BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Lineáris algebra mérnököknek

BMETE93BG20

Jordan-féle normálalak

Kf81 2018-12-04

Wettl Ferenc
ALGEBRA TANSZÉK

Célok

E lecke befejezése után a hallgató

- meg tudja határozni mátrixok általánosított sajátvektorait,
- fel tudja írni 3×3-as mátrixok Jordan-féle normálalakját, valamint
- Jordan-bázisát, Jordan-felbontását.

Mátrixok polinomjai

Cayley–Hamilton-tétel

T Ha A egy tetszőleges négyzetes mátrix, melynek karakterisztikus polinomja χ_{A}, akkor $\chi_{\mathsf{A}}(\mathsf{A}) = \mathsf{O}$.

B* L! $\mathsf{B} = \mathsf{A} - \lambda\mathsf{I}$. Az A karakterisztikus polinomja így $\det \mathsf{B} = \chi_{\mathsf{A}}(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + p_1\lambda + p_0$.
B bármely eleméhez tartozó előjeles aldetermináns λ egy legföljebb $n-1$-edfokú polinomja, így léteznek olyan konstans elemű C_0, C_1,..., C_{n-1} mátrixok, hogy

$$\operatorname{adj} \mathsf{B} = \lambda^{n-1}\mathsf{C}_{n-1} + \ldots + \lambda\mathsf{C}_1 + \mathsf{C}_0.$$

$\det(\mathsf{B})\mathsf{I} = \mathsf{B}\operatorname{adj}(\mathsf{B}) \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}\mathsf{B}\operatorname{adj}\mathsf{B} &= (\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I})\left(\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^k\mathsf{C}_k\right)\\ &= \mathsf{A}\mathsf{C}_0 + \left(\sum_{k=1}^{n-1}\lambda^k(\mathsf{A}\mathsf{C}_k - \mathsf{C}_{k-1})\right) - \lambda^n\mathsf{C}_{n-1}.\end{aligned}$$

Együtthatóösszahasonlítás:

$$\begin{array}{rcl} \det(\mathsf{B})\mathsf{I} & \mathsf{B}\operatorname{adj}\mathsf{B} & \\ \hline (-1)^n\mathsf{I} & = & -\mathsf{C}_{n-1} \qquad \cdot\,\mathsf{A}^n \\ p_{n-1}\mathsf{I} & = & \mathsf{A}\mathsf{C}_{n-1} - \mathsf{C}_{n-2} \qquad \cdot\,\mathsf{A}^{n-1} \\ & \vdots & \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ p_2\mathsf{I} & = & \mathsf{A}\mathsf{C}_2 - \mathsf{C}_1 \qquad \cdot\,\mathsf{A}^2 \\ p_1\mathsf{I} & = & \mathsf{A}\mathsf{C}_1 - \mathsf{C}_0 \qquad \cdot\,\mathsf{A} \\ p_0\mathsf{I} & = & \mathsf{A}\mathsf{C}_0. \end{array}$$

A beszorzás után kapott egyenlőségeket összeadva

$$(-1)^n\mathsf{A}^n + p_{n-1}\mathsf{A}^{n-1} + \ldots + p_1\mathsf{A} + p_0\mathsf{I} = \mathsf{O}.$$

K Minden $\mathsf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ mátrixhoz és minden $\mathbb{F}$ fölötti p polinomhoz van olyan legföljebb $n-1$-edfokú r polinom, hogy $p(\mathsf{A}) = r(\mathsf{A})$.

B Ha p-t elosztjuk χ_{A}-val maradékosan, azaz $p = \chi_{\mathsf{A}} q + r$, ahol tehát r az osztás maradéka, akkor $\chi_{\mathsf{A}}(\mathsf{A}) = \mathsf{O}$ miatt

$$p(\mathsf{A}) = \chi_{\mathsf{A}}(\mathsf{A})q(\mathsf{A}) + r(\mathsf{A}) = \mathsf{O}q(\mathsf{A}) + r(\mathsf{A}) = r(\mathsf{A}).$$

P Ha $\chi_{\mathsf{A}}(x) = x^4 - x^3 + x^2$, és az $x^{100} : x^4 - x^3 + x^2$ osztás maradéka $x^3 - x^2$, akkor hogy számítjuk ki az A^{100} mátrixot?

M E mátrixra $\mathsf{A}^{100} = \mathsf{A}^3 - \mathsf{A}^2$.

K Minden invertálható $\mathsf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ mátrixhoz létezik egy legf. $n-1$-edfokú $\mathbb{F}$ fölötti q polinom, hogy $\mathsf{A}^{-1} = q(\mathsf{A})$.

P Egy $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mátrix karakterisztikus polinomja $\chi_{\mathsf{A}}(x) = x^5 + x^3 + 1$. Hogyan számolnánk ki az inverzét csak mátrixszorzást és összeadást használva?

M $\mathsf{O} = \chi_{\mathsf{A}}(\mathsf{A}) = \mathsf{A}^5 + \mathsf{A}^3 - \mathsf{I}$, beszorozva A^{-1}-gyel: $\mathsf{A}^4 + \mathsf{A}^2 - \mathsf{A}^{-1} = \mathsf{O}$ $\rightsquigarrow \mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}^4 + \mathsf{A}^2$ (ez 2 négyzetre emelés és egy összeadás).

Invariáns alterek

Invariáns alterek definíciója

D Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ altér az $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris transzformáció (illetve az L valamely bázisbeli $\mathbf{L}$ mátrixának) invariáns altere, ha minden $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ vektorra $L\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ ($\mathbf{L}\mathbf{x} \in \mathcal{U}$).

T Az $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$ altér pontosan akkor invariáns altér az L lineáris transzformációra nézve, ha $\mathcal{U}$ egy $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ bázisának minden vektorára $L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$ $(i = 1, \ldots, k)$.

B $(\Rightarrow)$ $\mathcal{U}$ invariáns altér $\rightsquigarrow$ $\mathcal{U}$ minden vektorának képe $\mathcal{U}$-ban van $\rightsquigarrow$ $L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$ $(i = 1, \ldots, k)$.

$(\Leftarrow)$ $\forall\ \mathbf{u}_i : L\mathbf{u}_i \in \mathcal{U}$

L! $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$: $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \ldots + x_k\mathbf{u}_k \rightsquigarrow$

$$L\mathbf{x} = x_1 L\mathbf{u}_1 + x_2 L\mathbf{u}_2 + \ldots + x_k L\mathbf{u}_k \in \mathcal{U},$$

P* Tekintsük az $L : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{L}\mathbf{x}$ mátrixleképezést, ahol

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Mutassuk meg, hogy az $\mathcal{U} = \mathrm{span}((1,-1,2,-1),(1,2,-1,2))$ altér invariáns altere az L lineáris transzformációnak.

M $L\mathbf{u} = (1,-2,3,-2)$, $L\mathbf{v} = (1,1,0,1)$

Elég megmutatni, hogy az $[\mathbf{u} \mid \mathbf{v} \mid L\mathbf{u} \mid L\mathbf{v}]$ rangja 2.

- (még megmutathatjuk azt is, hogy e voktorok és képeik közt mi a lineáris kapcsolat:

$$\mathbf{rref}\left([\mathbf{u} \mid \mathbf{v} \mid L\mathbf{u} \mid L\mathbf{v}]\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix},$$

azaz $L\mathbf{u} = \frac{4}{3}\mathbf{u} - \frac{1}{3}\mathbf{v}$, $L\mathbf{v} = \frac{1}{3}\mathbf{u} + \frac{2}{3}\mathbf{v}$.)

F* Igazoljuk, hogy ha A és B felcserélhetők, akkor A minden sajátaltere B-nek invariáns altere!

M Ha $\mathcal{V}_\lambda = \{\mathsf{x} : \mathsf{A}\mathsf{x} = \lambda\mathsf{x}\}$ és $\mathsf{v} \in \mathcal{V}_\lambda$, akkor
$\mathsf{A}(\mathsf{B}\mathsf{v}) = (\mathsf{A}\mathsf{B})\mathsf{v} = \mathsf{B}\mathsf{A}\mathsf{v} = \mathsf{B}\lambda\mathsf{v} = \lambda(\mathsf{B}\mathsf{v}) \rightsquigarrow \mathsf{B}\mathsf{v} \in \mathcal{V}_\lambda$

F* Az A lin.trafó minden polinomjának magtere és képtere A-invariáns (a négyzetes A mátrix minden polinomjának nulltere és oszloptere A-invariáns).

M L! $p \in \mathbb{F}[x]$, $\mathsf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Ha $\mathsf{v} \in \mathcal{N}(p(\mathsf{A})) \rightsquigarrow p(\mathsf{A})\mathsf{v} = \mathsf{0} \rightsquigarrow$
$p(\mathsf{A})(\mathsf{A}\mathsf{v}) = p(\mathsf{A})\mathsf{A}\mathsf{v} = \mathsf{A}p(\mathsf{A})\mathsf{v} = \mathsf{A}\mathsf{0} = \mathsf{0} \rightsquigarrow \mathsf{A}\mathsf{v} \in \mathcal{N}(p(\mathsf{A}))$

- Ha $\mathsf{v} \in \mathcal{O}(p(\mathsf{A})) \rightsquigarrow \exists \mathsf{u} : \mathsf{v} = p(\mathsf{A})\mathsf{u} \rightsquigarrow$
$\mathsf{A}\mathsf{v} = \mathsf{A}p(\mathsf{A})\mathsf{u} = p(\mathsf{A})\mathsf{A}\mathsf{u} \in \mathcal{O}(p(\mathsf{A}))$

Blokkháromszög mátrixok*

T Blokkháromszög mátrix és az invariáns altér: L! az $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lin trafónak $\mathcal{U}$ invariáns altere. Ekkor L mátrixa

$$\mathsf{L} = \begin{bmatrix} \mathsf{U} & * \\ \mathsf{O} & * \end{bmatrix}$$

alakú a $\mathcal{V}$ $\forall$ olyan bázisában, mely tartalmazza $\mathcal{U}$ bázisát.

P Az

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixban az $\mathcal{U} = \mathrm{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \leqslant \mathbb{R}^4$ tér invariáns altere.

B L! $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ az $\mathcal{U}$, $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \dots, \mathbf{u}_n\}$ a $\mathcal{V}$ bázisa. Mivel

$$L\mathbf{u}_i = u_{i1}\mathbf{u}_1 + \dots + u_{ir}\mathbf{u}_r + 0\mathbf{u}_{r+1} + \dots + 0\mathbf{u}_n \quad (i = 1, 2, \dots, r),$$

ezért a mátrix alakja

$$\mathsf{L} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & \dots & u_{r1} & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{1r} & u_{2r} & \dots & u_{rr} & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & * & \dots & * \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathsf{U} & * \\ \mathsf{O} & * \end{bmatrix}.$$

Blokkdiagonális mátrixok

T Blokkdiagonális mátrixok és az invariáns alterek: L! az $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lin trafó két invariáns altere $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$. Ha $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, akkor L mátrixa

$$\mathsf{L} = \begin{bmatrix} \mathsf{U} & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & \mathsf{W} \end{bmatrix}$$

a $\mathcal{V}$ $\forall$ olyan bázisában, mely az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ bázisainak uniója.

m Általánosítás: ha $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_k$ a $\mathcal{V}$ vektortér invariáns alterei, és $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{U}_k$, akkor L mátrixa blokkdiagonális alakú minden olyan bázisban, mely az alterek bázisainak egyesítése.

m
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \mathcal{U}_1 &= \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}, \\ \mathcal{U}_2 &= \{\mathbf{e}_4\}, \\ \mathcal{U}_3 &= \{\mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6\} \\ \mathcal{V} &= \mathbb{R}^6 = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \mathcal{U}_3 \end{aligned} .$$

B L! $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ és $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-r}\}$ az $\mathcal{U}$ és $\mathcal{W}$ egy-egy bázisa. Mivel $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$, ezért egyesítésük a $\mathcal{V}$ egy bázisát adja. L e bázisra vonatkozó mátrixa a bázisvektorok képvektoraiból alkotott mátrix:

$$L\mathbf{u}_i = u_{i1}\mathbf{u}_1 + \cdots + u_{ir}\mathbf{u}_r + 0\mathbf{w}_1 + \cdots + 0\mathbf{w}_{n-r}$$

$$L\mathbf{w}_j = 0\mathbf{u}_1 + \cdots + 0\mathbf{u}_r + w_{j,r+1}\mathbf{w}_1 + \cdots + w_{j,n}\mathbf{w}_{n-r}$$

ahol $i = 1, \dots, r$, $j = r+1, \dots, n$. Így a mátrix alakja

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & \dots & u_{r1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_{1r} & u_{2r} & \dots & u_{rr} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & w_{r+1,r+1} & w_{r+2,r+1} & \dots & w_{n,r+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & w_{r+1,n} & w_{r+2,n} & \dots & w_{n,n} \end{bmatrix},$$

Általánosított sajátvektorok

m Az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

mátrix hatása a standard bázison:

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_1 = 4\mathbf{e}_1$$
$$\mathbf{A}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$$
$$\mathbf{A}\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$$

Átrendezés után:

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}$$
$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1$$
$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2$$

- $\mathbf{A} - 4\mathbf{I}$ hatásának diagramja:

$$\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_1 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_2 \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{e}_3$$

- Eszerint $\mathbf{e}_1$ sajátvektor, és $\mathbf{A}$-nak más sajátvektora nincs, viszont

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2\mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$$
$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^3\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}.$$

Általánosított sajátvektor

D Az $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektort a négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékéhez tartozó általánosított sajátvektorának nevezzük, ha valamilyen k természetes számra $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$k = 1$ esetén $\mathbf{x}$ sajátvektor. Az általánosított sajátvektorokból álló $\mathbf{x}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ sorozatot Jordan-láncnak nevezzük, ha $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1}$ és $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$.

Egy tér diszjunkt Jordan-láncokból álló bázisát Jordan-bázisnak nevezzük.

Jordan-lánc és Jordan-bázis konstrukciója

P Keressünk egy Jordan-bázist! Tudjuk, hogy $\chi_{\mathbf{A}}(x) = (4-x)^3$.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

M A sajátaltér 1-dimenziós, melyet az $\mathbf{x} = (1, -1, 1)$ vektor feszít ki.

- $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^3 = \mathbf{O}$, de $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2 \neq \mathbf{O} \rightsquigarrow \exists \mathbf{x}_3 : (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2 \mathbf{x}_3 \neq \mathbf{0}$
- $$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

  $\rightsquigarrow (\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2(x, y, z) = (-x + z, x - z, -x + z) \rightsquigarrow x \neq z$, pl $(1, 0, 0)$

  $\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_1 = (-1, 1, -1) \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_2 = (2, -1, 2) \xleftarrow{\mathbf{A}-4\mathbf{I}} \mathbf{x}_3 = (1, 0, 0)$

- A alakja az $\{\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \mathsf{x}_3\}$ bázisban

$$\mathsf{J} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

ugyanis $\mathsf{A}\mathsf{x}_3 = \mathsf{x}_2 + 4\mathsf{x}_3$, $\mathsf{A}\mathsf{x}_2 = \mathsf{x}_1 + 4\mathsf{x}_2$, $\mathsf{A}\mathsf{x}_1 = 4\mathsf{x}_1$, aminek mátrixszorzat alakja:

$$\mathsf{A}[\mathsf{x}_1 \,|\, \mathsf{x}_2 \,|\, \mathsf{x}_3] = [\mathsf{x}_1 \,|\, \mathsf{x}_2 \,|\, \mathsf{x}_3] \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$\rightsquigarrow$ $\mathsf{X}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{X} = \mathsf{J}$, ahol $\mathsf{X} = [\mathsf{x}_1 \,|\, \mathsf{x}_2 \,|\, \mathsf{x}_3]$ (X az $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{X}$ áttérés mátrixa!)

- Konkrétan: $\mathsf{J} = \mathsf{X}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{X} =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

P $\mathsf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 4 & 10 & -4 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, $\chi_{\mathsf{C}}(x) = (4-x)^3$.

M Sajátaltér: $\mathrm{span}((1,0,1),(0,2,3))$

$(\mathsf{C}-4\mathsf{I})^2 = \mathsf{O}$ (legföljebb kettő hosszú láncra számíthatunk),

$\exists \mathsf{x}_2 : (\mathsf{C}-4\mathsf{I})\mathsf{x}_2 \neq \mathsf{0}$

- $$\mathsf{C}-4\mathsf{I} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & -4 \\ 4 & 6 & -4 \end{bmatrix},$$

  $\rightsquigarrow$ pl. $\mathsf{x}_2 = (1,0,0)$ megfelel.

- $\mathsf{x}_1 = (\mathsf{C}-4\mathsf{I})\mathsf{x}_2 = (-2,4,4)$ (a sajátaltérben van, de különbözik a kapott sajátvektoroktól:

  $\mathsf{x}_1 = (-2,4,4) = -2(1,0,1) + 2(0,2,3)$.)

- y_1 legyen független x_1-től:

$$\mathsf{0} \xleftarrow{\mathsf{C}-4\mathsf{I}} \mathsf{x}_1 = (-2,4,4) \xleftarrow{\mathsf{C}-4\mathsf{I}} \mathsf{x}_2 = (1,0,0)$$

$$\mathsf{0} \xleftarrow{\mathsf{C}-4\mathsf{I}} \mathsf{y}_1 = (1,0,1)$$

- C alakja az $\{x_1, x_2, y_1\}$ bázisban

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

- $J = X^{-1}AX =$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 4 & 6 & -4 \\ 4 & 6 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Jordan-blokk

D A négyzetes mátrixot, melynek főátlójában azonos λ értékek, fölötte 1-esek, egyebütt 0-k állnak, Jordan-blokknak nev.:

$$\mathbf{J}_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \tag{1}$$

m Egy Jordan-blokknak a standard bázisvektorok általánosított sajátvektorai, ui. $i > 1$ esetén $\mathbf{J}_\lambda \mathbf{e}_i = \lambda \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_{i-1}$, azaz $(\mathbf{J}_\lambda - \lambda \mathbf{I})\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{i-1}$, és így e vektorok egyetlen Jordan-láncot alkotnak: $\mathbf{0} \xleftarrow{\mathbf{J}_\lambda - \lambda \mathbf{I}} \mathbf{e}_1 \xleftarrow{\mathbf{J}_\lambda - \lambda \mathbf{I}} \mathbf{e}_2 \xleftarrow{\mathbf{J}_\lambda - \lambda \mathbf{I}} \dots \xleftarrow{\mathbf{J}_\lambda - \lambda \mathbf{I}} \mathbf{e}_n$

m Sőt, ha egy mátrix Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrix, akkor a standard bázis diszjunkt Jordan-láncokból áll.

Jordan-féle normálalak

Jordan-tétel

T Tfh $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$, és $\chi_{\mathbf{A}}(x)$ lineáris tényezők szorzatára bomlik $\mathbb{F}$ fölött (azaz minden gyöke $\mathbb{F}$-beli). Ekkor $\mathbf{A}$ hasonló egy ún. Jordan-mátrixhoz, mely Jordan-blokkokból álló blokkdiagonális mátrix, azaz $\exists \mathbf{C} : \mathbf{J} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ alakja

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{J}_2 & \dots & \mathbf{O} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{J}_k \end{bmatrix} \tag{2}$$

ahol k az $\mathbf{A}$ független sajátvektorainak maximális száma, és $\mathbf{J}_i$ az i-edik sajátvektorhoz tartozó Jordan-blokk.

m Algebrailag zárt $\mathbb{F}$ test (pl. $\mathbb{C}$) esetén minden $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ mátrix hasonló egy Jordan-mátrixhoz, és minden lineáris $A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ trafóhoz van olyan bázis, melyben mátrixa Jordan-mátrix.

D Az $\mathbf{A} = \mathbf{CJC}^{-1}$ alakú felbontását az $\mathbf{A}$ Jordan-felbontásának nev.

K Minden $\mathbb{C}^{n\times n}$-beli mátrixhoz és minden $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ lineáris transzformációhoz van olyan bázis, melyben mátrixa Jordan-normálalakú.

m A különböző Jordan-blokkok különböző sajátvektorokhoz tartoznak, de egy sajátérték több Jordan-blokkban is szerepelhet.

m A tétel hasonlóságról szól, így lineáris transzformációkra is megfogalmazható:

T (Jordan-tétel másik alakja) L! $\mathcal{V}$ véges dimenziós $\mathbb{F}$ fölötti vektortér, $A : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris transzformáció és χ_A minden gyöke legyen $\mathbb{F}$-beli. Ekkor $\mathcal{V}$-nek van Jordan-bázisa.

D E bázisban A mátrixa Jordan-mátrix, melyet az A Jordan-féle normálalakjának nevezünk. Ez egyúttal normálalakja az A bármely más bázisban felírt $\mathbf{A}$ mátrixának is.

P Hány nem hasonló normálalak létezik, ha $\chi(\lambda) = (1-\lambda)^4$.

M

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jordan-tétel bizonyítása*

B L! $\mathcal{V}$ vektortér és $A : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lin. trafó.
Megmutatjuk, hogy ha van maximum k független sajátvektor, akkor található k Jordan-lánc is, melyek vektorai a tér bázisát adják.

1 Teljes indukció: $n = 1$ ✓, tfh minden n-nél kisebb dimenzióra igaz

2 $(\lambda, \mathbf{x})$ sajátpár, $\mathcal{N}_\lambda := \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ a sajátaltér, dimenziója r,
$\mathcal{U}_\lambda := \mathrm{Im}(A - \lambda I)$.
$r > 0 \rightsquigarrow \dim(\mathcal{U}_\lambda) = n - r < n$

3 $\mathcal{U}_\lambda$ invariáns altere A-nak, azaz $A(\mathcal{U}_\lambda) \subseteq \mathcal{U}_\lambda$,
ugyanis $\mathcal{U}_\lambda$ elemei $(A - \lambda I)\mathbf{v}$ alakúak ($\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ tetszőleges),
$A(A - \lambda I)\mathbf{v} = (A^2 - \lambda A)\mathbf{v} = (A - \lambda I)(A\mathbf{v}) \in \mathcal{U}_\lambda$.

4 Az indukciós feltevés szerint A-nak az $\mathcal{U}_\lambda$-ra való megszorításához léztezik Jordan-láncokból álló bázis:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \xleftarrow{A-\lambda_1 I} & \mathbf{x}_1^1 & \xleftarrow{A-\lambda_1 I} & \dots & \xleftarrow{A-\lambda_1 I} & \mathbf{x}_{s_1}^1 \\
0 & \xleftarrow{A-\lambda_2 I} & \mathbf{x}_1^2 & \xleftarrow{A-\lambda_2 I} & \dots & \xleftarrow{A-\lambda_2 I} & \mathbf{x}_{s_2}^2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \xleftarrow{A-\lambda_p I} & \mathbf{x}_1^p & \xleftarrow{A-\lambda_p I} & \dots & \xleftarrow{A-\lambda_p I} & \mathbf{x}_{s_p}^p
\end{array}$$

5 $\mathcal{Q} = \mathcal{U}_\lambda \cap \mathcal{N}_\lambda$, $q = \dim(\mathcal{U}_\lambda \cap \mathcal{N}_\lambda)$

$q = 0$ $(\mathcal{U}_\lambda \cap \mathcal{N}_\lambda = \{\mathbf{0}\}) \rightsquigarrow \mathcal{U}_\lambda$ és $\mathcal{N}_\lambda$ kiegészítő alterek $\rightsquigarrow \mathcal{U}_\lambda$ J-bázisa $\cup\, \mathcal{N}_\lambda$ egy bázisa = tér egy Jordan-bázisa

$q > 0$. $\mathcal{N}_\lambda$ elemei az A sajátvektorai: $\mathcal{Q}$ egy bázisa $\mathbf{x}_1^1, \mathbf{x}_1^2, \dots, \mathbf{x}_1^q$. Láncaik végén $\mathbf{x}_{s_k}^k \in \mathcal{U}_\lambda \rightsquigarrow \exists \mathbf{y}_k$: $(A - \lambda I)\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_{s_k}^k$ $(k = 1, 2, \dots, q)$.

6 $\dim(\mathcal{N}_\lambda) = r$, $\dim(\mathcal{Q}) = q \rightsquigarrow \mathsf{z}_1, \ldots, \mathsf{z}_{r-q}$ sajátvektorokból:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\multicolumn{9}{r}{\mathcal{V}} \\
0 & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathsf{z}^1 & & & & & & \\
\vdots & & \vdots & \mathcal{N}_\lambda & & & & & \\
0 & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathsf{z}^{r-q} & & & & & & \\
\multicolumn{6}{r}{\mathcal{U}_\lambda} & & & \\
0 & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathsf{x}_1^1 & \xleftarrow{A-\lambda I} & \ldots & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathsf{x}_{s_1}^1 & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathsf{y}^1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathsf{x}_1^q & \xleftarrow{A-\lambda I} & \ldots & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathsf{x}_{s_q}^q & \xleftarrow{A-\lambda I} & \mathsf{y}^q \\
0 & \xleftarrow{A-\lambda_{q+1} I} & \mathsf{x}_1^{q+1} & \xleftarrow{A-\lambda_{q+1} I} & \ldots & \xleftarrow{A-\lambda_{q+1} I} & \mathsf{x}_{s_{q+1}}^{q+1} & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
0 & \xleftarrow{A-\lambda_p I} & \mathsf{x}_1^p & \xleftarrow{A-\lambda_p I} & \ldots & \xleftarrow{A-\lambda_p I} & \mathsf{x}_{s_p}^p & &
\end{array}
$$

7 $\mathbf{x}$-vektorok száma $n-r$, $\mathbf{y}$-vektorok száma q, $\mathbf{z}$-vektorok száma $r-q$, $(n-r)+q+(r-q)=n$.

8 Belátjuk, hogy függetlenek.

- A konstrukcióból $\rightsquigarrow$: $\mathbf{x}$- és $\mathbf{z}$-vektorok mind függetlenek.
- Az $\mathbf{y}^1,\dots,\mathbf{y}^q$ vektorok lineárisan függetlenek, hisz $A-\lambda I$ általi képvektoraik (az $\mathbf{x}^i_{s_i}$ vektorok) függetlenek.
- Az $\mathbf{y}^1,\dots,\mathbf{y}^q$ vektorok nem-triviális lineáris kombinációi nem eshetnek $\mathcal{N}_\lambda$-ba, mert azt $A-\lambda I$ a $\mathbf{0}$-ba viszi, így az $\mathbf{y}$-vektorok függetlenek a $\mathbf{z}$-vektoroktól.
- Az $\mathbf{y}^1,\dots,\mathbf{y}^q$ vektorok nem-triviális lineáris kombinációi nem eshetnek $\mathcal{U}_\lambda$-ba sem, mert az $A-\lambda I$ egy ilyen lineáris kombinációt az A transzformáció λ-hoz tartozó Jordán-láncai végső vektorainak lineáris kombinációjába visz. Ha $\mathcal{U}_\lambda$ bármely vektorának e vektor lenne a képe, akkor az általánosított sajátvektor lenne, azok alterében lévő vektorokat viszont $A-\lambda I$ nem vihet a fenti lineáris kombinációba.

A Jordan-alak egyértelműsége

L

1. Egy $k \times k$-as Jordan-blokk hatványai rangjának sorozata $\lambda = 0$ esetén: k, $k-1$, $k-2$..., 2, 1, 0; $\lambda \neq 0$ esetén: k, k,..., k.
2. Egy $\mathbf{J}$ Jordan-mátrixra $d_k := \mathrm{r}((\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I})^{k-1}) - \mathrm{r}((\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I})^{k})$
   = a λ-hoz tartozó legalább k-adrendű Jordan-bl. száma
   = a λ-hoz tartozó legalább k-hosszú Jordan-láncok száma
3. Egy $\mathbf{J}$ Jordan-mátrixra $n_k = d_k - d_{k+1}$
   = a λ-hoz tartozó k-adrendű Jordan-blokkok száma
   = λ-hoz tartozó k-hosszú Jordan-láncok száma
4. A legnagyobb λ-blokk mérete $s \iff s$ az a legkisebb kitevő, melyre $\mathrm{r}((\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I})^{s}) = \mathrm{r}((\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I})^{s+1})$.

B

1. $\lambda = 0$ ✓; $\lambda \neq 0$ esetén a blokk invertálható ✓
2. A k-nál kisebb rendű blokkok rangja e hatványokban 0, minden más blokkban eggyel csökken
4. ha van s-nél hosszabb lánc, a rang csökken ha a kitevő s-ről $s+1$-re nő

T **A Jordan-normálalak egyértelműsége**

Egy mátrix Jordan-normálalakja a Jordan-blokkok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

B Elég belátni, hogy bármely két hasonló mátrix Jordan-alakjának meghatározó adatai a hasonlóságra nézve invariánsak.

- A Jordan-blokkok, és így a Jordan-láncok száma megegyezik a független sajátvektorok maximális számával – ez invariáns.
- A λ-hoz tartozó $k \times k$-as blokkok száma Jordan-mátrix esetén csak a $\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I}$ hatványainak rangjától függ, ami invariáns.

K Az $\mathbf{A}$ Jordan-féle normálalkjának meghatározásához elég ismerni $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ hatványainak rangját minden λ sajátértékre.

B ha $\mathbf{A} \sim \mathbf{J}$, akkor $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} \sim \mathbf{J} - \lambda\mathbf{I}$
$\rightsquigarrow$ $\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I}$ és $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ hatványainak rangjai megegyeznek