



# Lineáris algebra mérnököknek

BMETE93BG20



## Egyenletrendszerek megoldása

2018-09-27



## Wettl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK

E lecke befejezése után a hallgató

- egy valós, komplex vagy  $\mathbb{Z}_p$ -beli elemű mátrixot elemi sorműveletekkel (redukált) lépcsős alakra tud hozni,
- meg tudja határozni egy valós (komplex,  $\mathbb{Z}_p$ -beli) együtthatós lineáris egyenletrendszer összes megoldásainak halmazát Gauss-, vagy Gauss–Jordan-módszerrel, vagy igazolni tudja, hogy az egyenletrendszer inkonzisztens,
- fel tudja írni egy egyenes egy sík vagy egy hipersík explicit egyenletrendszerét, és egy hipersík implicit egyenletrendszerét, adott megfelelő számú illeszkedő pontból vagy egy illeszkedő pontból és megfelelő számú generátorvektorból,
- meg tudja határozni adott hipersíkok metszetének explicit vektoregyenletét, vagy bizonyítani tudja, hogy az üres,
- el tudja dönteni, hogy adott vektorok lineárisan függetlenek-e, fel tud írni egy vektort adott vektorok lineáris kombjaként, vagy igazolni tudja, hogy az nem lehetséges.

# Lineáris alakzatok egyenletei

---

		Explicit vektoregyenlet	Implicit egyenlet(rendszer)
Síkban	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$Ax + By = C$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y = C_1$ $A_2x + B_2y = C_2$
Térben	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	$Ax + By + Cz = D$
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	$A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ $A_3x + B_3y + C_3z = D_3$
$\mathbb{R}^n$ -ben	hipersík	???	$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$
	sík	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$	???
	egyenes	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$	???
	pont	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$	???

# Két geometriai modell

---

# Lineáris egyenlet

D Az

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (1)$$

alakra hozható egyenletet az  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ismeretlenekben **lineáris egyenletnek** nevezzük, ahol  $a_1, a_2, \dots$  és  $a_n$ , valamint  $b$  konstansok. Az  $a_1, a_2, \dots$  és  $a_n$  konstansokat az egyenlet **együtthatóinak**,  $b$ -t az egyenlet **konstans tagjának** nevezzük.

P Lineárisak-e az  $x, y$ , illetve az  $x, y$  és  $z$  változóiban az alábbi egyenletrendszerek?

- $xz - y = 0, x + 2y = 3z^2$ , (M: I,N)
- $x \sin z + y \cos z + y = z^2, 0 = 2$ , (M: I,N)
- $x = y, x = 3 - y + 2z, x - y + 0z = 0, x + y - 2z = 3$ , (M: I,I)
- $\frac{x}{z} + \frac{y}{z} + 2 = 0, x + y + 2z = 0$ , (M: I,N)

# Lineáris egyenletrendszer

- D **Lineáris egyenletrendszer**en ugyanazokban a változóiban lineáris egyenletek egy véges halmazát értjük. Általános alakja:

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, & & & (*) \end{array}$$

ahol  $x_1, x_2, \dots, x_n$  az ismeretlenek,  $a_{ij}$  együttható,  $b_i$  konstans tag.  
Ha mindegyik egyenlet konstans tagja 0, a lineáris egyenletrendszer **homogén**, egyébként **inhomogén**.

- Lineáris az  $x$  és  $y$  változóiban:

$$\begin{array}{cccc} ax + y = 2a & 3x - y = 0 & x + y = 1 & \\ x - \frac{1}{a}y = 0 & -x + 2y = 0 & 0 = 2 & x + y = 1 \\ & 0 = 0 & & \end{array}$$

# Lineáris egyenletrendszer megoldása

- D** Azt mondjuk, hogy a rendezett  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  szám- $n$ -es (vagy vektor) **megoldása** (**megoldásvektora**) a (\*) ersz-nek, ha megoldása minden egyenletnek (minden egyenletet kielégít az  $x_1 = u_1, x_2 = u_2, \dots, x_n = u_n$  helyettesítés). Az összes megoldás halmaza a **megoldáshalmaz**. Egy ersz **konzisztens** (vagy **megoldható**), ha megoldáshalmaza nem üres. Ellenkező esetben az ersz **inkonzisztens** (**nem megoldható**).
- m** Matekban nem használjuk: **túlhatározott**, ha az egyenletek száma nagyobb az ismeretlenekénél, **alulhatározott**, ha kisebb.
- P** Tekintsük az alábbi három egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcl} x + y = 3 & x + y = 3 & x = 2 \\ x + 2y = 4 & y = 1 & y = 1 \end{array} \quad (2)$$

Mindháromnak  $(x, y) = (2, 1)$  az egyetlen megoldása.



# Ekvivalens lineáris egyenletrendszerek

D Azonos ismeretlenekkel felírt két egyenletrendszert **ekvivalensnek** nevezünk, ha megoldásaik halmaza azonos.

## T Ekvivalens átalakítások

Egyenletrendszert ekvivalens egyenletrendszerbe visznek át:

1. két egyenlet felcserélése;
2. egy egyenlet nem nulla számmal való szorzása;
3. egy egyenlet konstansszorosának egy másikhoz adása.
4. egy  $0 = 0$  alakú egyenlet elhagyása (csökkenti az egyenletek számát!)

- Fejléc nélküli táblázat: **mátrix** (elemei azonos algebrai struktúrából valók).
- Általános alakja:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad \mathbf{A} = [a_{ij}]$$

- az első index jelöli a sor, a második az oszlop számát
- Az  $\mathbf{A}$  mátrix  $i$ -edik sorára az  $(\mathbf{A})_{i*}$ ,  $j$ -edik oszlopára az  $\mathbf{a}_j$  vagy az  $(\mathbf{A})_{*j}$ , elemére az  $(\mathbf{A})_{ij}$  jelölés is használatos.

# Egyenletrendszer együtthatómátrixa és (bővített) mátrixa

- D egyenletrendszer **együtthatómátrixa** az egyenletek együtthatóit, míg **mátrixa** (**bővített mátrixa**) az egyenletek együtthatóit és konstans tagjait tartalmazza.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right].$$

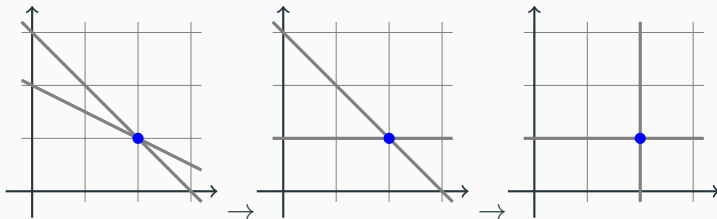
- J Az  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  vektor mátrixjelölése:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

## Sormodell 2 ismeretlennel: egyenesek metszete

P Egy egyenletrendszer és megoldása:

$$\begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x + y = 3 \\ y = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array}$$



## Sormodell 2 ismeretlennel: egyenesek metszete

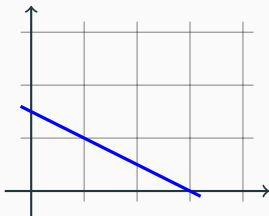
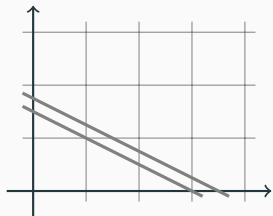
P Két másik egyenlet:

$$x + 2y = 3$$

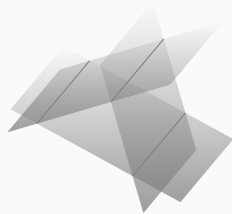
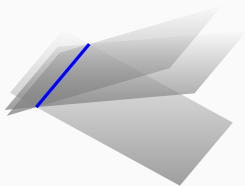
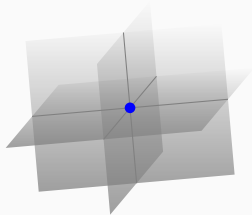
$$x + 2y = 3$$

$$2x + 4y = 7$$

$$2x + 4y = 6$$



## Sormodell 3 ismeretlennel: síkok metszete



## Á Sormodell: hipersíkok metszete

*Ha egy  $\mathbb{F}$  fölötti  $n$ -ismeretlenes lineáris egyenletrendszer  $m$  olyan egyenletből áll, melyek egyikének bal oldalán sem 0 minden együttható, akkor az egyenletrendszer megoldása a nekik megfelelő  $m$  hipersík közös része  $\mathbb{F}^n$ -ben.*

- Az  $i$ -edik egyenlet:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

- Skalárszorzat alakban:

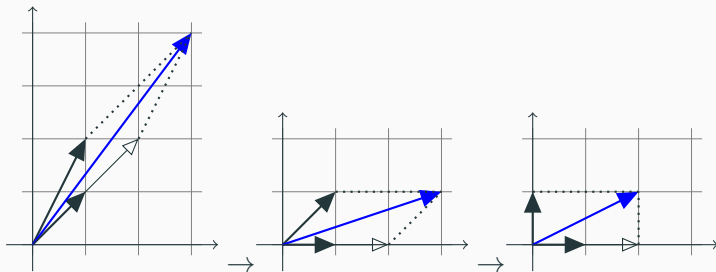
$$\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = b_i.$$

- Homogén esetben:  $\mathbf{a}_{i*} \cdot \mathbf{x} = 0$ , azaz a megoldásvektor merőleges az  $\mathbf{a}_{i*}$  vektorok mindegyikére.

# Oszlopmodell, 2 egyenlet: síkvektorok lineáris kombinációja

P Egy egyenletrendszer és megoldása:

$$\begin{array}{l} x + y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x + y = 3 \\ y = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \end{array}$$



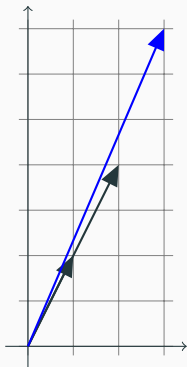


# Oszlopmodell, 2 egyenlet: síkvektorok lineáris kombinációja

P Két másik egyenlet:

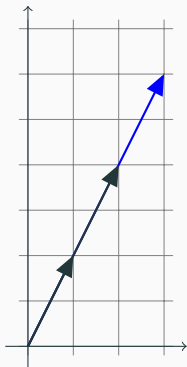
$$x + 2y = 3$$

$$2x + 4y = 7$$



$$x + 2y = 3$$

$$2x + 4y = 6$$



## Á Oszlopmodell

A (\*) egyenletrendszer a következő vektoregyenlettel ekvivalens:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \dots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} .$$

- E modell szerint egy egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha az együtthatómátrix oszlopvektorainak összes lineáris kombinációjából álló halmazban a konstans tagokból álló vektor is szerepel.

# Megoldás kiküszöböléssel

---

# Megoldás kiküszöböléssel

---

Gauss-módszer

# Elemi sorműveletek

- Egy mátrix sorain végzett alábbi műveleteket **elemi sorműveleteknek** nevezzük:
  - **Sorcseréje:** két sor cseréje ( $S_i \leftrightarrow S_j$ : az  $i$ -edik és a  $j$ -edik sorok cseréje.)
  - **Beszorzás:** egy sor beszorzása egy nemnulla számmal ( $cS_i$ : az  $i$ -edik sor beszorzása  $c$ -vel)
  - **Hozzáadás:** egy sorhoz egy másik sor konstansszorosának hozzáadása ( $S_i + cS_j$ : a  $j$ -edik sor  $c$ -szeresének az  $i$ -edik sorhoz adása).
- Hasonlóan definiálhatók az elemi oszlopműveletek ( $O_i \leftrightarrow O_j$ ,  $cO_i$ ,  $O_i + cO_j$ ).

## D Lépcsős alak

Egy mátrix (sor)lépcsős alakú, ha kielégíti a következő két feltételt:

- a csupa 0-ból álló sorok (ha egyáltalán vannak) a mátrix utolsó sorai;
- bármely két egymás után következő nem-0 sorban az alsó sor elején (legalább eggyel) több 0 van, mint a fölötte lévő sor elején.

A nemnulla sorok első zérustól különböző elemét főelemnek, vezéremnek vagy pivotelemnek hívjuk. Egy főelem oszlopának főoszlop vagy bázisoszlop a neve.

# Gauss-módszer

- A következő mátrixok lépcsős alakúak:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- A **Gauss-módszer**, **-kiküszöbölés** vagy **-elimináció**: lineáris egyenletrendszer megoldása lépcsős alakra hozással (oszloponként haladva).

## Gauss-módszer – egy megoldás

- Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-módszerrel:

$$\begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 3z = 4 \\ x + 2y + z = 5 \end{array} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{S_2 - 2S_1 \\ S_3 - S_1 \\ S_4 - S_1}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{S_2 \leftrightarrow S_3}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{S_4 - \frac{1}{2}S_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{S_4 - \frac{3}{2}S_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$x + y + 2z = 0 \quad x = 1$$

$$2y + z = 4 \rightarrow y = 3 \rightarrow (x, y, z) = (1, 3, -2)$$

$$-z = 2 \quad z = -2$$



## Gauss-módszer – végtelen sok megoldás

- Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-módszerrel:

$$\begin{array}{l} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{S_2 - S_1 \\ S_3 - 3S_1}} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{S_3 - 2S_2} \\ \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ \phantom{x_1 + 2x_2 +} 2x_3 + x_4 = -1 \end{array} \end{array}$$

- Köött változók:  $x_1$  és  $x_3$ , szabad változók:  $x_2, x_4, x_5$ , értékük tetszőleges: pl.  $x_2 = s, x_4 = t, x_5 = u$ .
- $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (\frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u, s, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, t, u)$ .

## Gauss-módszer – végtelen sok megoldás

- Írjuk fel oszlopok lineáris kombinációjaként!

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- F Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert!

$$x + 2y + 3z + 4w = 1$$

$$2x + 4y + 5z + 6w = 3$$

$$x + 2y + z = 3$$

# Gauss-módszer – homogén lineáris egyenletrendszer

- Oldjuk meg az előző ersz-hez tartozó homogén ersz-t.

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 = 0 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

# Lépcsős alakra hozás

## T Lépcsős alakra hozás

Bármely valós (vagy bármely test feletti) mátrix elemi sorműveletekkel **lépcsős** alakra hozható.

## B Az algoritmus:

1. nulloszlop letakarása
2. sorcsere után  $a_{11} \neq 0$
3.  $S_j - \frac{a_{j1}}{a_{11}}S_1$  után  $a_{11}$  alatt minden elem 0.
4. takarjuk le az első oszlopot és az első sort, és ha nincs több sor, VÉGE, ha van, menjünk az 1. pontra.

# Megoldás kiküszöböléssel

---

Gauss–Jordan-módszer

# Redukált lépcsős alak (rref)

## D Redukált lépcsős alak

Egy mátrix **redukált lépcsős alakú**, ha

1. lépcsős alakú;
  2. minden főelem egyenlő 1-gyel;
  3. minden főelem oszlopában a főelemen kívüli elemek 0-k;
- Vezéregyes
  - A következő mátrixok redukált lépcsős alakúak:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

# Redukált lépcsős alakra hozás

m Algoritmus: oszloponként haladva először *a* vezérelemek alatt, majd utána az *utolsó oszloptól kezdve fölöttük* eliminálunk!

P Hozzuk redukált lépcsős alakra az  $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$  mátrixot!

$$\text{M1} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{S_2 - S_1 \\ S_3 - 2S_1}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}S_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{S_3 + 4S_2 \\ S_1 - 3S_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{M2} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{S_2 - S_1 \\ S_3 - 2S_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}S_2 \\ S_1 - S_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Gauss–Jordan-módszer

$$\begin{array}{l} - \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{\dots} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{array}{l} 1/2 S_2 \\ -S_3 \end{array}]{\dots} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{array}{l} S_2 - \frac{1}{2} S_3 \\ S_1 - 2S_3 \end{array}]{\dots} \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{S_1 - S_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{array} \end{array}$$

- Tehát az egyenletrendszer egyetlen megoldása  $(x, y, z) = (1, 3, -2)$ .



# Gauss–Jordan-módszer – végtelen sok megoldás

$$- \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 8 & 3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\dots} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{1/2S_2 \\ S_1 - S_2}}$$

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3/2 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_4 + x_5 = \frac{3}{2} \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 = -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$- (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left( \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u, s, -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, t, u \right),$$

$$- \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - 2s - \frac{3}{2}t - u \\ s \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ t \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

# A redukált lépcsős alak egyértelműsége

## T A redukált lépcsős alak egyértelmű

Egy test elemeiből képzett minden mátrix redukált lépcsős alakra hozható. Ez az alak egyértelmű.

B Indirekt: **R** és **S** két redukált lépcsős alak. Válasszuk ki az első oszlopot, melyben különböznek, és az összes megelőző bázisoszlopot:

$$\hat{R} = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & r_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & r_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & r_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{vagy} \quad \hat{R} = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right]$$

## A redukált lépcsős alak egyértelműsége 2.

$$\hat{S} = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & s_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array} \right] \quad \text{vagy} \quad \hat{S} = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \end{array} \right]$$

- Mivel oszlopok kihagyása nem változtat a sorokvivalencián, ezért az  $\hat{R}$  és  $\hat{S}$  mátrixok ekvivalensek, azaz a hozzájuk tartozó két egyenletrendszernek ugyanaz a megoldása
  - $\rightsquigarrow$  vagy minden  $i = 1, \dots, k$  indexre  $r_i = s_i$ , vagy egyik egyenletrendszer sem oldható meg, tehát  $\hat{R} = \hat{S}$ , ellentmondás.
- m**  $\text{rref}(\mathbf{A})$  az a függvény, mely egy  $m \times n$ -es mátrixhoz a redukált lépcsős alakjából a zérussorok elhagyásával kapott mátrixot rendeli.

# Szimultán egyenletrendszerek

---

$$x + y + z = 3 \quad u + v + w = 3 \quad r + s + t = 0$$

$$\mathbf{P} \quad 2x + 3y + 2z = 7 \quad 2u + 3v + 2w = 7 \quad 2r + 3s + 2t = 0$$

$$2x + 2y + 3z = 6 \quad 2u + 2v + 3w = 7 \quad 2r + 2s + 3t = 1$$

$$\mathbf{M} \quad \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 7 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 7 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{S_2 - 2S_1 \\ S_3 - 2S_1}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{S_1 - S_2 \\ S_1 - S_3}}$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

Ebből leolvasható mindhárom egyenletrendszer megoldása:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$