



BUDAPESTI MŰSZAKI  
MATEMATIKA  
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI  
INTÉZET  
EGYETEM



# Lineáris algebra mérnököknek

BMETE93BG20



## A megoldások tere

2019-10-01, 04



Wetttl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK

E lecke befejezése után a hallgató

- ki tudja számítani mátrix rangját,
- a rang segítségével el tudja dönteni, hogy egy egyenletrendszer megoldható-e, és ha igen, hány megoldása van (beleértve a véges testek esetét is),
- paramétert is tartalmazó egyenletrendszerben meg tudja határozni, hogy a megoldások száma hogyan függ a paraméter értékétől,
- meg tudja határozni adott vektorok közti lineáris kapcsolatokat,

E lecke befejezése után a hallgató

- meg tudja határozni egy generátoraival, vagy egy egyenletrendszerrel megadott altér vagy affin altér dimenzióját,
- meg tudja adni egy altér – például egy mátrix kitüntetett altereinek – bázisát,
- elő tudja állítani egy vektor adott bázisra vonatkozó koordinátás alakját,
- meg tudja adni egy valós vektortér egy generátorával adott alterénekek merőlegesét,
- ki tudja számolni egy lineáris egyenletrendszer egyetlen sortérbe eső megoldását.

# Homogén és inhomogén egyenletrendszer megoldásai

---

# Homogén és inhomogén egyenletrendszer megoldásai

---

Megoldhatóság és a megoldások száma

# Mátrix rangja

## Á Főelemek oszlopai

*Egy test fölötti mátrix bármely lépcsős alakjában a főelemek ugyanazokban az oszlopokban vannak, tehát ezek száma is független a lépcsős alaktól.*

bármely lépcsős  
alak főelemeinek  
száma

=

bármely lépcsős  
alak nemzérus  
sorainak száma

=

a redukált  
lépcsős alak  
vezéregye-  
seinek száma.

## D Mátrix rangja

Egy mátrix valamely lépcsős alakjában a nemnulla sorok számát a mátrix **rangjának** nevezzük. Az **A** rangját  $r(\mathbf{A})$  ( $\text{rang}(\mathbf{A})$  vagy  $\text{rank}(\mathbf{A})$ ) jelöli.

# Rang kiszámítása

**P** Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját!

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**M** 1, 2, 4, 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Kötött és szabad változók

## Á Kötött és szabad változók száma

*Ha az  $n$ -ismeretlenes  $[A|b]$  mátrixú egyenletrendszer megoldható, és  $r(A) = r$ , akkor a Gauss- vagy a Gauss-Jordan-módszerrel kapott megoldásában a kötött változók száma  $r$ , a szabad változóké  $n - r$ .*

P

$$\left[ \begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 2 & 6 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

M Itt 3 a kötött és 4 a szabad változók száma.

## T A megoldhatóság mátrixrangos feltétele

Legyen  $[A|b]$  egy  $n$ -ismeretlenes lineáris egyenletrendszer.

1. Ez pontosan akkor oldható meg, ha

$$r(A) = r(A|b).$$

2. Ez az egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha

$$r(A) = r(A|b) = n.$$

# A megoldások száma

- Valós együtthatós **inhomogén** és **homogén** lineáris egyrsz-ek:

| Feltétel                                       | Megoldások száma | Feltétel            | Megoldások száma |
|------------------------------------------------|------------------|---------------------|------------------|
| $r(\mathbf{A}) < r(\mathbf{A} \mathbf{b})$     | 0                | $r(\mathbf{A}) = n$ | 1                |
| $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A} \mathbf{b}) = n$ | 1                | $r(\mathbf{A}) < n$ | $\infty$         |
| $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A} \mathbf{b}) < n$ | $\infty$         |                     |                  |

## T **Homogén lineáris egyenletrendszer megoldhatósága**

Az  $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$  homogén lineáris egyenletrendszer mindig megoldható (**0**-vektor, a **triviális megoldás**). Pontosán akkor van **nemtriviális** megoldása is, ha  $r(\mathbf{A}) < n$ , ahol  $n$  az ismeretlenek – azaz  $\mathbf{A}$  oszlopainak – számát jelöli. Ha  $m$  egyenletből áll és  $m < n$ , akkor van nemtriviális megoldás.

P Az  $a$  paraméter mely értékei mellett van az alábbi egyenletrendszernek 0, 1, illetve  $\infty$  sok megoldása?

$$- \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & a^2 \end{array} \right] \xrightarrow[S_3 - aS_1]{S_2 - S_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & a^2-a \end{array} \right] \xrightarrow{S_3 + S_2}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2) & (a+1)(a-1) \end{array} \right]$$

-  $a = 1$ : a rang 1, az egyenletrendszer az  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ . Ennek megoldása:  $(x_1, x_2, x_3) = (1 - s - t, s, t)$ , azaz

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

-  $a = -2$ : az együtthatómátrix rangja 2, a bővített mátrix rangja 3, az egyenletrendszer nem konzisztens!

-  $a \neq 1, a \neq -2$ :  $x_1 = \frac{(a+1)^2}{a+2}$ ,  $x_2 = \frac{1}{a+2}$ ,  $x_3 = -\frac{a+1}{a+2}$ .

# Homogén és inhomogén egyenletrendszer megoldásai

---

Homogén lineáris egyenletrendszer  
megoldásainak tere

# Homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai

## Á Megoldások lineáris kombinációja

*Egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak bármely lineáris kombinációja is megoldás.*

- B Elég két megoldásra bizonyítani. Jelölje  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  az egyenletrendszer együtthatómátrixának oszlopvektorait. L!  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  és  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  két tetszőleges mo.:

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \dots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{a}_1 y_1 + \mathbf{a}_2 y_2 + \dots + \mathbf{a}_n y_n = \mathbf{0},$$

- Legyen  $c, d$  két tetszőleges skalár. Biz., hogy  $c\mathbf{x} + d\mathbf{y}$  is mo.:
- $$\begin{aligned} \mathbf{a}_1(c x_1 + d y_1) + \mathbf{a}_2(c x_2 + d y_2) + \dots + \mathbf{a}_n(c x_n + d y_n) = \\ (c \mathbf{a}_1 x_1 + d \mathbf{a}_1 y_1) + (c \mathbf{a}_2 x_2 + d \mathbf{a}_2 y_2) + \dots + (c \mathbf{a}_n x_n + d \mathbf{a}_n y_n) = \\ c(\mathbf{a}_1 x_1 + \dots + \mathbf{a}_n x_n) + d(\mathbf{a}_1 y_1 + \dots + \mathbf{a}_n y_n) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Egyelőre az  $\mathbb{F}$  test fölötti vektoron  $\mathbb{F}^n$  elemeit értjük.

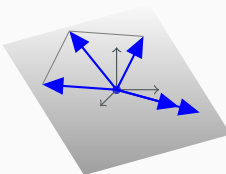
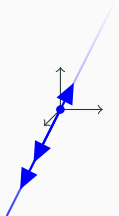
## D Vektortér, altér

Az  $\mathbb{F}$  test fölötti **vektortéren** vektorok olyan **nem üres**  $\mathcal{V}$  halmazát értjük, mely **zárt** a **vektorösszeadás** és a **skalárral szorzás** műveletére. Ha  $\mathcal{U}$  és  $\mathcal{V}$  két vektortér és  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ , akkor azt mondjuk, hogy az  $\mathcal{U}$  vektortér a  $\mathcal{V}$  vektortér **altére**. Jelölése:  $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ .

- Az  $\mathcal{A}$  vektorhalmaz pontosan akkor vektortér, ha az  $\mathcal{A}$ -beli vektorokból  $\mathbb{F}$  elemeivel képzett lineáris kombinációk is mind  $\mathcal{A}$ -ban vannak.

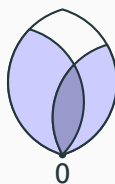
# Valós vektorterek

- Minden pozitív  $n$  egész esetén  $\mathbb{R}^n$  vektortér.
- $\mathbb{R}^2$ -ben egy origón átmenő egyenes vektorai (az egyenes pontjaiba mutató helyvektorok) alteret alkotnak.
- $\mathbb{R}^3$ -ben bármely origón átmenő sík vagy egyenes vektorai alteret alkotnak.



- Az  $\mathbb{R}^3$  imént felsorolt alterei „olyanok”, mint az  $\mathbb{R}$  és az  $\mathbb{R}^2$ . (Az „olyanok” fogalmát precízen a „vektorterek izomorfizmusának” fogalma fogja tisztázni. Akkor fogjuk igazolni, hogy  $\mathbb{R}^n$  alterei valóban mind „olyanok”, mint  $\mathbb{R}^k$ , ahol  $k \leq n$ .)

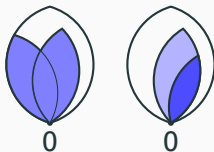
# Altér tulajdonságai és szemléltetésük



- Minden altérnek eleme a nullvektor (bármely altérbeli vektor 0-szorosa is benne van).
- Minden altérbeli  $\mathbf{x}$  vektorral együtt annak ellentettje ( $-1$ -szerese), a  $-\mathbf{x}$  vektor is eleme az altérnek.
- Minden vektortér maga is altér (saját maga altere).
- $Z = \{0\}$  a **zérustér** altér. (NEM nulltér a neve!).
- Altér altere altér, azaz ha  $U \leq V$ , és  $W \leq U$ , akkor  $W \leq V$ .
- Alterek metszete altér:  $U \cap V = W$ .

# Alterek tulajdonságai és szemléltetésük

- Két altér uniója pontosan
- akkor altér, ha egyikük altere a másiknak.



**P** Alteret alkotnak-e az alábbi vektorhalmazok  $\mathbb{R}^3$ -ben?

- $\{ (x, y, z) \mid x = y, z = xy \},$
- $\{ (s + 2t, s - 1, 2s + t) \mid s, t \in \mathbb{R} \},$
- $\{ (x, y, z) \mid 2x - y + z = 0 \},$
- $\{ (x, y, z) \mid x = 2t, y = -t, z = t, t \in \mathbb{R} \}.$

- M**
- Nem. (Pl.  $(1, 1, 1)$  benne van,  $(2, 2, 2)$  nem.)
  - Nem. Nincs benne a nullvektor.
  - Igen. Az  $\mathbf{n} = (2, -1, 1)$  normálvektorú sík. (Ha  $\mathbf{x}$  és  $\mathbf{y}$  a sík két vektora, azaz  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0$  és  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{y} = 0$ , akkor  $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = 0$  és  $\mathbf{n} \cdot (c\mathbf{x}) = 0$  is)
  - Igen. A  $\mathbf{v} = (2, -1, 1)$  vektor skalárszorosai.

# Alterek tulajdonságai és szemléltetésük

## Á Megoldások altere

Egy  $n$ -ismeretlenes *homogén* lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza alteret alkot  $\mathbb{R}^n$ -ben.

## D Nulltér

Az  $\mathbf{A}$  együtthatómátrixú hom. lin. egysz. megoldásainak alterét az  $\mathbf{A}$  mátrix *nullterének* nevezzük és  $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ -val jelöljük.

P Határozzuk meg a  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}$  mátrix nullterét:

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

## $\mathbb{R}^2$ és $\mathbb{R}^3$ alterei

- $\mathbb{R}^2$  alterei az alábbiak:
  - a zérusvektorból álló egyelemű halmaz, azaz a zérustér,
  - egy origón átmenő egyenes összes vektora,
  - a sík összes vektora.
- Hasonlóképp  $\mathbb{R}^3$  alterei:
  - a zérusvektorból álló egyelemű halmaz,
  - egy origón átmenő egyenes összes vektora,
  - egy origón átmenő sík összes vektora,
  - a tér összes vektora.

## D Kifeszített altér

$\mathcal{V}$  vektortér, a  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathcal{V}$  vektorok

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k$$

alakú lineáris kombinációinak halmazát a  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  vektorok által **kifeszített altérnek** nevezzük, és  $\text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$ -val vagy  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$ -val jelöljük.

## A „kifeszített altér” altér?

### Á A kifeszített altér altér

A  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathcal{V}$  vektorok által kifeszített  $\text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$  vektorhalmaz  $\mathcal{V}$  egy altére.

B Legyen  $\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k$ , és  $\mathbf{v} = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \dots + d_k\mathbf{v}_k$  a  $\text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k)$  két tetszőleges vektora, és legyen  $x \in \mathbb{R}$  tetszőleges valós.

Ekkor

$$x\mathbf{u} = (xc_1)\mathbf{v}_1 + (xc_2)\mathbf{v}_2 + \dots + (xc_k)\mathbf{v}_k \in \text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k),$$

és

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (c_1 + d_1)\mathbf{v}_1 + \dots + (c_k + d_k)\mathbf{v}_k \in \text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k).$$

# Az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai

## T Homogén és inhomogén egyenletrendszer megoldásai

Az inhomogén lineáris  $[A|b]$  mátrixú egyenletrendszerre:

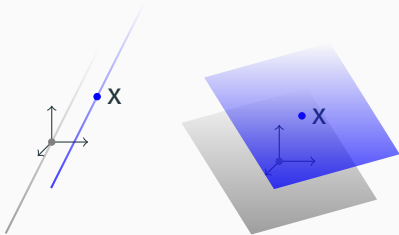
inhomogén  
általános  
megoldása

=

inhomogén egy  
partikuláris  
megoldása

+

homogén  
általános  
megoldása



# Az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásai

B Legyen  $\mathbf{x}$  az inhomogén egyenletrendszer egy partikuláris megoldása, és jelölje  $\mathcal{H}$  a homogén,  $\mathcal{I}$  az inhomogén egyenletrendszer megoldáshalmazát.

$$\mathbf{x} + \mathcal{H} \subseteq \mathcal{I}:$$

$$\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = b_i,$$

$$\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{y} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$\rightsquigarrow \mathbf{a}_{i*} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{y} = b_i + 0 = b_i$$

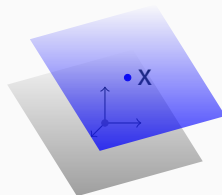
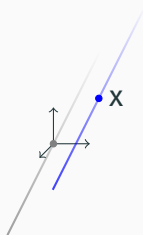
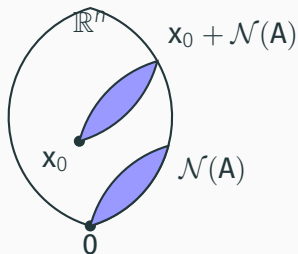
$$\rightsquigarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{I}$$

$\mathbf{x} + \mathcal{H} \supseteq \mathcal{I}$ : Meg kell mutatnunk, hogy  $\forall \mathbf{z} \in \mathcal{I} \exists \mathbf{y} \in \mathcal{H}$ , hogy  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ :

$$\mathbf{a}_{i*} \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{x}) = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = b_i - b_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

$$\rightsquigarrow \mathbf{z} - \mathbf{x} \in \mathcal{H}$$

- D Az inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmaza egy **altér eltoltja**, melyet geometriai nyelven **affin altereknek** nevezünk.



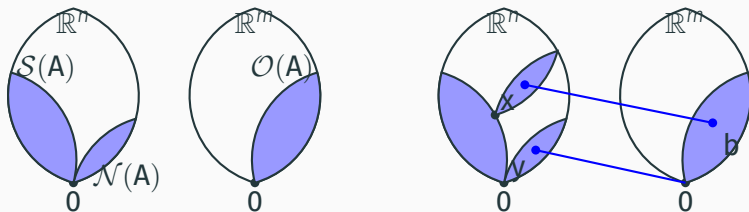
- m Az inhomogén egyenletrendszer összes megoldása a homogén összes megoldásának – azaz  $\mathcal{N}(A)$ -nak – az inhomogén valamelyik megoldásával való eltoltja. Mindegy melyik megoldást választjuk!

# Sortér, oszloptér

## D Sortér, oszloptér

Egy mátrix oszlopvektorai által kifeszített alteret **oszloptérnek**, a sorvektorai által kifeszített alteret **sortérnek** nevezzük.

- Az  $m \times n$ -es valós  $\mathbf{A}$  mátrix sortere  $\mathbb{R}^n$  altere, oszloptere  $\mathbb{R}^m$  altere.
- Az  $\mathbf{A}$  sorterét  $\mathcal{S}(\mathbf{A})$ , oszlopterét  $\mathcal{O}(\mathbf{A})$  jelöli.



## Á Inhomogén lineáris egyenletrendszer megoldhatósága

Az  $[A|b]$  mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha  $b$  előáll az  $A$  oszlopainak lineáris kombinációjaként, azaz  $b$  benne van az  $A$  oszlopterében. A lineáris kombináció együtthatói megegyeznek a megoldásvektor koordinátaival.

- P** Határozzuk meg, hogy a  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 2)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, -2, 1)$  és  $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 1)$  vektorok által kifeszített altérnek eleme-e az  $\mathbf{u} = (-1, 2, -3, 6)$  vektor! Adjunk meg egy ezt bizonyító lineáris kombinációt! Mutassuk meg, hogy a  $\mathbf{w} = (-1, 2, -3, 4)$  vektor nem eleme az altérnek!
- M**  $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}$  ( $= \mathbf{w}$ ) megoldását keressük. A szimultán egyenletrendszer mátrixa  $[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3 \mid \mathbf{u} \ \mathbf{w}]$ .

$$\left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 & 4 \end{array} \right] \longrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

amiből  $(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, -2)$ , és  $\mathbf{w}$  valóban nem áll elő lineáris kombinációként, mert a  $\mathbf{w}$ -t tartalmazó egyenletrendszer ellentmondásos.

# Lineáris függetlenség eldöntése

**K**  $L: A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_k]$  Ekvivalens állítások:

- az  $a_1, a_2, \dots, a_k$  vektorok lineárisan függetlenek;
- az  $A$  együtthatómátrixú homogén lineáris egyrsz-nek a triviálison kívül nincs más megoldása;
- $A$  lépcsős alakjának  $\forall$  oszlopában van főelem, azaz  $r(A) = k$ .

**P** Mutassuk meg, hogy a 4-dimenziós  $(1, 2, 3, 4)$ ,  $(0, 1, 0, 1)$  és  $(1, 1, 1, 0)$  vektorok lineárisan függetlenek.

**M** A vektorokból képzett mátrix és lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eszerint a homogén lineáris egyrsz-nek csak egyetlen megoldása van, azaz az oszlopvektorok lineárisan függetlenek.

# Alterek tulajdonságai és az egyenletrendszerek

---

# Alterek tulajdonságai és az egyenletrendszerek

---

Bázis és dimenzió

## T Sor- és oszloptér változása elemi sorműveletek közben

Elemi sorműveletek közben

- a sortér nem változik,
- az oszlopvektorok olyan vektorokba transzformálódnak, melyek megőrzik az eredeti lineáris kapcsolatokat.

B Elemi sorműveletek közben a sortér nem csökken, sorművelet inverze is sorművelet  $\rightsquigarrow$  a sortér nem változik.

Az oszlopok közti lineáris kapcsolatok koordinátáinként fennállnak  $\rightsquigarrow$  elemi sorműveletek közben nem változnak.

- T** Legyen **B** az **A** mátrix egy lépcsős alakja. Ekkor
- **A** és **B** sortere megegyezik,
  - az **A** oszlopvektorai között lévő lineáris kapcsolatok azonosak a **B** ugyanolyan sorszámú oszlopai közti lineáris kapcsolatokkal,
  - **B** nemzérus sorvektorai lineárisan függetlenek,
  - a főelemek oszlopvektorai **A**-ban és **B**-ben is lineárisan függetlenek.
- m** Elemi sorműveletek közben az oszloptér változik!

## D Bázis

A  $\mathcal{V}$  vektortér **bázisán** olyan vektorrendszert értünk, mely

- lineárisan független és
- kifeszíti a  $\mathcal{V}$  teret (azaz generátorrendszer).

Az  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$  vektorokból álló halmazt az  $\mathbb{R}^n$  vektortér **standard bázisának** nevezzük.

- A zérustér bázisa az üreshalmaz!
- A standard bázis  $\mathbb{R}^n$  egy  $n$ -elemű bázisa.

## Á Bázis ekvivalens definíciói

!  $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\} \subseteq \mathcal{V}$  vektorok egy halmaza, ahol  $\mathcal{V}$  egy tetszőleges vektortér. A következő állítások ekvivalensek:

- $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{V}$  egy bázisa ( $\mathcal{B}$  független generátorrendszer);
- $\mathcal{B}$  minimális méretű halmaz, mely kifeszíti  $\mathcal{V}$ -t ( $\mathcal{B}$  minimális elemszámú generátorrendszer);
- $\mathcal{B}$  maximális méretű, független vektorokból álló halmaz  $\mathcal{V}$ -ben ( $\mathcal{B}$  maximális elemszámú független).

B Elég belátnunk, hogy egy minimális méretű generátorrendszer független vektorokból áll, és hogy egy maximális méretű független rendszer generátor.

**P** **Altér bázisának meghatározása** Határozzuk meg az  $(1, 1, 0, -2)$ ,  $(2, 3, 3, -2)$ ,  $(1, 2, 3, 0)$  és  $(1, 3, 6, 2)$  vektorok által kifeszített altér egy bázisát!

**1M** Sorvektorokból

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A bázis vektorai  $(1, 1, 0, -2)$ ,  $(0, 1, 3, 2)$ .

**2M** Oszlopvektorokból

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A  $(1, 1, 0, -2)$  és  $(2, 3, 3, -2)$  vektorok bázist alkotnak.

# Vektor felírása a bázisvektorok lineáris kombinációjaként

- P** Az  $(1, 1, 0, -2)$ ,  $(2, 3, 3, -2)$ ,  $(1, 2, 3, 0)$  és  $(1, 3, 6, 2)$  vektorok mindegyikét fejezzük ki az általuk kifeszített altér bázisvektorainak lineáris kombinációjaként!
- M** Oszlopvektorokkal, a redukált lécsős alakból:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A redukált lépcsős alakból látjuk, hogy például a harmadik oszlop a második és az első különbsége. Ezek alapján:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

# Vektor egy bázisra vonatkozó koordinátás alakja

- A redukált lépcsős alak nemzérus soraiból álló

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix azt mutatja, hogy az  $\mathcal{B}$  bázisban e négy vektor koordinátái rendre

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}.$$

- A  $\mathbf{v}$  vektor  $\mathcal{B}$  bázisbeli koordinátás alakjára a  $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$  vagy a  $(\mathbf{v})_{\mathcal{B}}$  alakot használjuk. Így írhatjuk azt is, hogy

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}, \text{ vagy egyszerűbben, hogy } [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

## T Bázis-tétel

Ha a  $\mathcal{V}$  vektortérnek van véges sok vektorból álló bázisa, akkor bármely két bázisa azonos számú vektorból áll.

- B L! a  $\mathcal{V}$  vektortérnek  $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ , és  $\mathcal{C} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_r\}$  két bázisa, ahol  $k < r$ .  
Mivel  $\mathcal{B}$  bázis  $\mathcal{V}$ -ben, ezért a  $\mathcal{C}$  bázis vektorai is kifejezhetők lineáris kombinációikként:

$$\mathbf{w}_i = a_{i1}\mathbf{v}_1 + a_{i2}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{ik}\mathbf{v}_k, \quad (i = 1, \dots, r). \quad (1)$$

A  $\mathcal{C}$  bázis vektorai lineárisan függetlenek, ezért a

$$c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \dots + c_r\mathbf{w}_r = \mathbf{0} \quad (2)$$

egyenlőség csak a  $c_1 = c_2 = \dots = c_r = 0$  konstansokra áll fenn.

Az (1) egyenlőségeit a (2) egyenletbe helyettesítve

$$c_1(a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{12}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{1k}\mathbf{v}_k) + c_2(a_{21}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{2k}\mathbf{v}_k) + \dots + c_r(a_{r1}\mathbf{v}_1 + a_{r2}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{rk}\mathbf{v}_k) = \mathbf{0},$$

aminek  $\mathcal{B}$  vektorai szerinti rendezése után kapjuk, hogy

$$(a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \dots + a_{r1}c_r)\mathbf{v}_1 + (a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{r2}c_r)\mathbf{v}_2 + \dots + (a_{1k}c_1 + a_{2k}c_2 + \dots + a_{rk}c_r)\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Ez azt jelenti, hogy a homogén lineáris

$$a_{11}c_1 + a_{21}c_2 + \dots + a_{r1}c_r = 0$$

$$a_{12}c_1 + a_{22}c_2 + \dots + a_{r2}c_r = 0$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{1k}c_1 + a_{2k}c_2 + \dots + a_{rk}c_r = 0$$

egyszerűnek a  $c_1 = c_2 = \dots = c_r = 0$  az egyetlen megoldása.

Az egyenletek száma  $<$  ismeretlenek száma ( $k < r$ )  $\nrightarrow$

Az indirekt feltevés helytelen, tehát a két bázis azonos méretű.

# Dimenzió és rang

## D Dimenzió

Ha a  $\mathcal{V}$  vektortérnek van véges bázisa, akkor **dimenzióján** egy bázisának elemszámát értjük, és e számot  $\dim \mathcal{V}$ -vel jelöljük.

## Á Dimenzió = rang

*Egy mátrix rangja, sorterének dimenziója és oszlopterének dimenziója megegyezik. Ebből következőleg  $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^T)$ .*

- B A mátrix rangja megegyezik a lépcsős alakjában lévő nemzérus sorainak számával. E sorok a sortér bázisát adják.
- Az oszlopterről láttuk, hogy a főelemeknek megfelelő oszlopok az eredeti mátrixban lineárisan függetlenek és kifeszítik az oszlopteret.
  - A sortere megegyezik  $\mathbf{A}^T$  oszlopterével.

- D Egy  $\mathbb{R}^n$ -beli vektorokból álló **vektorrendszer rangján** a vektorokból képzett mátrix rangját, vagy ami ezzel egyenlő, az általuk kifeszített altér dimenzióját értjük.
- P Határozzuk meg az **A** mátrix sorterének és nullterének dimenzióját!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

- M Az **A** redukált lépcsős alakja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A mátrix rangja 2, így sorterének dimenziója 2. A nulltér dimenziója = az egyrsz megoldásterének dimenziójával, ami = a szabad változók számával, ez 3.

## T Dimenziótétel – rang-nullitási tétel

Tetszőleges  $\mathbb{F}$  test és bármely  $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$  mátrix esetén a sortér dimenziójának és a nulltér dimenziójának (más szóval a mátrix rangjának és nullitásának) összege  $n$ , azaz

$$\dim(\mathcal{S}(\mathbf{A})) + \dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = n, \quad \text{azaz} \quad r(\mathbf{A}) + \text{null}(\mathbf{A}) = n.$$

- B A mátrix sortérének dimenziója = a mátrix rangja = az  $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$  mátrixú egyenletrendszerben a kötött változók száma.
- A redukált lépcsős alakból való származtatás következtében a nullteret kifeszítő minden megoldásvektorban az összes szabad változóhoz tartozó koordináta 0, azt az egyet kivéve, amelyikhez a vektor tartozik. Így viszont mindegyik vektor független a többitől, vagyis e vektorok függetlenek, és mivel kifeszítik a nullteret, számuk megadja a nulltér dimenzióját.

# Alterek tulajdonságai és az egyenletrendszerek

---

A lineáris algebra alaptétele és a 4  
kitüntetett altér

## Vektorokra merőleges altér

- P** Határozzuk meg az összes olyan vektort  $\mathbb{R}^4$ -ben, mely merőleges a  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 2)$  és  $\mathbf{v}_2 = (-1, 2, -2, 1)$  vektorok mindegyikére!
- M** Olyan  $\mathbf{x}$  vektort keresünk, melyre  $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x} = 0$  és  $\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{x} = 0$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

amiből  $\mathbf{x} = (-s - 2t, (s - 3t)/2, s, t)$ , azaz

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A megoldás tehát két vektor által kifeszített altér összes vektora.

# A sortér és a nulltér merőlegessége

## Á **A sortér és a nulltér merőlegessége**

*A valós  $\mathbf{A}$  mátrix sortérének bármely  $\mathbf{s}$  vektora és nullterének tetszőleges  $\mathbf{x}$  vektora merőleges egymásra, azaz  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{x} = 0$ .*

B A sortér minden vektora az  $\mathbf{A}$  sorvektorainak valamely  $c_1, \dots, c_m$  skalárokkal vett lineáris kombinációja.

$$\begin{aligned}\mathbf{s} \cdot \mathbf{x} &= (c_1 \mathbf{a}_{1*} + c_2 \mathbf{a}_{2*} + \dots + c_m \mathbf{a}_{m*}) \cdot \mathbf{x} \\ &= c_1 \mathbf{a}_{1*} \cdot \mathbf{x} + c_2 \mathbf{a}_{2*} \cdot \mathbf{x} + \dots + c_m \mathbf{a}_{m*} \cdot \mathbf{x} \\ &= c_1 0 + c_2 0 + \dots + c_m 0 = 0.\end{aligned}$$

# Alterek merőlegessége

## D Merőleges alterek

Egy vektortér két altere **merőleges**, ha bárhogy választva egy vektort az egyik és a másik altérből, azok merőlegesek egymásra.

## D Altér merőlegese

A  $\mathcal{V}$  vektortér egy  $\mathcal{W}$  alterére merőleges vektorok alterét a  $\mathcal{W}$  **merőlegesének** nevezzük és  $\mathcal{W}^\perp$ -pel jelöljük (amit olvashatunk „ $\mathcal{W}$  merőlegesének” vagy „ $\mathcal{W}$  perp”-nek).

## D Kiegészítő alterek

A  $\mathcal{V}$  vektortér egy  $\mathcal{U}$  és  $\mathcal{W}$  altere **kiegészítő alterek**, ha  $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{\mathbf{0}\}$ , és  $\mathcal{V}$  minden vektora előáll egy  $\mathcal{U}$ - és egy  $\mathcal{W}$ -beli vektor összegeként.

# A lineáris algebra alaptétele

## T A lineáris algebra alaptétele

Minden valós mátrix sortere és nulltere merőleges kiegészítő alterei egymásnak.

- B Legyen  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Láttuk, hogy a sortér merőleges kiegészítő altere a nulltér, azaz  $\mathcal{S}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A})$ .
- Ha  $\mathbf{v} \in \mathcal{N}(\mathbf{A})^\perp$ , akkor azt új sorként hozzárakva  $\mathbf{A}$ -hoz, a 
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{v}^\top \end{bmatrix}$$
 együtthatómátrixú egyenletrendszernek ugyanaz lesz a megoldáshalmaza, vagyis  $\mathcal{N}(\mathbf{B}) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$ , tehát a dimenziótétel miatt az új sortér dimenziója is ugyanaz, mint a régié, azaz  $\dim(\mathcal{S}(\mathbf{B})) = \dim(\mathcal{S}(\mathbf{A}))$ .
  - Mivel  $\mathcal{S}(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{S}(\mathbf{B})$ , és így  $\mathcal{S}(\mathbf{A}) \leq \mathcal{S}(\mathbf{B})$ , ezért  $\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \mathcal{S}(\mathbf{B})$ , tehát  $\mathbf{v} \in \mathcal{S}(\mathbf{A})$ , azaz  $\mathcal{N}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{S}(\mathbf{A})$ .

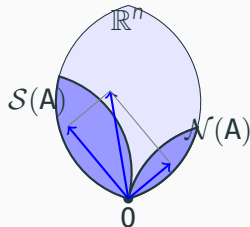
## B folyt. (egyértelmű felbonthatóság merőleges összetevőkre)

- A sortér és a nulltér egy-egy bázisának uniója  $\mathbb{R}^n$  egy bázisa.
- a sortér egy  $\{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_r\}$  bázisa és a nulltér egy  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-r}\}$  bázisa együtt a tér bázisát adják ( $n - r$  ld. dimenziótétel), ui.

$$\underbrace{c_1 \mathbf{s}_1 + \dots + c_r \mathbf{s}_r}_{\mathbf{c}} + \underbrace{d_1 \mathbf{e}_1 + \dots + d_{n-r} \mathbf{e}_{n-r}}_{\mathbf{d}} = \mathbf{0}$$

lineáris kombináció csak úgy állhat fenn, ha  $\mathbf{c}$  és  $\mathbf{d}$  a két altér metszetében van, így azok mindketten a nullvektorok, és így  $c_1 = \dots = c_r = d_1 = \dots = d_{n-r} = 0$ .

**K**  $\mathbb{R}^n$  minden vektora egyértelműen áll elő sortér- és nulltérbeli vektorok összegeként (hisz a fenti bázisbeli felbontásuk egyértelmű).



## T A négy kitüntetett altér

Tekintsük az  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mátrixot. Akkor a következő állítások teljesülnek:

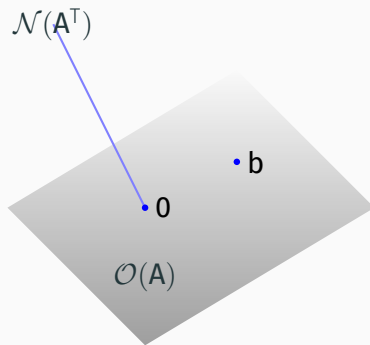
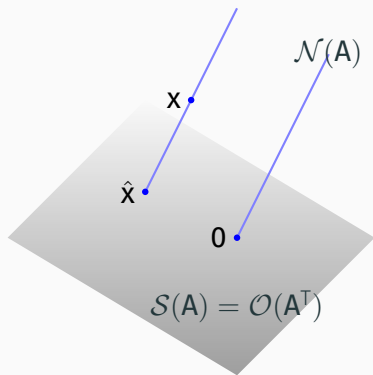
1.  $\mathcal{S}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{O}(\mathbf{A}^\top)^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A})$ ,  $\mathcal{O}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\top)$ .
2.  $\mathbb{R}^n$  minden vektora egyértelműen felbomlik egy  $\mathcal{S}(\mathbf{A}) = \mathcal{O}(\mathbf{A}^\top)$ -beli és egy  $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ -beli vektor összegére,
3.  $\mathbb{R}^m$  minden vektora egyértelműen felbomlik egy  $\mathcal{O}(\mathbf{A})$ -beli és egy  $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\top)$ -beli vektor összegére.

# A lineáris egyenletrendszer megoldásainak jellemzése

## T Lineáris egyenletrendszer megoldásai

Minden valós együtthatós megoldható (konzisztens) lineáris egyenletrendszerre igazak a következő állítások:

1. egyetlen megoldása esik az együtthatómátrix sorterébe;
2. a sortérbe eső megoldás az összes megoldás közül a legkisebb abszolút értékű;
3. az összes megoldás előáll úgy, hogy a sortérbe eső megoldáshoz hozzáadjuk a homogén rész vmely megoldását.



**B** homogén lineáris egyenletrendszerekre semmitmondó, mert csak a nullvektor esik a sortérbe.

**1** Tfh  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{S}(\mathbf{A})$  két megoldása az  $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$  egyenletrendszernek.  $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = b_i$ , így  $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x}_1 = b_i$  és  $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x}_2 = b_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), így  $\mathbf{a}_{i*} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = b_i - b_i = 0$ , vagyis  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathcal{N}(\mathbf{A})$ , metszete a sortérrel a  $\mathbf{0}$ -vektor, azaz  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ , vagyis  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$ .

Legyen az  $\mathbf{x}$  mo. felbontása sortérbeli és nulltérbeli vektor összegére

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\mathcal{S}} + \mathbf{x}_{\mathcal{N}}.$$

E megoldásvektort beírva az  $i$ -edik egyenletbe kapjuk, hogy

$$b_i = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a}_{i*} \cdot (\mathbf{x}_{\mathcal{S}} + \mathbf{x}_{\mathcal{N}}) = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x}_{\mathcal{S}} + \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x}_{\mathcal{N}} = \mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x}_{\mathcal{S}}.$$

Eszerint bármely megoldás sortérbeli összetevője is megoldása az egyenletrendszernek!

- 3 Egyúttal beláttuk, hogy az összes megoldás e sortérbeli megoldás és a homogén egy megoldásának összege. Az előző egyenlőségekből az is kiolvasható, hogy az  $\mathbf{x}_S$  megoldáshoz bármely nulltérbeli vektort adva az egyenletrendszer egy megoldását kapjuk.
- 2  $\mathbf{x}_S \perp \mathbf{x}_N$ , így a Pithagorász-tétel szerint

$$\mathbf{x}^2 = \mathbf{x}_S^2 + \mathbf{x}_N^2 \geq \mathbf{x}_S^2, \text{ azaz } |\mathbf{x}| \geq |\mathbf{x}_S|.$$

## A sortérbe eső megoldás meghatározása

- P** Oldjuk meg az  $x + 4y + 8z + 12w = 450$  egyenletrendszert úgy, hogy a partikuláris megoldás minimális abszolút értékű legyen!
- M** A sorteret az  $(1, 4, 8, 12)$  vektor feszíti ki, ennek egy skalárszorosát keressük.

Mivel  $1^2 + 4^2 + 8^2 + 12^2 = 15^2 = 225$ , ezért a sortérbe eső egyetlen megoldás  $(x, y, z, w) = 2 \cdot (1, 4, 8, 12) = (2, 8, 16, 24)$ .

A homogén egyenletrendszer összes megoldását meghatározva majd hozzáadva kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 16 \\ 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

az összes megoldás.

## A sortérbe eső megoldás meghatározása 2

- P** Állítsuk elő a következő egyenletrendszer összes megoldását a sortérbe eső egyetlen megoldás segítségével.

$$x + y + z + w = 3$$

$$x + y - z - w = 1$$

- M** A bővített mátrix és redukált lépcsős alakja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Az egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - s \\ s \\ 1 - t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

## A sortérbe eső megoldás meghatározása 3

- A nullteret a  $(-1, 1, 0, 0)$  és a  $(0, 0, -1, 1)$  vektorok feszítik ki. A sortérbe eső megoldásvektor ezekre merőleges:

$$-x + y = 0$$

$$-z + w = 0$$

- Ezekkel kibővítve az egyenletrendszert, majd megoldva

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

tehát a sortérbe eső mo.:  $(1, 1, 1/2, 1/2)$ , az összes mo.:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$