BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Lineáris algebra mérnököknek

BMETE93BG20

Vektorok

2019-09-10 MGFEA

Wettl Ferenc
ALGEBRA TANSZÉK

Bevezetés a tárgy elé

Jelölések, gyorsírás

Definíció, **J**elölés, **T**étel, **Á**llítás, **L**emma, **B**izonyítás, **P**élda, **F**eladat, **M**egoldás, **m**egjegyzés

$\forall$ minden, $\exists$ van olyan, $\exists^1$ van egyetlen, $\exists^{\geq 2}$ van legalább kettő

$\vee$ vagy, $\wedge$ és, $\Rightarrow$ ha..., akkor..., $\Leftrightarrow$ pontosan akkor, $\rightsquigarrow$ következik

$\mathbb{R}$ valós, $\mathbb{N}$ természetes, $\mathbb{Q}$ racionális, $\mathbb{Z}$ egész számok halmaza

L! Legyen, Amh Azt mondjuk hogy, Tfh Tegyük fel hogy

alfa	α A	ióta	ι I	ró	(ρ) ϱ P
béta	β B	kappa	κ K	szigma	σ Σ
gamma	γ Γ	lambda	λ Λ	tau	τ T
delta	δ Δ	mű	μ M	üpszilon	υ Υ
epszilon	(ϵ) ε E	nű	ν N	fí	(ϕ) φ Φ
zéta	ζ Z	kszí	ξ Ξ	khí	χ X
éta	η H	omikron	o O	pszí	ψ Ψ
théta	(θ) ϑ Θ	pí	π Π	ómega	ω Ω

Halmaz és hatványa

J halmaz megadása: $\{\textit{elemek felsorolása}\}$ vagy $\{\textit{elem} \mid \textit{tulajdonság}\}$

P Mersenne-prímek: $\{2^p - 1 \mid p, 2^p - 1 \textit{ prím}\} = \{3, 7, 31, 127, 8191, 131071, 524287, 2147483647, \dots\}$ (A000668 az OEIS-ben – 51-et ismerünk).

D H halmaz n-edik hatványa:

$$H^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in H, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

P $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

P $H = \{0, 1\} \rightsquigarrow H^3 = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$

Halmaz és hatványa

D R reláció a H halmazon a rendezett párok egy részhalmaza: $R \subseteq H^2$

J ha $(a, b) \in R$, akkor $a\ R\ b$

P $H = \{1, 2, 3\}, '<' = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$, pl. $1 < 2$

P felmenője, évfolyamtársa, azonos, osztója, párhuzamos,...

D A H halmazon értelmezett R reláció ekvivalencia reláció, ha minden $a, b, c \in H$ elemre
(1) $a\ R\ a$ (reflexív),
(2) ha $a\ R\ b$, akkor $b\ R\ a$ (szimmetrikus),
(3) ha $a\ R\ b$, $b\ R\ c$, akkor $a\ R\ c$ (tranzitív).

T Minden H-n értelmezett R ekvivalenciareláció megad H-n egy osztályozást (azaz H-t diszjunkt részhalmazok uniójára bontja).

P egyenlőség, párhuzamosság, évfolyamtárs,...(NEM: $<$, ismerős, felmenő,...)

Első lecke

Célkitűzések

E lecke befejezése után a hallgató

- különbséget tud tenni irányított szakasz és vektor között,
- ki tudja számolni vektorok vektori szorzatát, és alkalmazni tudja elemi geometriai feladatokban,
- meg tudja határozni 2 síkbeli vagy 3 térbeli vektor orientációját,
- ki tudja számolni paralelepipedon (előjeles) térfogatát, paralelogramma (előjeles) területét.

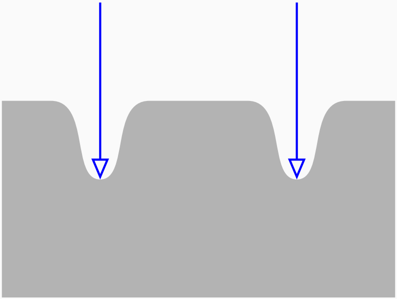
A 2- és 3-dimenziós tér vektorai

A 2- és 3-dimenziós tér vektorai

Irányított szakasz, vektor

Irányított szakasz – kötött vektor

(*a*)



(*b*)

(*a*) elmozdulásvektor,

(*b*) rugalmas testen alakváltozást okozó erő vektora.

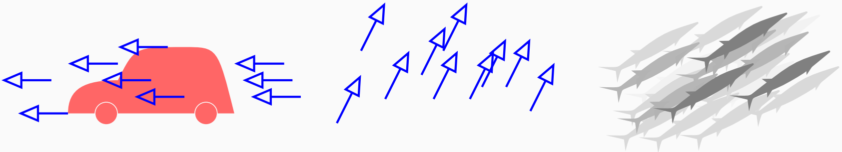
D Irányított szakaszon olyan szakaszt értünk, melynek végpontjait megkülönböztetjük: egyiküket kezdő-, másikukat végpontnak nevezzük.
Az A kezdőpontú, B végpontú irányított szakaszt $\overrightarrow{AB}$ jelöli.

D **Vektor**

L! két irányított szakasz ekvivalens, ha egyik a másikba „tolható”. Ekkor a vektorok az ekvivalenciaosztályok.

m Tehát egy irányított szakasz csak reprezentál egy vektort, de ugyanazt a vektort reprezentálja bármely párhuzamos eltoltja is.

J $\mathbf{a}$, $\vec{a}$, $\underline{a}$, $\overline{a}$.



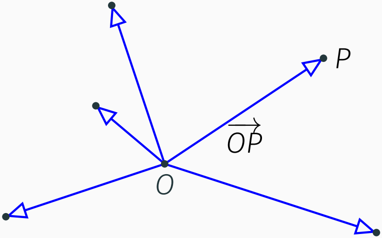
- Ha az irányított szakasz a hal, a vektor a halraj.
- A fizikában használt kötött vektor és szabad vektor fogalmak megfelelnek a fenti irányított szakasz és vektor fogalmaknak:

Fizika	Matematika
kötött vektor	irányított szakasz
szabad vektor	vektor

Origó

D Origó = egy rögzített pont

m közös kezdőpont lesz a vektorokhoz



m A sík pontjai és vektorai közti kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés: egy P pontnak az $\overrightarrow{OP}$ vektor felel meg, az origónak a nullvektor.

m *Míg* egy irányított szakasz megadásához két pont rendezett párjának megadása szükséges, addig egy vektor megadásához elegendő egyetlen pont megadása, ha van origó.

A 2- és 3-dimenziós tér vektorai

Vektor jellemzői

A vektor hossza, állása

D **Vektor hossza, abszolút értéke, euklideszi normája**

Vektor hosszán egy reprezentánsa két végpontjának távolságát értjük. A 0 hosszúságú vektort zérusvektornak nevezzük. Az $\mathbf{a}$ vektor hosszát $|\mathbf{a}|$, illetve $\|\mathbf{a}\|$ jelöli.

D **Vektor állása**

Két nemzérus vektor kollineáris|párhuzamos|azonos állású, ha az őket tartalmazó egyenesek párhuzamosak. Jelölés: $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$. Nemzérus vektorok állásán az azonos állású vektorok osztályát értjük. A zérusvektor állása tetszőleges.

D

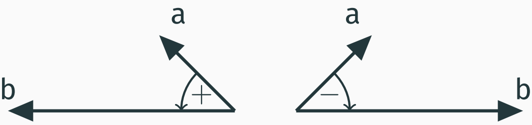
Vektor iránya

Két nemzérus kollineáris vektor azonos irányú, ha a kezdőpontjukból induló és a végpontjukat tartalmazó félegyenesek párhuzamosan egymásba tolhatók. Nemzérus vektorok irányán az azonos irányú vektorok osztályát értjük. $\mathbf{0}$ iránya tetszőleges.

Vektorok szöge

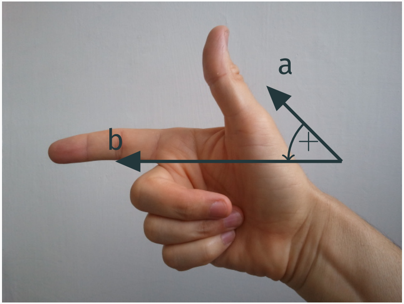
D Két nem párhuzamos síkbeli **a** és **b** vektor $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle$-vel jelölt szöge megegyezik a közös pontból induló, velük párhuzamos két félegyenes szögével, mely egy $[0, \pi]$ intervallumba eső szám.

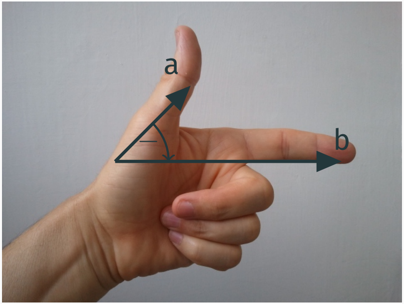
D Ha **a** és **b** sorrendjét is megadjuk, két eset lehetséges: ha az **a**-val párhuzamos félegyenes a **b**-vel párhuzamos félegyenesbe az óramutató járásával ellentétes forgatással vihető át, akkor a két vektor szögét pozitív, ellenkező esetben negatív előjellel látjuk el. E szöget a két vektor irányított szögének nevezzük és $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\measuredangle$-vel jelöljük. Ez a $(-\pi, \pi]$ intervallumba esik.



D **Jobbrendszer, balrendszer**

Két nem párhuzamos síkbeli $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor jobbrendszert alkot, ha $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\sphericalangle} > 0$, és balrendszert, ha $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\sphericalangle} < 0$.





Míg $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\angle} = (\mathbf{b}, \mathbf{a})_{\angle}$, addig $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\sphericalangle} = -(\mathbf{b}, \mathbf{a})_{\sphericalangle}$, és ha $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\sphericalangle} = \pi/2$, akkor $(\mathbf{a}, -\mathbf{b})_{\sphericalangle} = -\pi/2$.

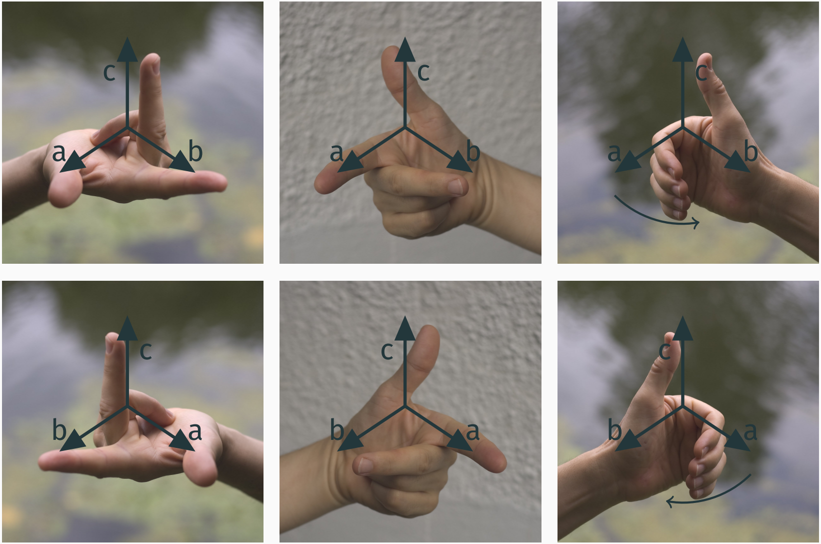
Bal, jobb?

m Vektorok szögének előjele, illetve vektorok orientációja valójában nem definiálható, csak annyi, hogy két vektorpár előjele azonos vagy különböző, és ha az egyiket pozitívnak (jobbrendszernek) nevezzük akkor a másik negatív (balrendszer) lesz. Az óramutató járására hivatkozás egy külső nézőpontot definiál, ha a síkra a másik oldaláról nézünk, minden az ellenkezőjére változik.

D **Jobbrendszer, balrendszer 3D-ben**

Három nem egy síkba eső $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektor jobbrendszert alkot, ha $\mathbf{c}$ iránya felől nézve $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\sphericalangle} > 0$, és balrendszert, ha $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\sphericalangle} < 0$.

Orientáció a térben



Vektori szorzás

Vektori szorzás

Definíciója, tulajdonságai, kiszámítása

A vektori szorzás fogalma

D

Vektori szorzat

A 3-dimenziós tér két vektorának vektori szorzatán azt a vektort értjük, melynek

1. abszolút értéke a két vektor abszolút értékének és közbezárt szöge szinuszának szorzata,
2. állása merőleges mindkét vektorra,
3. ha a szorzat nem a nullvektor, akkor iránya olyan, hogy az első tényező, a második tényező és a szorzat ebben a sorrendben jobbrendszert alkot.

A vektori szorzás fogalma (cross product)

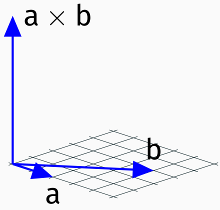
- Az a és b vektorok vektori szorzatát $\mathsf{a} \times \mathsf{b}$ jelöli, amit „a kereszt b”-nek olvasunk. Képletekkel megfogalmazva: $\mathsf{a} \times \mathsf{b}$ egy vektor, melyre
    - $|\mathsf{a} \times \mathsf{b}| = |\mathsf{a}||\mathsf{b}| \sin(\mathsf{a}, \mathsf{b})_{\angle}$,
    - $\mathsf{a} \times \mathsf{b} \perp \mathsf{a}$, $\mathsf{a} \times \mathsf{b} \perp \mathsf{b}$, továbbá
    - a, b és $\mathsf{a} \times \mathsf{b}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot, ha $|\mathsf{a} \times \mathsf{b}| \neq 0$.
- A vektor abszolút értékére a fenti képlet valóban nem negatív számot ad, mert a szinusz függvény a $[0, \pi]$ intervallumon nem negatív.
- E definíció bármely két 3-dimenziós vektor vektori szorzatát egyértelműen definiálja, ugyanis minden olyan esetben, amikor nem dönthető el, hogy a vektorok jobbrendszert alkotnak-e, a szorzat a nullvektor.

P **Példa**

Tegyük fel, hogy a tér két vektora 2 illetve 5 hosszú, az általuk bezárt szög koszinusza $\frac{4}{5}$. Mit tudunk a vektori szorzatról?

M Számítsuk ki a vektorok hajlásszögének szinuszát!

- Ha $\cos\gamma = \frac{4}{5}$, akkor $\sin\gamma = \sqrt{1-(\frac{4}{5})^2} = \frac{3}{5}$. Mennyi a vektorok szorzatának hossza?
- A vektori szorzat hossza $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})_\angle = 2\cdot 5\cdot \frac{3}{5} = 6$.
- A szorzat merőleges mindkét vektorra és $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ebben a sorrendben jobbrendszert alkot. Így a következőképp ábrázolható:



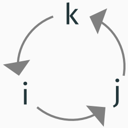
P **i, j, k vektori szorzatai**

Legyen $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ három, egymásra páronként merőleges, ebben a sorrendben jobbrendszert alkotó egységvektor. Készítsünk művelettáblát vektori szorzataikról!

M Mik e vektorok önmagukkal vett szorzatai?

- Mivel $(\mathbf{i}, \mathbf{i})_\angle = 0$, ezért $|\mathbf{i} \times \mathbf{i}| = 0$, így $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}$. Hasonlóan $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$.
- Mivel $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = 1$ és $(\mathbf{i}, \mathbf{j})_\angle = 90°$, ezért $|\mathbf{i} \times \mathbf{j}| = 1$. $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ merőleges $\mathbf{i}$-re és $\mathbf{j}$-re, és $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ valamint $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ jobbrendszert alkotnak épp úgy, mint $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ és $\mathbf{k} \rightsquigarrow \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$.

$\times$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$

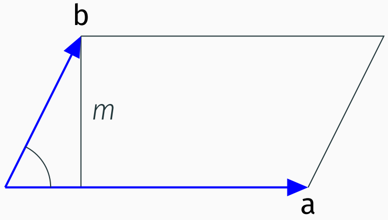


T **Mikor 0 a vektori szorzat?**

Két térbeli vektor vektori szorzata pontosan akkor zérusvektor, ha a két vektor párhuzamos.

T **Vektori szorzat abszolút értékének geometriai jelentése**

Két vektor vektori szorzatának abszolút értéke a két vektor által kifeszített paralelogramma területének mérőszámával egyenlő.



Vektori szorzás műveleti tulajdonságai

T

Vektori szorzás műveleti tulajdonságai

Tetszőleges $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorokra, valamint tetszőleges r valós számra igazak az alábbi összefüggések:

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (alternáló tulajdonság)
2. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
   $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ (disztributivitás)
3. $r(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (r\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (r\mathbf{b})$
4. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2}$
5. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

4.
$$
\begin{aligned}
|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| &= |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sqrt{1 - \cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle} \\
&= \sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b})_\angle} = \sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2}
\end{aligned}
$$

Vektori szorzás műveleti tulajdonságai

- A tétel első pontja szerint a vektori szorzás nem kommutatív!
- A vektori szorzás nem is asszociatív. Az $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ vektori szorzatai című példa eredményét használva könnyen látható, hogy

$$(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} \neq \mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}),$$

ugyanis $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$, másrészt $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Vektori szorzat kiszámítása koordinátás alakból

T **Vektori szorzat kiszámítása**

A térbeli $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ és $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektorok vektori szorzata derékszögű koordináta-rendszerben

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

B Kihasználva, hogy $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$,..., a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) \\
&= a_2b_3\mathbf{j} \times \mathbf{k} + a_3b_2\mathbf{k} \times \mathbf{j} + a_3b_1\mathbf{k} \times \mathbf{i} + a_1b_3\mathbf{i} \times \mathbf{k} + a_1b_2\mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_2b \\
&= a_2b_3\mathbf{i} - a_3b_2\mathbf{i} + a_3b_1\mathbf{j} - a_1b_3\mathbf{j} + a_1b_2\mathbf{k} - a_2b_1\mathbf{k} \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).
\end{aligned}$$

Két séma a kiszámításra

- Első séma:

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{array}$$

- Második séma:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \end{array}$$

$$(a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} +$$
$$(a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} +$$
$$(a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

P **Példa**

Számítsuk ki az $\mathbf{a} = (0, 1, 2)$ és a $\mathbf{b} = (3, 4, 5)$ vektorok vektori szorzatát!

M Bármelyik fenti sablon használható:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 3 & 4 \end{array}$$

$$(0, 1, 2) \times (3, 4, 5) = (1 \cdot 5 - 2 \cdot 4, 2 \cdot 3 - 0 \cdot 5, 0 \cdot 4 - 1 \cdot 3) = (-3, 6, -3)$$

Vektori szorzás

Előjeles terület és térfogat; determináns

T **Paralelepipedon térfogata**

Az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$. A $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ kifejezés értéke pozitív, ha a vektorok jobbrendszert, negatív, ha balrendszert alkotnak, és nulla, ha egy síkba esnek.

B Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített paralelogramma területe $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, és mivel $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ merőleges a paralelogramma síkjára, ezért a paralelepipedon magassága $\mathbf{c}$-nek az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ egyenesére eső merőleges vetületi hosszával egyenlő.

\- Kell az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ irányú egységvektor:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|},$$

a magasság $|\mathbf{e} \cdot \mathbf{c}|$.

Előjeles térfogat

- Így a térfogat (azaz az alapterületszer magasság) értéke
$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \left| \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} \cdot \mathbf{c} \right| = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| \,.$$
- Tehát a paralelepipedon térfogata $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$. A $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ skalár pontosan akkor negatív, ha a $\mathbf{c}$ vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ egyenesére eső merőleges vetülete és $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ellenkező irányú. Vagyis ha a $\mathbf{c}$ vektor az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ síkjának másik oldalán van, mint az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor, azaz ha $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ balrendszert alkot! Végül $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{c}$, azaz ha a három vektor egy síkba esik.

D **Paralelepipedon előjeles térfogata**

A $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ skalárt az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok által kifeszített paralelelpipedon *előjeles térfogatának* nevezzük.

T

Paralelepipedon térfogatának kiszámítása

L! $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ és $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Ekkor

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot (c_1, c_2, c_3)\\ &= a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 + a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3\\ &= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1\end{aligned}$$

m A korábban használt sablon átültethető:

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \end{matrix}$$

P **Paralelepipedon térfogata**

Számítsuk ki a $(2,1,2)$, $(1,2,2)$ és $(2,2,1)$ vektorok alkotta paralelepipedon előjeles térfogatát és térfogatát!

M A sablonba helyettesítjük a számokat:

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{array}$$

\- Kifejtve: $4+4+4-8-8-1=-5$, tehát az előjeles térfogat -5. A három vektor tehát balrendszert alkot, és az általuk kifeszített paralelepipedon térfogata 5.

D Az $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ szorzatot nevezik vegyes szorzatnak is, Jelölés $\mathbf{abc}$.

Á $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{abc}=\mathbf{bca}=\mathbf{cab}=-\mathbf{cba}=-\mathbf{bac}=-\mathbf{acb}$.

Paralelogramma területe

T **Paralelogramma területe**

Az (a_1, a_2) és (b_1, b_2) vektorok által kifeszített paralelogramma területe $|a_1b_2 - a_2b_1|$. Ha $a_1b_2 - a_2b_1 > 0$ a két vektor jobb-, ha < 0 balrendszert alkot.

- Ötlet: $(a_1, a_2, 0) \times (b_1, b_2, 0) = (0, 0, a_1b_2 - a_2b_1)$

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_2 & 0 & a_1 & a_2 \\ & & & & \\ b_1 & b_2 & 0 & b_1 & b_2 \end{array}$$

- A terület $|(0, 0, a_1b_2 - a_2b_1)| = |a_1b_2 - a_2b_1|$
- Ha a $(0, 0, a_1b_2 - a_2b_1)$ és $\mathbf{k}$ egyirányúak, azaz $a_1b_2 - a_2b_1 > 0$, akkor jobb-, ha < 0 balrendszert alkotnak.

m Sablon:

$$\begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ & \\ b_1 & b_2 \end{array}$$

Paralelogramma előjeles területe

D **Paralelogramma előjeles területe**

Két síkbeli vektor által kifeszített paralelogramma előjeles területe megegyezik területével, ha a két vektor jobbrendszert alkot, és a terület -1-szeresével, ha balrendszert.

P **Példa**

Mekkora az $\mathbf{a} = (-19, 20)$ és $\mathbf{b} = (20, -21)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területe és jobb vagy balrendszert alkotnak e vektorok?

M Az előjeles terület $(-19) \cdot (-21) - 20 \cdot 20 = -1$, balrendszer:

$$\begin{array}{cc} -19 & 20 \\ 20 & -21 \end{array}$$

Másod és harmadrendű determináns

D

2×2-es és 3×3-as mátrix, determináns

Egy négyzetes mátrix (számtáblázat) n-edrendű, ha $n \times n$-es, azaz n sorból és n oszlopból áll. A másod- és harmadrendű mátrixhoz az alábbi képlettel rendelt számot a mátrix determinánsának nevezzük.

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi.$$

Ez megegyezik a paralelogramma/paralelepipedon előjeles területével/térfogatával.

Másod és harmadrendű determináns – Sarrus-szabály

Sarrus-szabály: $n = 2$, $n = 3$ esetén a

főátló-sodrásúak *mínusz* mellékátló-sodrásúak

képlettel számolható a determináns, de ez $n > 3$ esetén nem érvényes. 3-adrendűre az alábbi ábra jelent segítséget: „azonos alakúak szorzatainak összegéből az azonos színűek szorzatait” kell kivonni.