0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ

NÉV _____ **NEPTUNKÓD** _____

Lineáris algebra mérnököknek **2. vizsga** **2019-01-15**

A kérdésekre 40 pont kapható. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 90 perc. Segédeszköz nem használható!

0. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(4 pont)*

a) Ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, és $\mathbf{A}$ négyzetes, akkor $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. $\boxed{\text{H}}$

b) Az $\mathbf{XY}$ mátrix minden sora az $\mathbf{X}$ sorainak és minden oszlopa az $\mathbf{Y}$ oszlopainak lineáris kombinációja. $\boxed{\text{H}}$

c) Ha $\mathbf{A}$ ortogonális valós mátrix, akkor $\mathbf{AA}^\mathsf{T}$ az $\mathbf{A}$ oszlopvektorai által kifeszített altérre való merőleges vetítés mátrixa. $\boxed{\text{I}}$

d) Az $\left\{\begin{aligned} ax + by \quad &= u \\ cy + dz &= 0 \\ ex \quad + fz &= w \end{aligned}\right\}$ egyenletrendszer megoldása az x ismeretlenre $x = \dfrac{ucf + bdw}{acf + bde}$. $\boxed{\text{I}}$

1. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre valamely **tétel** alapján! *(1-1 pont)*

a) Egy valós $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor merőleges vetítés mátrixa, ha

szimmetrikus és idempotens, azaz $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{A}^2$

b) Egy valós mátrix pontosan akkor diagonalizálható ortogonálisan, ha

szimmetrikus.

c) Ha $(\lambda, \mathbf{x})$ az $\mathbf{A}$ egy sajátpárja, akkor az $\mathbf{A}^n$ egy sajátpárja

$(\lambda^n, \mathbf{x})$

d) Két mátrix pontosan akkor hasonló, ha

van olyan lineáris transzformáció, melynek ezek a mátrixai, de más-más bázisban.

2. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre valamely **definíció** alapján! *(1-1 pont)*

a) Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer optimális megoldásán *definíció szerint* azt az $\hat{\mathbf{x}}$ vektort értjük, melyre

$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})}\,\mathbf{b}$.

b) Az L lineáris leképezés magterén a következőt értjük:

$\operatorname{Ker} L = \{\mathbf{x} : L\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ (a $\mathbf{0}$-ba képződő vektorok)

c) Vektortér dimenziója =

független vektorok maximális száma

d) Vektor altértől való távolsága =

az altér vektoraitól való távolságai minimuma (= infimuma)

3. Hány dimenziós az $\mathbf{A}$ oszlopvektorai által kifeszített tér? Válasszunk ki az oszlopok közül egy bázist és írjuk fel az oszlopvektorok e bázisra vonatkozó koordinátás alakját, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 2 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

rref-ből

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$[\mathbf{v}_1]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, [\mathbf{v}_2]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, [\mathbf{v}_3]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, [\mathbf{v}_4]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

4. Legyen $\mathcal{B} := \{(1,2,2), (-1,0,1), (1,1,-1)\}$, $\mathcal{C} := \{(1,0,1), (1,-1,0), (1,1,1)\}$.

(a) Írjuk fel a $\mathbf{T}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ áttérési mátrixot!

(b) Legyen $[\mathbf{v}]_\mathcal{B} = (-1, 2, -1)$ egy $\mathbf{v}$ vektor koordinátavektora az $\mathcal{B}$ bázisban. Mi lesz $[\mathbf{v}]_\mathcal{C}$?

Az áttérések mátrixai:

$$\mathbf{B}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{C}^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}\mathbf{B}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_\mathcal{C} = \mathbf{T}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{v}_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 9 \\ -5 \\ -8 \end{bmatrix}$$

5. Írjuk fel a $-2 + 2\mathrm{i}$ számnak azt a köbgyökét algebrai alakban, amely a komplex sík második síknegyedébe esik.

$-2 + 2\mathrm{i} = 2\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4}) \rightsquigarrow$ az egyik köbgyök: $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}) = 1 + \mathrm{i}$

Az $1 + \mathrm{i}$ beszorozva az 1 köbgyökeivel adja az összes köbgyököt.

$(1 + \mathrm{i})(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}) = (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}) + (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})\mathrm{i}$.

6. Tekintsük az $(2,1,2)$ és a $(2,2,1)$ vektorok által kifeszített alteret $\mathbb{R}^3$-ben. Írjuk fel az altérre való merőleges vetítés mátrixát.

1. mo: az $\mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}$ képlettel. A vetítés mátrixa

$$\frac{1}{17}\begin{bmatrix} 8 & 6 & 6 \\ 6 & 13 & -4 \\ 6 & -4 & 13 \end{bmatrix}$$

2. mo: $\mathbf{T}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$
$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 2 & -7 & 10 \\ 2 & 10 & -7 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

3. mo: normálvektorral: $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-3,2,2)$, $\mathbf{T} = \mathbf{I} - \frac{1}{17}\mathbf{w}\mathbf{w}^\mathsf{T}$

7. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátfelbontását!

A sajátértékek, sajátvektorok, majd a sajátvektorokból álló mátrix invertálása után

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Más eredményt kapunk, ha valamelyik sajátvektor helyett egy konstansszorosával számolunk.

8. Írjuk fel az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jordan-féle normálalakját, és adjuk meg egy Jordan-bázisát!

Az 1 háromszoros algebrai multiplicitású, sajátaltere $\operatorname{span}((0,0,1))$, ami 1-dimenziós, így a Jordan-normálalak egyetlen Jordan-blokkból áll. $(\mathbf{A}-\mathbf{I})^2 \neq \mathbf{O}$, így van olyan vektor, melyet $(\mathbf{A}-\mathbf{I})^2$ nem a $\mathbf{0}$-vektorba visz, pl. $(1,0,0)$. Innen egy Jordan-bázis

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-\mathbf{I}} \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \xleftarrow{\mathbf{A}-\mathbf{I}} \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \xleftarrow{\mathbf{A}-\mathbf{I}} \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{A}$ normálalakja az $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ bázisban

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Igazoljuk, hogy minden lineáris $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ leképezés mátrixleképezés.

ld. a prezentáción