0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ

NÉV _____ **NEPTUNKÓD** _____

Lineáris algebra mérnököknek **1. vizsga** **2019-01-08**

A kérdésekre 40 pont kapható. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 90 perc. Segédeszköz nem használható!

0. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(4 pont)*

a) Ha egy 3 ismeretlenes lineáris egyenletrendszer 16 egyenletből áll, akkor inkonzisztens. H

b) Egy konzisztens egyenletrendszer minden megoldása egyúttal optimális megoldás is. I

c) Két altér bázisainak metszete megegyezik az altér metszetének bázisával. H

d) Tetszőleges A valós mátrixra $r(A) = r(A^T A)$. I

1. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre valamely tétel vagy definíció alapján! (*1-1 pont*)

a) Soroljon fel a rangon kívül további legalább négy, a báziscserére nézve invariáns mátrixtulajdonságot (vagy a mátrixhoz rendelt valamely objektumot)!

determináns, nyom, nullitás, karakterisztikus polinom, sajátértékek...

b) A táblázat bal felében valós négyzetes mátrixok sorszámokkal jelölt, jobb felében sajátértékeire vonatkozó feltételek betűkkel jelölt listáját találjuk. Párosítsunk: melyik mátrixnak milyen sajátértékei lehetnek?

sorszám	transzformáció	betű	λ
1:	nilpotens	A:	$\lambda \in \mathbb{R}$
2:	ortogonális	B:	$\mathrm{i}\lambda \in \mathbb{R}$
3:	szimmetrikus	C:	$\lvert\lambda\rvert = 1$
4:	ferdén szimmetrikus	D:	$\lambda = 0$

1D 2C 3A 4B (vagy A3 B4 C2 D1)

c) Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség szerint milyen összefüggés igaz az $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra, ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ nem párhuzamosak? (a legerősebb állítást írjuk le!)

$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| < |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$

d) Húzzuk alá a test(ek)et: $\mathbb{Z}_{2019}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}[x]$ **Q, C**

2. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. A mellékelt ábrán kössük össze irányított éllel azokat a csúcsokat amelyekhez tartozó állítások közt implikáció ($\to$) vagy ekvivalencia ($\leftrightarrow$) van. *(4 pont)*

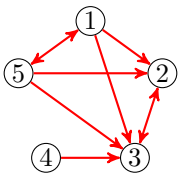
① $\mathbf{A}$ szimmetrikus

② $\mathbf{A}$ sajátalterei dimenzióinak összege n

③ $\mathbf{A}$ diagonalizálható

④ $\mathbf{A}$ sajátértékei különbözőek

⑤ $\mathbf{A}$ ortogonálisan diagonalizálható



3. Végezzük el az alábbi számításokat!

a) Határozzuk meg az $(3,5)$ és a $(2,3)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területét és orientációját!

terület 1, balrendszer

b) $\mathbf{u} = (1,0,1,0,\dots), \mathbf{v} = (1,-1,1,-1,\dots) \in \mathbb{R}^{2m}$ vektorok hajlásszöge?

$\frac{\pi}{4}$ (hisz $\cos\alpha = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{m}{\sqrt{m}\sqrt{2m}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$)

c) $-\mathrm{i}$ négyzetgyökei?

trig. alakban $\cos(\frac{3\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\frac{3\pi}{4})$, $\cos(\frac{7\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(\frac{7\pi}{4})$, vagy algebrai alakban $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i})$

d) Hány dimenziós az $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}^\mathsf{T} + \mathbf{A}$ transzformáció magtere?

1, ui. csak a $\begin{bmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{bmatrix}$ ferd.szimm. mátrixok képződnek a zérusmátrixba, és ez 1-dim. altér (2. mo: a képtér a szimm. mátrixok tere, ami 3-dimenziós, a tér pedig 4)

4. Adjuk meg az alábbi mátrix LU-felbontását:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, ahol

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

5. Legyen $\mathcal{A} := \{(1,0,1),(1,-1,0),(1,1,1)\}$, $\mathcal{B} := \{(1,2,2),(-1,0,1),(1,1,-1)\}$.

(a) Írjuk fel a $\mathbf{T}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ áttérési mátrixot!

(b) Legyen $[\mathbf{v}]_\mathcal{A} = (1,1,-1)$ egy $\mathbf{v}$ vektor koordinátavektora az $\mathcal{A}$ bázisban. Mi lesz $[\mathbf{v}]_\mathcal{B}$?

Az áttérések mátrixai:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} = \mathbf{B}^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{A}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -5 & -7 & -2 \\ -4 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_\mathcal{B} = \mathbf{T}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathbf{v}_\mathcal{A} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -10 \\ -8 \end{bmatrix}$$

6. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét három különböző módon is: elemi sorműveletekkel, valamely sor vagy oszlop szerinti kifejtéssel és a belőle kiválasztható kígyók segítségével!

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

A det értéke 1

1. kígyók determinánsainak összegére bontással

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2+3-4$$

2. kifejtés az utsó oszlop szerint

$$-\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4+5 = 1$$

3. elemi sorműveletekkel

7. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátfelbontását!

A sajátértékek, sajátvektorok, majd a sajátvektorokból álló mátrix invertálása után

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Más eredményt kapunk, ha valamelyik sajátvektor helyett egy konstansszorosával számolunk.

8. Tudjuk, hogy $\chi_{\mathbf{A}}(x) = (4-x)^3$, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Írjuk fel $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakját, és adjuk meg egy Jordan-bázisát!

Jordan-bázis

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Normálalak: $\mathbf{A}$ alakja az $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ bázisban

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Részletes megoldás a prezentáción.

9. Igazoljuk a diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltételéről szóló tételt!

ld. az e09 (handout_e09_18la_sajat.pdf) prezentáció 36. oldalán.