0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ

NÉV _____ **NEPTUNKÓD** _____

Lineáris algebra mérnököknek **1. vizsga** **2019-01-08**

A kérdésekre 40 pont kapható. A válaszokat írjuk a kérdéshez tartozó üres dobozba! Kidolgozási idő 90 perc. Segédeszköz nem használható!

0. Mindegyik állításról állapítsuk meg, hogy igaz vagy hamis (I|H)! *(4 pont)*

a) Ha egy 3 ismeretlenes lineáris egyenletrendszer 16 egyenletből áll, akkor inkonzisztens. ☐

b) Egy konzisztens egyenletrendszer minden megoldása egyúttal optimális megoldás is. ☐

c) Két altér bázisainak metszete megegyezik az altér metszetének bázisával. ☐

d) Tetszőleges A valós mátrixra $r(A) = r(A^T A)$. ☐

1. Válaszoljunk az alábbi kérdésekre valamely tétel vagy definíció alapján! (*1-1 pont*)

a) Soroljon fel a rangon kívül további legalább négy, a báziscserére nézve invariáns mátrixtulajdonságot (vagy a mátrixhoz rendelt valamely objektumot)!

b) A táblázat bal felében valós négyzetes mátrixok sorszámokkal jelölt, jobb felében sajátértékeire vonatkozó feltételek betűkkel jelölt listáját találjuk. Párosítsunk: melyik mátrixnak milyen sajátértékei lehetnek?

sorszám	transzformáció	betű	λ
1:	nilpotens	A:	$\lambda \in \mathbb{R}$
2:	ortogonális	B:	$\mathrm{i}\lambda \in \mathbb{R}$
3:	szimmetrikus	C:	$\lvert\lambda\rvert = 1$
4:	ferdén szimmetrikus	D:	$\lambda = 0$

c) Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség szerint milyen összefüggés igaz az $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra, ha $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ nem párhuzamosak? (a legerősebb állítást írjuk le!)

d) Húzzuk alá a test(ek)et: $\mathbb{Z}_{2019}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}[x]$

2. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. A mellékelt ábrán kössük össze irányított éllel azokat a csúcsokat amelyekhez tartozó állítások közt implikáció ($\rightarrow$) vagy ekvivalencia ($\leftrightarrow$) van. *(4 pont)*

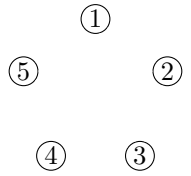
① $\mathbf{A}$ szimmetrikus

② $\mathbf{A}$ sajátalterei dimenzióinak összege n

③ $\mathbf{A}$ diagonalizálható

④ $\mathbf{A}$ sajátértékei különbözőek

⑤ $\mathbf{A}$ ortogonálisan diagonalizálható



3. Végezzük el az alábbi számításokat!

a) Határozzuk meg az $(3, 5)$ és a $(2, 3)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területét és orientációját!

b) $\mathbf{u} = (1, 0, 1, 0, \dots), \mathbf{v} = (1, -1, 1, -1, \dots) \in \mathbb{R}^{2m}$ vektorok hajlásszöge?

c) $-\mathrm{i}$ négyzetgyökei?

d) Hány dimenziós az $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}^\mathsf{T} + \mathbf{A}$ transzformáció magtere?

4. Adjuk meg az alábbi mátrix LU-felbontását:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Legyen $\mathcal{A} := \{(1, 0, 1), (1, -1, 0), (1, 1, 1)\}$, $\mathcal{B} := \{(1, 2, 2), (-1, 0, 1), (1, 1, -1)\}$.

(a) Írjuk fel a $\mathbf{T}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$ áttérési mátrixot!

(b) Legyen $[\mathbf{v}]_\mathcal{A} = (1, 1, -1)$ egy $\mathbf{v}$ vektor koordinátavektora az $\mathcal{A}$ bázisban. Mi lesz $[\mathbf{v}]_\mathcal{B}$?

6. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét három különböző módon is: elemi sorműveletekkel, valamely sor vagy oszlop szerinti kifejtéssel és a belőle kiválasztható kígyók segítségével!

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

7. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátfelbontását!

8. Tudjuk, hogy $\chi_{\mathbf{A}}(x) = (4-x)^3$, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Írjuk fel $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalakját, és adjuk meg egy Jordan-bázisát!

9. Igazoljuk a diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltételéről szóló tételt!