BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Lineáris algebra mérnököknek

BMETE93BG20

Az $\mathbb{R}^n$ tér

MGFEA 2019-09-17

Wettl Ferenc
ALGEBRA TANSZÉK

Célkitűzések

E lecke befejezése után a hallgató

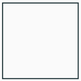
- el tudja végezni az $\mathbb{R}^n$ tér vektorműveleteit beleértve vektorok szögének és távolságának meghatározását,
- fel tudja írni azt az egyenletrendszert, melynek segítségével eldönthető, hogy egy vektorrendszer lineárisan független-e,
- fel tudja írni azt az egyenletrendszert, melynek segítségével egy adott vektor kifejezhető egy adott vektorrendszer vektorainak lineáris kombinációjaként,
- fel tud bontani egy vektort egy másikkal párhuzamos és merőleges összetevők összegére.

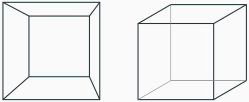
Az $\mathbb{R}^n$ vektortér

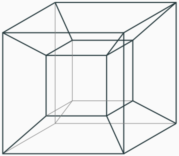
D $\mathbb{R}^n$ a rendezett valós szám-n-esek halmaza (más szóhasználattal: n-dimenziós vektorok tere, azaz vektortér).

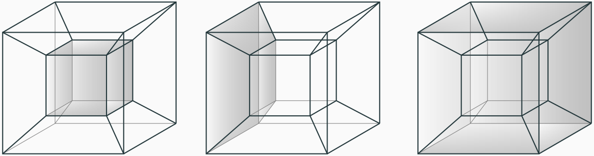
- 4-dimenziós kocka

1D:

2D: 

3D: 

4D: 



D

Vektorműveletek definíciói

Legyen $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ az $\mathbb{R}^n$ két tetszőleges vektora. Két vektor összegén és egy vektor c-szeresén az

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$
$$c\mathbf{u} = (cu_1, cu_2, \ldots, cu_n).$$

$\mathbb{R}^n$-beli vektorokat értjük.

T

Az összeadás és skalárral szorzás tulajdonságai

L! $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges, $c, d \in \mathbb{R}$, jelölje $\mathbf{0}$ a $(0, 0, \ldots, 0)$ vektort. Ekkor

A1	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$	fölcserélhető (kommutatív)
A2	$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$	csoportosítható (asszociatív)
A3	$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$	zérusvektor
M1	$c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$	a két szorzás kompatibilis
M2	$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$	szorzás 1-gyel
M3	$0\mathbf{u} = \mathbf{0}$	szorzás 0-val
D1	$c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$	disztributív
D2	$(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$	disztributív

B Mindegyik visszavezethető a valós számok algebrai tulajdonságaira. Pl: *A1* bizonyítása:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}+\mathbf{v} &= (u_1+v_1, u_2+v_2, \dots, u_n+v_n)\\ &= (v_1+u_1, v_2+u_2, \dots, v_n+u_n)\\ &= \mathbf{v}+\mathbf{u}.\end{aligned}$$

m $\mathbf{u}$ ellentettjén a $-\mathbf{u}$-val jelölt vektort értjük, melyet $\mathbf{u}$-hoz adva a nullvektort kapjuk: $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0} \rightsquigarrow$ $-\mathbf{u}=(-1)\mathbf{u}=(-u_1,-u_2,\dots,-u_n) \rightsquigarrow \mathbf{u}-\mathbf{v}=\mathbf{u}+(-\mathbf{v})$.

- A skalár hátra is írható: $c\mathbf{u}=\mathbf{u}c$, $\mathbf{u}/c=\frac{1}{c}\mathbf{u}$
- *A1–A3* az összeadás (addició), *M1–M3* a szorzás (multiplikáció), *D1–D2* a két művelet közös disztributív tulajdonságait írják le.
- A vektortér általános fogalma erre épül, mivel sok matematikai objektum rendelekezik e tulajdonságokkal. Például a folytonos valós függvények, a differenciálható valós függvények, a polinomok, a legföljebb 3-adfokú polinomok,...

Lineáris függetlenség és függőség

Vektorok lineáris függetlensége

D **Lineáris kombináció**

Vektorok lineáris kombinációján skalárszorosaik összegét értjük. Konkrétan: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ egy lineáris kombinációja a $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k$ vektor, ahol $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok. Az üres vektorhalmaz bármely lineáris kombinációja a nullvektor.

D **Vektorok lineáris függetlensége**

Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v}$ vektor lineárisan független a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_k\}$ vektorrendszertől, ha $\mathbf{v}$ nem fejezhető ki e vektorok lineáris kombinációjaként. Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,...$\mathbf{v}_k$ vektorok lineárisan függetlenek ha e vektorok egyike sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként.

D **Vektorok lineáris összefüggősége**

Egy vektorrendszer lineárisan összefüggő, ha nem független, azaz ha van olyan vektora, mely kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként.

Á Az egyetlen vektorból álló vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha a vektor nem a zérusvektor (tehát az $\mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$ vektorrendszer lineárisan összefüggő).

Á Az üres vektorrendszer lineárisan független.

D **Generátorrendszer**

Azt mondjuk, hogy a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ vektorok generátorrendszert alkotnak, ha a vektortér minden vektora előáll ezek lineáris kombinációjaként.

D **Bázis**

Egy vektortér független vektorokból álló generátorrendszerét bázisnak nevezzük.

A standard bázis

D **Standard bázis**

Az $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$,..., $\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ vektorokból álló halmazt az $\mathbb{R}^n$ vektortér standard bázisának nevezzük.

T **A standard bázis bázis**

Az $\mathbb{R}^n$-beli $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$,..., $\mathbf{e}_n$ vektorok bázist alkotnak.

B Függetlenek: $\mathbf{e}_1$ nem áll elő a többi vektor lineáris kombinációjaként, hisz azok első koordinátája 0, így bármely lineáris kombinációjukban is 0 az első koordináta, $\mathbf{e}_1$-ben pedig 1. Hasonlóan a többire.

\- Generátorrendszer: egy tetszőleges $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ vektorra

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n) = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \ldots + v_n\mathbf{e}_n,$$

tehát minden vektor előáll az $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ lin. komb.-jaként.

Lineáris függetlenség

T

Lineáris függetlenség

Tetszőleges $\mathbb{R}^n$-beli $\mathcal{A} = \{\, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \,\}$ vektorrendszerre az alábbi két állítás ekvivalens:

1. $\mathcal{A}$ lineárisan független.
2. A zérusvektor csak egyféleképp – a triviális módon – áll elő $\mathcal{A}$ lineáris kombinációjaként. Másként fogalmazva, a c_1, c_2,..., c_k skalárokkal vett lineáris kombináció csak akkor lehet a nullvektor, azaz

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

csak akkor állhat fenn, ha $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$.

B Tfh a vektorrendszer csak egyetlen $\mathbf{a}$ vektorból áll.

- Ekkor a tétel azt állítja, hogy e vektor pontosan akkor lineáris független, azaz pontosan akkor nem a nullvektor, ha a $c\mathbf{a} = \mathbf{0}$ csak $c = 0$ esetén állhat fenn. Ez nyilvánvaló ✓
- Tfh a vektorrendszer legalább két vektorból áll.

  Kontrapozícióval bizonyítunk: $A \Rightarrow B$ (ha A, akkor B) állítást a vele ekvivalens $\neg B \Rightarrow \neg A$ (ha nem B, akkor nem A) állítással.
- ($\Leftarrow$) Megmutatjuk, hogy ha $c_1\mathbf{a}_1 + \ldots + c_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ csak $c_1 = \ldots = c_k = 0$ esetén állhat fenn, akkor semelyik $\mathbf{a}_i$ sem fejezhető ki a többi lin kombjaként ($i = 1, \ldots, k$).
- Tfh valamelyik – pl. a $\mathbf{a}_1$ – kifejezhető a többi lin kombjaként:

$$\mathbf{a}_1 = d_2\mathbf{a}_2 + \ldots + d_k\mathbf{a}_k,$$

  vagyis átrendezés után

$$(-1)\mathbf{a}_1 + d_2\mathbf{a}_2 + \ldots + d_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}.$$

  a $\mathbf{0}$-t előállítottuk nemtrivi lin kombként.

- ($\Rightarrow$) Megmutatjuk, hogy ha a vektorrendszer egyik vektora sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként, akkor egyedül csak a csupa zérus együtthatójú lineáris kombinációja lehet zérusvektor.
- Ismét kontrapozícióval bizonyítunk: ha van olyan – nem csupa 0 együtthatójú – lineáris kombináció, mely a nullvektorral egyenlő, azaz

  $$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \ldots + c_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0},$$

  de valamelyik együttható – például a c_1 – nem 0, akkor $\mathbf{a}_1$ kifejezhető a többi vektor lineáris kombinációjaként:

  $$\mathbf{a}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\mathbf{a}_2 - \ldots - \frac{c_k}{c_1}\mathbf{a}_k,$$

  ami bizonyítja az állítást.

$\mathbb{R}^n$ a standard skaláris szorzással

Skaláris szorzás

D **Skaláris szorzás $\mathbb{R}^n$-ben**

Legyen $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ és $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ az $\mathbb{R}^n$ tér két tetszőleges vektora. Skaláris szorzatukon a következő kifejezést értjük:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n.$$

P Legyen $\mathbf{u} = (2, 3, 4, 14)$ és $\mathbf{w} = (0, 3, 6, -2)$. Számítsuk ki $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ és $\sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$ értékét!

M $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 14 \cdot (-2) = 5.$

\- $\sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 14 \cdot 14} = \sqrt{225} = 15.$

A skaláris szorzás alaptulajdonságai

T **A skaláris szorzás alaptulajdonságai**

Legyen $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ az $\mathbb{R}^n$ három tetszőleges vektora, és legyen c egy teszőleges valós. Ekkor

S1	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$	kommutatív
S2	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$	disztributív
S3	$(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$	kompatibilis a két szorzás
S4	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ és $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \iff \mathbf{u} = \mathbf{0}$	pozitív definit

B A valósok tulajdonságaiból könnyen adódnak, pl. S1-et:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n \\ &= v_1 u_1 + v_2 u_2 + \ldots + v_n u_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}. \end{aligned}$$

m E négy tulajdonság vezet majd az euklideszi tér általános fogalmához.

D

Vektor hossza, abszolút értéke, normája

Az $\mathbf{u}$ vektor hosszán (abszolút értékén vagy euklideszi normáján) önmagával vett skaláris szorzatának gyökét értjük, melyet $|\mathbf{u}|$-val, illetve $\|\mathbf{u}\|$-val jelölünk:

$$|\mathbf{u}| := \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}. \tag{1}$$

D

Vektorok távolsága

A két vektor távolságán a különbségük abszolút értékét értjük:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := |\mathbf{u} - \mathbf{v}| \tag{2}$$

D

Egységvektor

Az egységnyi hosszúságú vektort egységvektornak nevezzük.

Szög

D **Vektorok szöge**

Az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorok (hajlás)szögének koszinusza az alábbi tört:

$$\cos(\mathbf{u},\mathbf{v})_\angle := \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \tag{3}$$

D **Vektorok merőlegessége**

Amh két vektor merőleges, ha skaláris szorzatuk 0.

m A fenti definíciók koordinátás alakja

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}\,,$$

$$\cos(\mathbf{u},\mathbf{v})_\angle = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}\,\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}}.$$

P **Vektorok szöge és távolsága**

Legyen $\mathbf{u} = (2, 3, 4, 14)$, $\mathbf{v} = (4, 6, -10, 10)$ és $\mathbf{w} = (0, 3, 6, -2)$. Számítsuk ki *(a)* az $\mathbf{u}$ abszolút értékét, *(b)* az $\mathbf{u}$ irányú egységvektort, *(c)* az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ távolságát, *(d)* az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{w}$ szögét.

M $|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2 + 14^2} = \sqrt{225} = 15.$

- egységvektor: $\frac{1}{15}(2, 3, 4, 14)$.
- A két vektor távolsága 15, ugyanis

$$\begin{aligned} d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sqrt{(2-4)^2 + (3-6)^2 + (4-(-10))^2 + (14-10)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 3^2 + 14^2 + 4^2} = 15. \end{aligned}$$

- A szög $\arccos \frac{1}{21}$, ugyanis

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{u}, \mathbf{w})_\angle &= \frac{2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 14 \cdot (-2)}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2 + 14^2}\sqrt{0^2 + 3^2 + 6^2 + (-2)^2}} \\ &= \frac{5}{15 \cdot 7} = \frac{1}{21}. \end{aligned}$$

Merőleges összetevő

T **Vektorral párhuzamos és merőleges összetevő**

Ha $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges és $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ egységvektor, akkor $\mathbf{b}$ felbomlik egy $\mathbf{e}$-vel párhuzamos és egy rá merőleges vektor összegére: $\mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})\,\mathbf{e} + (\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e})$.

B $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} \parallel \mathbf{e} \rightsquigarrow$ elég megmutatni: $((\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}) \perp (\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e})$

$$((\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}) \cdot (\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})(\mathbf{e} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})^2(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) = 0.$$

m $\mathbf{b}$-nek $\mathbf{e}$ egyenesére eső merőleges vetülete $\mathbf{proj}_{\mathbf{e}}\,\mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})\,\mathbf{e}$

m Ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{e} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ egységvektor: a $\mathbf{b}$ vektor $\mathbf{a}$ egyenesére eső merőleges vetülete $\mathbf{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a}$, ugyanis

$$\mathbf{proj}_{\mathbf{e}}\,\mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} = \left(\mathbf{b} \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right)\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \qquad \text{mivel } |\mathbf{a}||\mathbf{a}| = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$$

$$= \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\mathbf{a}$$

Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség

T **Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség**

Tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$ (azaz lineárisan összefüggők).

m ez biztosítja, hogy a vektorok szögének definíciója értelmes.

P Igazoljuk, hogy tetszőleges a_i, b_i $(i = 1, \ldots, n)$ valósokra

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

M Vonjunk négyzetgyököt mindkét oldalból. Így a CBS-egyenlőtlenséget kapjuk.

B Ha $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, akkor a tétel állításának mindkét része igaz, hisz egyenlőség áll fenn, és a két vektor lineárisan összefüggő.

\- Tegyük fel, hogy $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Ekkor legyen $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ a $\mathbf{v}$ irányú egységvektor. Alapötlet: az $\mathbf{u}$ vektor $\mathbf{e}$ egyenesére merőleges összetevőjének hossza, illetve annak négyzete nyilván nem negatív!

$$
\begin{aligned}
0 &\leq |\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}|^2 && |\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \text{ alkalmazása} \\
&= (\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}) \cdot (\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}) && \text{disztributivitás alkalmazása} \\
&= |\mathbf{u}|^2 - 2\,|\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}|^2 + |\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}|^2 && \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \text{ alkalmazása} \\
&= |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}|^2 && \mathbf{e} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \text{ visszahelyettesítése.} \\
&= |\mathbf{u}|^2 - \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|^2}{|\mathbf{v}|^2} && \text{átrendezés igazolja az állítást}
\end{aligned}
$$

\- $0 = |\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e}| \iff \mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} \iff \mathbf{u} \parallel \mathbf{e} \iff \mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ skalárszorosa $\iff$ a két vektor lineárisan összefüggő.

P Mennyi az $f(x, y, z) = x + 4y + 8z$ függvény maximuma az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ feltétel mellett?

M Az $x + 4y + 8z$ kifejezést tekintsük két vektor skaláris szorzatának és alkalmazzuk a CBS-egyenlőtlenséget!

- $x + 4y + 8z = (1, 4, 8) \cdot (x, y, z)$, így

$$(x + 4y + 8z)^2 \leqslant (1^2 + 4^2 + 8^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 81 \cdot 1 = 81.$$

  Ebből $x + 4y + 8z \leqslant \sqrt{81} = 9$.

- Ahol e becslésben $=$ áll, ott veszi fel a függvény a maximumát! Hol?
- A CBS-egyenlőtlenségben egyenlőség áll az egységgömb $(1, 4, 8)$ vektorral párhuzamos és azonos állású helyvektorú pontjában, tehát az $\frac{1}{9}(1, 4, 8)$ helyen (a $-\frac{1}{9}(1, 4, 8)$ helyen minimuma van).