BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Lineáris algebra mérnököknek

BMETE93BG20

Egyenes, sík

2019-09-13 Kf81

Wettl Ferenc
ALGEBRA TANSZÉK

Célkitűzések

E lecke befejezése után a hallgató

- fel tudja írni egy síkbeli egyenes vagy egy térbeli sík explicit vektoregyenletét és egyenletrendszerét valamint implicit egyenletét és vektoregyenletét megadott adatokból vagy egy másik alakjából,
- fel tudja írni egy térbeli egyenes explicit vektoregyenletét és egyenletrendszerét valamint implicit egyenletrendszerét és vektoregyenlet-rendszerét megadott adatokból vagy a másik alakjából.

Alakzat egyenletei

Geometriai alakzat implicit egyenlet(rendszer)e

D

Alakzat implicit egyenletrendszere

Egy (geometriai) alakzat egy adott koordináta-rendszerre vonatkozó (implicit) egyenlet(rendszer)én olyan, a koordinátákra felírt egyenletrendszert értünk, melynek egyszerre minden egyenletét kielégítik az alakzathoz tartozó pontok koordinátái, de más pontokéhoz tartozók nem.

Az egyenletrendszer pontokba mutató vektorokra felírt alakját (implicit) vektoregyenlet(rendszer)nek nevezzük.

P Az origó középű egységsugarú kör implicit egyenlete $x^2 + y^2 = 1$, míg implicit vektoregyenlete $|\mathbf{r}| = 1$ (ahol $\mathbf{r} = (x, y)$).

F Írjuk fel az xy-sík $(1, 0)$ és $(0, 1)$ pontján átmenő egyenes implicit egyenletét és vektoregyenletét!

M implicit egyenlet: $x + y = 1$
implicit vektoregyenlet: $(1, 1) \cdot \mathbf{r} = 1$

F Írjuk fel a tér $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ és $(0, 0, 1)$ pontján átmenő sík implicit egyenletét és vektoregyenletét!

M implicit egyenlet: $x + y + z = 1$
implicit vektoregyenlet: $(1, 1, 1) \cdot \mathbf{r} = 1$

F Írjuk fel a tér $(1, 0, 0)$ és $(0, 0, 1)$ pontján átmenő sík egy implicit egyenletrendszerét és vektoregyenletrendszerét!

M implicit egyenletrendszer: $x + z = 1$, $y = 0$
implicit vektoregyenletrendszer: $(1, 0, 1) \cdot \mathbf{r} = 1$, $(0, 1, 0) \cdot \mathbf{r} = 0$.

Geometriai alakzat explicit egyenlet(rendszer)e

D

Alakzat explicit egyenletrendszere

Egy alakzat egy adott koordináta-rendszerre vonatkozó explicit vagy paraméteres egyenletrendszerén olyan egyenletrendszert értünk, melyben az egyenletek bal oldalán a pontok koordinátáit megadó változók, jobb oldalán adott paraméterek függvényei szerepelnek.

Az alakzat explicit vektoregyenletén olyan egyenletet értünk, melynek bal oldalán az alakzat pontjaiba mutató $\mathbf{r}$ vektor, jobb oldalán paraméterektől függő vektorértékű függvény szerepel.

P Írjuk fel az $y = x^2$ egyenletű parabola explicit egyenletrendszerét és explicit vektoregyenletét!

M Válasszuk paraméternek a parabola egy pontjának első koordinátáját, azaz legyen $t = x$!

- Az explicit egyenletrendszer: $x = t$, $y = t^2$.
- Az explicit vektoregyenlet: az előző lépés paraméterválasztása most is megfelel!
- $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$.

m Hamarosan látni fogjuk, hogy a lineáris egyenletrendszer megoldása nem más, mint egy implicit egyenletrendszer átalakítása explicitté!

Irányvektor, normálvektor

D **Irányvektor**

A sík vagy a tér egy egyenesével párhuzamos tetszőleges nemzérus $\mathbf{v}$ vektort az egyenes irányvektorának nevezzük.

D **Normálvektor**

Egy síkbeli egyenesre merőleges, illetve a tér egy síkjára merőleges nemzérus vektort az egyenes, illetve a sík normálvektorának nevezzük.

Egyenes egyenlet(rendszer)ei

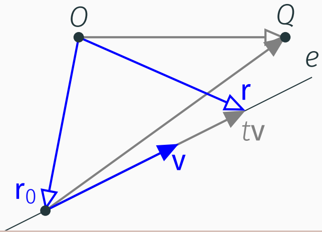
Egyenes explicit egyenlet(rendszer)ei

T **Egyenes explicit vektoregyenlete**

A sík vagy a tér minden egyenesének van

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ az egyenes egy irányvektora, és $\mathbf{r}_0$ az egyenes egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor.



B Mutasson $\mathbf{r}_0$ az egyenes egy tetszőleges pontjába. Világos, hogy az e egyenes bármely pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektorra $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v}$ valamilyen t valós számra, azaz $\mathbf{r}$ előáll $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban.

- Másrészt ha Q a sík egy tetszőleges, nem az e egyenesre eső pontja, akkor $\overrightarrow{OQ} - \mathbf{r}_0$ nem párhuzamos $\mathbf{v}$-vel, tehát nem is konstansszorosa, azaz $\overrightarrow{OQ} - \mathbf{r}_0 \neq t\mathbf{v}$ semmilyen t-re sem, így $\overrightarrow{OQ}$ nem áll elő $\mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban.
- Tehát az e tetszőleges pontjába mutató $\mathbf{r}$ vektor felírható $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ alakban, és ez csak e pontjaira igaz.

T

Egyenes explicit egyenletrendszere

A sík minden egyenesének van

$$x = x_0 + at$$
$$y = y_0 + bt$$

alakú egyenletrendszere, ahol $(a, b) \neq \mathbf{0}$ az egyenes egy irányvektora, és (x_0, y_0) az egyenes egy tetszőleges rögzített pontja. Hasonlóképp a tér minden egyenesének van

$$x = x_0 + at$$
$$y = y_0 + bt$$
$$z = z_0 + ct$$

alakú egyenletrendszere, ahol $(a, b, c) \neq \mathbf{0}$ az egyenes egy irányvektora, és (x_0, y_0, z_0) az egyenes egy tetszőleges rögzített pontja.

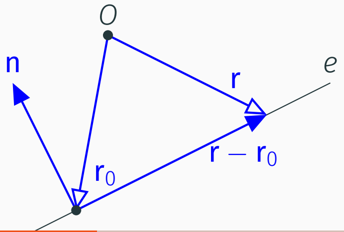
Síkbeli egyenes implicit egyenlet(rendszer)ei

T **Síkbeli egyenes implicit vektoregyenlete**

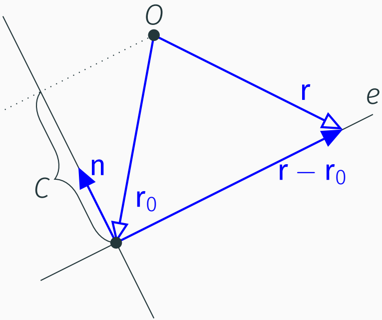
A sík minden egyenesének van $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$,és vele ekvivalens

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = C$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ az egyenes egy normálvektora, $\mathbf{r}_0$ az egyenes egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor és C konstans.



- Az alábbi ábráról leolvasható, hogy ha az **n** normálvektor egységvektor, akkor az C szám geometriai jelentése az, hogy az egyenes bármely pontjába mutató vektornak az **n** egyenesére eső merőleges vetületének C a hossza, azaz C az origónak a síktól való előjeles távolsága. (Az előjel azt mondja meg, hogy az origó a sík melyik oldalán van.)



T

Síkbeli egyenes (implicit) egyenlete

A sík minden egyenesének van

$$Ax + By = C \tag{1}$$

alakú egyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy egyenes egyenlete, ahol A és B közül nem mindkettő nulla, és $(-B, A)$ az egyenes egy irányvektora.

P

Síkbeli egyenes egyenletei

Írjuk fel a $(2, 3)$ és az $(1, 1)$ koordinátájú pontokon átmenő egyenes összes egyenlet(rendszer)ét!

M Számítsuk ki az egyenes irányvektorát és válasszunk ki egy pontot az egyenesen!

- $\mathbf{v} = (2,3) - (1,1) = (1,2)$, $\mathbf{r}_0 = (1,1)$.
- Az explicit vektoregyenletre vonatkozó képletbe helyettesítve: $\mathbf{r} = (1,1) + t(1,2)$.
- Az explicit egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 1 + 2t. \end{aligned}$$

- Az irányvektor $(1,2)$, amiből a normálvektor $(A,B) = (-2,1)$. Innen az egyenes implicit vektoregyenlete $(-2,1)\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$, azaz $(-2,1)\cdot(x-1, y-1) = 0$ vagy $(-2,1)\cdot(x,y) = (-2,1)\cdot(1,1)$, amiből az (implicit) egyenlete

$$2x - y = 1.$$

Sík egyenletei

T

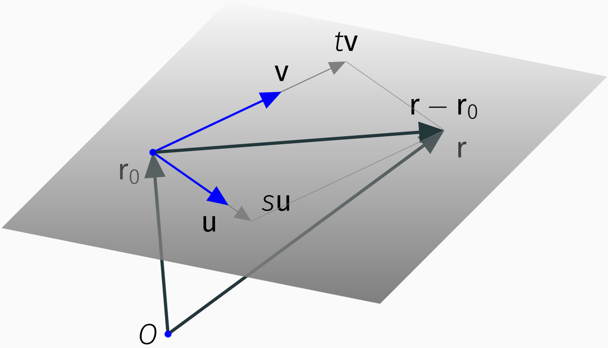
Sík explicit egyenletei

Bármely síknak van

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

alakú explicit vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy sík egyenlete, ahol $\mathbf{u} = (a_1, b_1, c_1)$ és $\mathbf{v} = (a_2, b_2, c_2)$ a sík két nem párhuzamos vektora és $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ a sík egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor. A fenti egyenlet ekvivalens alakja a sík explicit egyenletrendszere:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + sa_1 + ta_2 \\ y &= y_0 + sb_1 + tb_2 \\ z &= z_0 + sc_1 + tc_2 \end{aligned}$$



B Az $\mathbf{r}$ helyvektor végpontján át az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektorokkal párhuzamos egyenesek berajzolásából, hogy megfelelő t és s konstansokkal az $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ vektor előáll $t\mathbf{u}+s\mathbf{v}$ alakban, így $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+s\mathbf{u}+t\mathbf{v}$. E formula koordinátákra fölírt alakja adja a tétel második képletét.

T

Sík implicit vektoregyenlete

A háromdimenziós térben minden síknak van

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0,$$

és a vele ekvivalens

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = D$$

alakú vektoregyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy sík egyenlete, ahol $\mathbf{n}$ a sík egy normálvektora, $\mathbf{r}_0$ a sík egy tetszőleges, de rögzített pontjába mutató vektor és D konstans.

B L! $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Mivel $\mathbf{n} \perp \mathbf{u}$ és $\mathbf{n} \perp \mathbf{v}$, ezért $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$. Így

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) &= \mathbf{n} \cdot (s\mathbf{u} + t\mathbf{v}) \\
&= s\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} + t\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \\
&= 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

T

Sík implicit egyenlete

A háromdimenziós térben minden síknak van

$$Ax + By + Cz = D$$

alakú egyenlete, és minden ilyen alakú egyenlet egy sík egyenlete, ha A, B és C legalább egyike nem nulla, és $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$, ahol (x_0, y_0, z_0) a sík valamely pontja.

B Az $\mathbf{n} = (A, B, C)$ jelöléssel a sík egyenlete az implicit vektoregyenletből $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ alakra hozható, vagy ami vele ekvivalens, $Ax + By + Cz = D$ alakra.

P **Sík egyenletei**

Írjuk fel a $(0,-1,2)$ ponton átmenő, az $\mathbf{u}=(2,2,2)$ és $\mathbf{v}=(-1,1,5)$ vektorokkal párhuzamos sík egyenleteit!

M A sík explicit vektoregyenlete és explicit egyenletrendszere

$$(x,y,z)=(0,-1,2)+s(2,2,2)+t(-1,1,5),\ \text{ill.}\ \begin{cases} x = \phantom{-1+{}} 2s - t \\ y = -1+2s+t \\ z = 2+2s+5t \end{cases}$$

- A normálvektor: $(2,2,2)\times(-1,1,5)=(8,-12,4)$.
- $8(x-0)-12(y-(-1))+4(z-2)=0$, azaz 4-gyel való osztás és átrendezés után

$$2x-3y+z=5.$$

- $(2,-3,1)\cdot(x,y,z)=5$, vagy $(2,-3,1)\cdot(x,y+1,z-2)=0$.

Egyenes és sík

T

Térbeli egyenes implicit egyenletrendszere

A tér minden egyenesének van két egyenletből álló implicit egyenletrendszere. Legyen $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ az egyenes egy irányvektora. Az alábbi három egyenlet közül bármelyik két különböző, amelyik nem $0 = 0$ alakú az egyenes egy egyenletrendszerét adja:

$$b(x - x_0) = a(y - y_0)$$
$$c(x - x_0) = a(z - z_0)$$
$$c(y - y_0) = b(z - z_0)$$

- **B** Az egyenes paraméteres egyenletrendszeréből küszöböljük ki a paramétert.
- **-** Szorozzuk be az első egyenletet b-vel, a másodikat a-val, majd vonjuk ki a második egyenletet az elsőből, kapjuk, hogy $bx - ay = bx_0 - ay_0$. Hasonlóképp adódik $cx - az = cx_0 - az_0$ és $cy - bz = cy_0 - bz_0$. Átrendezzük.
- **?** Mi történik, ha a normálvektor két koordinátája 0?
- **-** Mivel $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, így legalább az egyik koordináta nem 0. Ha pl. $a \neq 0$, $b = c = 0$, akkor az egyenletrendszer

  $$y = y_0$$
  $$z = z_0$$

  alakú: ez két nem párhuzamos sík egyenlete. Metszetük egyenes. (A harmadik egyenlet $0 = 0$ alakú, ami elhagyható.)

? Mi történik, ha a normálvektor egy koordinátája 0?

- Ekkor két egyenlet azonos, egyikük elhagyható. Ha például ha $a \neq 0$, $b \neq 0$ de $c = 0$, akkor az egyenletek alakja

$$b(x - x_0) = a(y - y_0)$$
$$z = z_0$$
$$z = z_0.$$

? Mit mondhatunk, ha az irányvektor egyik koordinátája sem 0?

- Ekkor három sík egyenletét kapjuk, melyek közül semelyik kettő sem párhuzamos a bennük szereplő változók különbözősége miatt, így bármelyik kettő metszete ugyanaz az egyenes: bármelyik két egyenlet megtartható.

m Ha egyik koordináta sem 0, akkor a fenti egyenletrendszert egy átrendezett alakban adják meg:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

P A $(0,2,4)$ ponton átmenő, $(1,3,0)$ irányvektorú egyenes

- explicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= 2 + 3t \\ z &= 4, \end{aligned}$$

- implicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned} y - 2 &= 3x \\ z &= 4. \end{aligned}$$

P Az $(1, 2, 3)$ ponton átmenő, $(4, 5, 6)$ irányvektorú egyenes

- explicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned} x &= 1 + 4t \\ y &= 2 + 5t \\ z &= 3 + 6t, \end{aligned}$$

- egy implicit egyenletrendszere

$$\begin{aligned} 5(x-1) &= 4(y-2) \\ 6(x-1) &= 4(z-3). \end{aligned}$$

P **Két sík metszésvonala**

Az S_1 sík három pontja $P(1,1,1)$, $Q(2,3,1)$, $R(1,1,2)$, az S_2 sík egyenlete $x+y+z=1$. Írjuk fel a két sík metszésvonalának explicit egyenletrendszerét.

M Írjuk fel az S_1 egyenletét!

- Az S_1 sík két vektora $\overrightarrow{PQ}=(1,2,0)$ és $\overrightarrow{PR}=(0,0,1)$. Ezek vektori szorzata $\mathbf{n}=(1,2,0)\times(0,0,1)=(2,-1,0)$.
- Az S_1 egy pontja P, a P-n átmenő $\mathbf{n}$ normálvektorú sík egyenlete $(2,-1,0)\cdot(x-1,y-1,z-1)=0$, azaz $2x-y=1$.

- Írjuk fel a metszet explicit egyenletrendszerét a két sík egyenleteiből álló egyenletrendszer megoldásával!
- Az egyenletrendszer

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x - y \quad\; &= 1. \end{aligned}$$

Az összes megoldás megtalálásához válasszuk az egyik változót paraméternek. Pl. legyen $x = t$. A második egyenletből $y = 2t - 1$. Az első egyenletbe való helyettesítés után $z = 2 - 3t$. Összefoglalva:

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= -1 + 2t \\ z &= 2 - 3t \end{aligned}$$