Név: **Neptun:**

2. ZH — Lineáris algebra mérnököknek — 2018-12-07

A dolgozat alatt semmilyen segédeszköz nem használható. A feladatok tetszőleges sorrendben megoldhatók. Kidolgozási idő 60 perc.

1. Írjuk fel az
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
LU-felbontását, és annak segítségével, csak visszahelyettesítésekkel oldjuk meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszert, ahol $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$. *(4 pont)*

2. Határozzuk meg az
$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 5 \\ 2x + 4y - 4z &= 5 \end{aligned}$$
egyenletrendszer összes **optimális** megoldását a normálegyenlet segítségével és a minimális abszolút értékű megoldással kifejezve! *(5 pont)*

3. Határozzuk meg az
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 8 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$
mátrix bázisfelbontását! Mennyi a mátrix rangja? Bontsuk fel $\mathbf{A}$-t a ranggal egyező számú diadikus szorzat összegére! *(4 pont)*

4. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét három különböző módon is: elemi sorműveletekkel, valamely sor vagy oszlop szerinti kifejtéssel és a belőle kiválasztható kígyók segítségével! *(4 pont)*
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

5. Írjuk fel a síkot az $y = \sqrt{3}x$ egyenletű egyenesre tükröző lineáris leképezés mátrixát! *(2 pont)*

6. Határozzuk meg a rangját, nullitását, determinánsát, nyomát az $\mathbb{R}^3$ tér
   (a) egy egyenes körül való α-szögű elforgatásának,
   (b) egy síkra való merőleges vetítésének! *(4 pont)*

7. Legyen $\mathbb{R}^3$ standard bázisa $\mathcal{E}$, és egy alterének bázisa $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$. Írjuk fel a $\mathcal{B}$ által kifeszített térre való merőleges vetítés mátrixát, határozzuk meg a $(2, 4, 1)$ vektor merőleges vetületét, valamint e vektornak az altértől való távolságát! *(4 pont)*

8. Legyen $\mathbb{R}^2$ két bázisa $\mathcal{B}_1 = \{(1, 2), (1, 1)\}$ és $\mathcal{B}_2 = \{(1, 3), (1, 2)\}$. Írjuk fel a $\mathbf{T}_{\mathcal{B}_1 \leftarrow \mathcal{B}_2}$ áttérés mátrixát, és írjuk fel a $\mathbf{v}$ vektor $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_1}$ koordinátás alakját e mátrix felhasználásával, ha $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_2} = (-2, 3)$. *(4 pont)*

9. Határozzuk meg a
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$
mátrix karakterisztikus polinomját, sajátértékeit és sajátaltereit. *(5 pont)*