\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_j$, $\mathbf{e}_k^T\mathbf{P} = \mathbf{e}_\ell^T \rightsquigarrow$ minden sorban és oszlopban pontosan egy 1-es.

Á Permutáló mátrix inverze megegyezik a transzponáltjával, azaz ha $\mathbf{P}$ permutáló mátrix, akkor $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$.

B $(\mathbf{P}\mathbf{P}^T)_{ii} = \mathbf{P}_{i*} \cdot \mathbf{P}_{i*} = 1$, míg $i \neq j$ esetén

$$(\mathbf{P}\mathbf{P}^T)_{ij} = (\mathbf{P})_{i*}(\mathbf{P}^T)_{*j} = (\mathbf{P})_{i*} \cdot (\mathbf{P})_{j*} = 0.$$

P $\mathbf{P}\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Háromszögmátrixok

D főátló alatt csak 0-elemek: felső háromszögmátrix

D főátló felett csak 0-elemek: alsó háromszögmátrix

D háromszögmátrix főátlójában csupa 1-es: egység háromszögmátrixról (unit triangular matrix)

m a háromszögmátrix fogalmát általában négyzetes mátrixokra értjük, de a fenti definíciókkal kiterjeszthető téglalap alakú mátrixokra is.

Á ha egy konzisztens egyenletrendszer együtthatómátrixa háromszögmátrix, akkor behelyettesítésekkel megoldható (angolban backward/forward substitution aszerint, hogy a mátrix felső/alsó háromszögmátrix).

Műveletek háromszögmátrixokkal

Á Felső háromszögmátrixok összege, szorzata, és invertálható felső háromszögmátrix inverze felső háromszögmátrix. Alsóra analóg.

Á Egy háromszögmátrix pontosan akkor invertálható, ha főátlóbeli elemeinek egyike sem zérus.

Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixok

D szimmetrikus mátrix: $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}$

D ferdén szimmetrikus mátrix: $\mathbf{A}^\mathsf{T} = -\mathbf{A}$

P $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 9 \\ -9 & 2 & 9 \\ -9 & -9 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$

M $\mathbf{A}$ szimmetrikus, $\mathbf{B}$ egyik sem, $\mathbf{C}$ ferdén szimmetrikus.

Á Ferdén szimmetrikus mátrix főátlójában 0-k állnak.

Á Szimmetrikus mátrixok összege, skalárszorosa, inverze szimmetrikus. Ferdén szimmetrikus mátrixok összege, skalárszorosa, inverze ferdén szimmetrikus.

Á Szimmetrikus mátrixok szorzata szimmetrikus $\iff$ felcserélhetők.

B $(\Leftarrow)$ $(\mathbf{AB})^\mathsf{T} = \mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{BA} = \mathbf{AB}$,
$(\Rightarrow)$ $\mathbf{AB} = (\mathbf{AB})^\mathsf{T} = \mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{BA}$.

Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixokról 2

T Felbontás szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrix összegére Minden négyzetes mátrix előáll egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegeként, nevezetesen minden $\mathbf{A}$ négyzetes mátrixra

$$\mathbf{A} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)}_{\text{szimmetrikus}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)}_{\text{ferdén szimm.}}.$$

B $\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}} + \left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}} + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$

$\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}} - \left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}} - \mathbf{A} = -\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)$

T $\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$ szimmetrikus tetszőleges $\mathbf{A}$ mátrix esetén.

B $\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}} = \left(\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\right)^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}$.

Mátrixok terei

m Az $\mathbb{R}^{m\times n}$, vagyis az $m \times n$-es mátrixok tekinthetők mn hosszú vektoroknak, vagyis $\mathbb{R}^{mn}$ elemeinek, így tekinthetők egy vektortér elemeinek a mátrixok összadására és skalárral szorzására nézve.

P Alteret alkotnak-e az $\mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixok terében a szimmetrikus mátrixok, és ha igen, adjuk meg egy bázisukat. Mennyi az altér dimenziója?

M Szimmetrikus mátrxokhoz tartozó vektorok összege és skalárszorosa olyan vektort ad, melyhez szimmetrikus mátrix tartozik, tehát alteret alkotnak.

- A főátlóban egy 1-es, egyebütt 0 alakúak, valamint a főátló alatt és fölött szimmetrikus helyzetben egy 1-es, egyebütt 0 alakú mátrixok kifeszítik ezt az alteret.
- Az altér dimenziója = bázis elemszáma = $\frac{n(n+1)}{2}$.

Mátrixok gyorsszorzása*

- Strassen-formulák, 1969: $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ és mindegyik 2×2-es mátrix, akkor a szorzás elvégezhető a következő formulákkal:

$$
\begin{aligned}
d_1 &= (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22}) & c_{11} &= d_1 + d_4 - d_5 + d_7 \\
d_2 &= (a_{21} + a_{22})b_{11} & c_{21} &= d_2 + d_4 \\
d_3 &= a_{11}(b_{12} - b_{22}) & c_{12} &= d_3 + d_5 \\
d_4 &= a_{22}(-b_{11} + b_{21}) & c_{22} &= d_1 + d_3 - d_2 + d_6 \\
d_5 &= (a_{11} + a_{12})b_{22} & & \\
d_6 &= (-a_{11} + a_{21})(b_{11} + b_{12}) & & \\
d_7 &= (a_{12} - a_{22})(b_{21} + b_{22}) & &
\end{aligned}
$$

- $2^n \times 2^n$-es mátrixokat 2×2-es blokkokra osztjuk, majd rekurzívan alkalmazzuk a fenti képleteket.

A gyorsszorzás használhatósága*

- A standard mátrixszorzás műveletigénye $2n^3 - n^2$ (ebből n^3 szorzás és $n^3 - n^2$ összeadás). A Strassen-formulákkal való szorzásé $n = 2^k$ esetén legföljebb $7 \cdot 7^k - 6 \cdot 4^k$. Ez $k = \lceil \log_2 n \rceil$ esetén $cn^{\log_2 7} \approx cn^{2.8074}$ felső becslést ad.
- Coppersmith–Winograd 1990: $cn^{2.375477}$
- javítások, 2010: $cn^{2.374}$, 2011: $cn^{2.3728642}$, 2014: $cn^{2.3728639}$.
- A Strassen-algoritmus gyengéje: nagyobb memóriahasználat, numerikusan instabilabb.
- A Strassen utáni algoritmusoknak csak elméleti jelentősége van, a gyakorlatban nem használják, mert csak akkora mátrixokon lenne előnyös, amekkorákat nem szoroznak össze a mai gépek.

Mátrixműveletek algebrája

LU-felbontás

m Ha egy $\mathbf{A}$ mátrixból el lehet jutni egy $\mathbf{U}$ felső háromszögalakhoz olyan sorműveletekkel, melyekben egy sor konstansszorosát csak alatta lévő sorhoz adjuk és sorokat nem cserélünk, akkor

$$\mathbf{E}_k \dots \mathbf{E}_1 \mathbf{A} = \mathbf{U}, \tag{1}$$

azaz $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ alakra hozható (lower, upper).

D AMH az $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ mátrix egy $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ alakú tényezőkre bontása LU-felbontás (-faktorizáció, -dekompozíció), ha $\mathbf{L}$ alsó egység háromszögmátrix, $\mathbf{U}$ felső háromszögmátrix.

- Nincs minden mátrixnak LU-felbontása, pl.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & c \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

- Az LU-felbontás nem egyértelmű, pl. tetszőleges x-re

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

P Határozzuk meg $\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ LU-felbontását!

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{S_2 - 1/2 S_1}{\Longrightarrow} \qquad \left(\mathsf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathsf{E}_1\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{S_3 - 1/4 S_1}{\Longrightarrow} \qquad \left(\mathsf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathsf{E}_2\mathsf{E}_1\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{S_3 - 1/2 S_2}{\Longrightarrow} \qquad \left(\mathsf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathsf{E}_3\mathsf{E}_2\mathsf{E}_1\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathsf{U}.$$

LU-felbontás kiszámítása

- Tehát $\mathsf{E}_3\mathsf{E}_2\mathsf{E}_1\mathsf{A} = \mathsf{U}$, amiből az $(\mathsf{E}_3\mathsf{E}_2\mathsf{E}_1)^{-1} = \mathsf{E}_1^{-1}\mathsf{E}_2^{-1}\mathsf{E}_3^{-1}$ mátrixszal való beszorzás után $\mathsf{A} = (\mathsf{E}_1^{-1}\mathsf{E}_2^{-1}\mathsf{E}_3^{-1})\mathsf{U}$.

$$\mathsf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Algoritmus az LU-felbontás kiszámítására

A Algoritmus a Gauss-elimináció lépcsős alak helyett felső háromszögalakú mátrixot adó megváltoztatásával, ahol $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ ($\mathbb{F}$ test):

1. $\mathbf{L} \leftarrow \mathbf{I}_m$, $\mathbf{U} \leftarrow \mathbf{A}$, $s = \min(m, n+1)$, $t \leftarrow 1$
2. ha $u_{tt} = 0$ és $\exists k > t : u_{kt} \neq 0$, akkor „*nincs LU-felbontás*" STOP
3. $u_{kt} \neq 0$ eliminálása $k > t$-re az $S_k - l_{kt}S_t$ sorművelettel; $(\mathbf{L})_{kt} \leftarrow l_{kt}$
4. $t \leftarrow t + 1$
5. ha $t = s$, akkor „*az LU-felbontás:* $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$" STOP
6. menj 2.-re

Algoritmus az LU-felbontás kiszámítására

T **Az LU-felbontás létezése és egyértelműsége**

A fenti algoritmusra igaz, hogy

(a) pontosan akkor áll le hibaüzenettel, ha $\mathbf{A}$-nak nincs LU-felbontása,

(b) a megkonstruált $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ mátrixok LU-felbontást adnak,

(c) ha $\mathbf{A}$ invertálható, akkor e felbontás egyértelmű.

Az algoritmus LU-felbontást ad

B Csak (b)-t bizonyítjuk: jelölje az $S_j - l_{ji}S_i$ sorművelet elemi mátrixát $\mathbf{E}_{ji}$ $(1 \leq i < j \leq m)$.

- Legyen

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}_{m,m-1})(\mathbf{E}_{m,m-2}\mathbf{E}_{m-1,m-2})\ldots(\mathbf{E}_{m2}\ldots\mathbf{E}_{42}\mathbf{E}_{32})(\mathbf{E}_{m1}\ldots\mathbf{E}_{31}\mathbf{E}_{21}).$$

- Az algoritmus szerint ekkor $\mathbf{EA} = \mathbf{U}$.
- $\mathbf{EL} = ?$
- $\mathbf{L}$ főátlójában csupa 1, ji-edik helyén l_{ji} áll, ezért az elemi $\mathbf{E}_{ji}$ mátrix épp ezt az elemet fogja eliminálni, és így $\mathbf{E}$ minden főátló alatti elemet eliminál, azaz $\mathbf{EL} = \mathbf{I}$.
- Eszerint $\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{L}$, tehát $\mathbf{A} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{LU}$.

Egyenletrendszer megoldása LU-felbontással

- $\mathsf{Ax} = \mathsf{b}$ megoldható $\iff$ $\mathsf{Ly} = \mathsf{b}$, $\mathsf{Ux} = \mathsf{y}$ megoldható.
- E két egyenletrendszer visszahelyettesítésekkel megoldható.
- Oldjuk meg: $$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 + 8x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 4 \end{aligned}$$
- $\mathsf{Ly} = \mathsf{b}$:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$
- $\mathsf{y} = (8, 0, 2)$
- $\mathsf{Ux} = \mathsf{y}$:
$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$
- $\mathsf{x} = (0, 0, 1)$.

Mátrix invertálása LU-felbontással

- $AX = I \iff LY = I,\ UX = Y.$
- Invertáljuk a $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrixot!
- $LY = I$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

- $UX = Y$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow X = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/2 & -1 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Az LU-felbontás a gyakorlatban

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 2.00 \\ 2.00 & 4.00 & 1.00 \\ 1.00 & 2.00 & 4.00 \end{bmatrix}
$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 2.00 \\ 0.50 & 3.50 & 0.00 \\ 1.00 & 2.00 & 4.00 \end{bmatrix}
$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 7/4 & 7/2 \end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 2.00 \\ 0.50 & 3.50 & 0.00 \\ 0.25 & 1.75 & 3.50 \end{bmatrix}
$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 7/2 \end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix} 4.00 & 1.00 & 2.00 \\ 0.50 & 3.50 & 0.00 \\ 0.25 & 0.50 & 3.50 \end{bmatrix}
$$

Mire jó?

m Az LU-felbontás műveletigénye megegyezik a Gauss-kiküszöbölésével: egy n-edrendű mátrixra nagyságrendileg $2n^3/3$.

- Egyenletrendszer együtthatómátrixának LU-felbontásához nincs szükség az egyrsz jobb oldalára (így használható akkor is, ha az még nem ismeretes, vagy több van belőle).
- Az LU-felbontás ismeretében több mátrixokkal kapcsolatos számítás gyorsabban elvégezhető (inverz, determináns,...).
- Az LU-felbontás memóriatakarékos, és vannak olyan speciális mátrixosztályok (pl. szalagmátrixok, ritka mátrixok), melyekre van a kiküszöbölésnél gyorsabb algoritmus az LU-felbontásra.
- A komputer algebra programok ha egy mátrixon LU-felbontást igénylő számítást végeznek, azt későbbi számításoknál fölhasználják, növelve a számítás hatékonyságát.

PLU-felbontás

Á Egy $\mathbf{P}$ permutáló mátrixszal való balról szorzással minden mátrix olyan alakra hozható, melynek van LU-felbontása:

$$\mathbf{PA} = \mathbf{LU}, \text{ azaz } \mathbf{A} = \mathbf{P}^{\mathsf{T}}\mathbf{LU}.$$

D Egy tetszőleges $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ mátrixnak egy permutáló, egy egység főátlójú négyzetes alsó háromszög- és egy $m \times n$-es felső háromszögmátrix szorzatára való bontását PLU-felbontásnak nevezzük.

PLU-felbontás

- Ha $m > n$, akkor **U** utolsó $m - n$ sora zérussor, ezért ezeket, és **L** utolsó $m - n$ oszlopa is elhagyható, vagyis ha $s = \min(m, n)$, akkor **P** $m \times m$-es permutáló mátrix, **L** 1-esekből álló főátlójú $m \times s$-es alsó, míg az **U** $s \times n$-es felső háromszögmátrix.

  Például

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

PLU-felbontás részleges főelemkiválasztással

P Részleges főelemkiválasztással (a főátlóbeli elem alatti legnagyobb abszolút értékű elemet kiválasztjuk, és sorcserével a főátlóba tesszük, és a numerikus hibák csökkentése érdekében vele eliminálunk) határozzuk meg a PLU-felbontását:

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 1 & -7 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5 \\ 4 & -8 & 4 & 8 & -4 \\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8 \end{bmatrix}$$

m Ha egy a adat hibája (kerekítési, számítási vagy mérési) ε, és $|b| < |c|$, akkor

$$\left|\frac{\varepsilon}{b}\right| > \left|\frac{\varepsilon}{c}\right|,$$

tehát $\frac{a}{c}$ hibája kisebb, mint $\frac{a}{b}$ hibája.

$$
\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array}\begin{bmatrix}-1 & 6 & 1 & -7 & 4\\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5\\ 4 & -8 & 4 & 8 & -4\\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8\end{bmatrix} \to \begin{array}{c}3\\2\\1\\4\end{array}\begin{bmatrix}4 & -8 & 4 & 8 & -4\\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5\\ -1 & 6 & 1 & -7 & 4\\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8\end{bmatrix} \to
$$

$$
\begin{array}{c}3\\2\\1\\4\end{array}\begin{bmatrix}4 & -8 & 4 & 8 & -4\\ 1/4 & 6 & 3 & -9 & 6\\ -1/4 & 4 & 2 & -5 & 3\\ 3/4 & 0 & 5 & 0 & -5\end{bmatrix} \to \begin{array}{c}3\\2\\1\\4\end{array}\begin{bmatrix}4 & -8 & 4 & 8 & -4\\ 1/4 & 6 & 3 & -9 & 6\\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1 & -1\\ 3/4 & 0 & 5 & 0 & -5\end{bmatrix} \to
$$

$$
\begin{array}{c}3\\2\\4\\1\end{array}\begin{bmatrix}4 & -8 & 4 & 8 & -4\\ 1/4 & 6 & 3 & -9 & 6\\ 3/4 & 0 & 5 & 0 & -5\\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix} \to \begin{array}{c}3\\2\\4\\1\end{array}\begin{bmatrix}4 & -8 & 4 & 8 & -4\\ 1/4 & 6 & 3 & -9 & 6\\ 3/4 & 0 & 5 & 0 & -5\\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 6 & 1 & -7 & 4\\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5\\ 4 & -8 & 4 & 8 & -4\\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1/4 & 1 & 0 & 0\\ 3/4 & 0 & 1 & 0\\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -8 & 4 & 8 & -4\\ 0 & 6 & 3 & -9 & 6\\ 0 & 0 & 5 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}.
$$

$$
\begin{bmatrix}-1 & 6 & 1 & -7 & 4\\ 1 & 4 & 4 & -7 & 5\\ 4 & -8 & 4 & 8 & -4\\ 3 & -6 & 8 & 6 & -8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1/4 & 1 & 0 & 0\\ 3/4 & 0 & 1 & 0\\ -1/4 & 2/3 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -8 & 4 & 8 & -4\\ 0 & 6 & 3 & -9 & 6\\ 0 & 0 & 5 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}.
$$

A PLU-felbontás algoritmusa: Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ ($\mathbb{F}$ test):

1. $\mathbf{L}_0 \leftarrow \mathbf{I}_m$, $\mathbf{A}_0 \leftarrow \mathbf{U}_0 \leftarrow \mathbf{A}$, $s = \min(m, n+1)$, $t \leftarrow 1$
2. ha $u_{tt} = 0$ és $\forall k > t : u_{kt} = 0$, akkor

   $\mathbf{L}_t \leftarrow \mathbf{L}_{t-1}$, $\mathbf{A}_t \leftarrow \mathbf{A}_{t-1}$, $\mathbf{U}_t \leftarrow \mathbf{U}_{t-1}$, $\mathbf{P}_t = \mathbf{I}$

   $t \leftarrow t+1$ és menj 2-re
3. ha $u_{tt} = 0$ és $u_{kt} \neq 0$ valamely $k > t$-re, akkor legyen

   $\mathbf{P}_t$ az $S_t \leftrightarrow S_k$ mátrixa,

   $\mathbf{U}'_t = \mathbf{P}_t\mathbf{U}_{t-1}$, $\mathbf{L}'_t = \mathbf{P}_t\mathbf{L}_{t-1}\mathbf{P}_t$,

   $\mathbf{A}_t = \mathbf{P}_t\mathbf{A}_{t-1} = (\mathbf{P}_t\mathbf{L}_{t-1}\mathbf{P}_t)(\mathbf{P}_t\mathbf{U}_{t-1}) = \mathbf{L}'_t\mathbf{U}'_t$.
4. $\mathbf{U}'_t$-ben $u_{kt} \neq 0$ eliminálása minden $k > t$-re az $S_k - l_{kt}S_t$ sorművelettel; $(\mathbf{L}'_t)_{kt} \leftarrow l_{kt}$,
   e lépések végén kapjuk az $\mathbf{U}_t$, $\mathbf{L}_t$ és $\mathbf{A}_t = \mathbf{L}_t\mathbf{U}_t$ mátrixokat.
5. $t \leftarrow t+1$
6. ha $t = s$, akkor $\mathbf{P} = \mathbf{P}_s\mathbf{P}_{s-1}\dots\mathbf{P}_1$, $\mathbf{L} = \mathbf{L}_s$, $\mathbf{U} = \mathbf{U}_s$; ekkor $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$; „a PLU-felbontás: $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{LU}$” STOP
7. menj 2-re