0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ

NÉV _____ **NEPTUNKÓD** _____

Lineáris algebra mérnököknek **2. vizsga** **2019-01-15**

A kérdésekre 40 pont kapható. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 90 perc. Segédeszköz nem használható!

0. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(4 pont)*

a) Ha az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, és $\mathbf{A}$ négyzetes, akkor $\det(\mathbf{A}) \neq 0$. ☐

b) Az $\mathbf{XY}$ mátrix minden sora az $\mathbf{X}$ sorainak és minden oszlopa az $\mathbf{Y}$ oszlopainak lineáris kombinációja. ☐

c) Ha $\mathbf{A}$ ortogonális valós mátrix, akkor $\mathbf{AA}^\mathsf{T}$ az $\mathbf{A}$ oszlopvektorai által kifeszített altérre való merőleges vetítés mátrixa. ☐

d) Az $\left.\begin{cases} ax + by = u \\ cy + dz = 0 \\ ex + fz = w \end{cases}\right\}$ egyenletrendszer megoldása az x ismeretlenre $x = \dfrac{ucf + bdw}{acf + bde}$. ☐

1. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre valamely **tétel** alapján! (*1-1 pont*)

a) Egy valós $\mathbf{A}$ mátrix pontosan akkor merőleges vetítés mátrixa, ha

b) Egy valós mátrix pontosan akkor diagonalizálható ortogonálisan, ha

c) Ha $(\lambda, \mathbf{x})$ az $\mathbf{A}$ egy sajátpárja, akkor az $\mathbf{A}^n$ egy sajátpárja

d) Két mátrix pontosan akkor hasonló, ha

2. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre valamely **definíció** alapján! (*1-1 pont*)

a) Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer optimális megoldásán *definíció szerint* azt az $\hat{\mathbf{x}}$ vektort értjük, melyre

b) Az L lineáris leképezés magterén a következőt értjük:

c) Vektortér dimenziója =

d) Vektor altértől való távolsága =

3. Hány dimenziós az $\mathbf{A}$ oszlopvektorai által kifeszített tér? Válasszunk ki az oszlopok közül egy bázist és írjuk fel az oszlopvektorok e bázisra vonatkozó koordinátás alakját, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 2 & 6 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Legyen $\mathcal{B} := \{(1,2,2), (-1,0,1), (1,1,-1)\}$, $\mathcal{C} := \{(1,0,1), (1,-1,0), (1,1,1)\}$.

(a) Írjuk fel a $\mathbf{T}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ áttérési mátrixot!

(b) Legyen $[\mathbf{v}]_\mathcal{B} = (-1, 2, -1)$ egy $\mathbf{v}$ vektor koordinátavektora az $\mathcal{B}$ bázisban. Mi lesz $[\mathbf{v}]_\mathcal{C}$?

5. Írjuk fel a $-2 + 2\mathrm{i}$ számnak azt a köbgyökét algebrai alakban, amely a komplex sík második síknegyedébe esik.

6. Tekintsük az $(2,1,2)$ és a $(2,2,1)$ vektorok által kifeszített alteret $\mathbb{R}^3$-ben. Írjuk fel az altérre való merőleges vetítés mátrixát.

7. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátfelbontását!

8. Írjuk fel az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jordan-féle normálalakját, és adjuk meg egy Jordan-bázisát!

9. Igazoljuk, hogy minden lineáris $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ leképezés mátrixleképezés.