BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Lineáris algebra mérnököknek

BMETE93BG20

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér

Kf81 2018-11-20

Wettl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK

Célok

E lecke befejezése után a hallgató

- meg tudja határozni mátrix vagy lineáris leképezés sajátértékeit, sajátvektorait, sajátaltereit, sajátértékeinek algebrai és geometriai multiplicitását,
- jellemezni tudja speciális mátrixok sajátértékeit (szimmetrikus, ferdén szimmetrikus, ortogonális, nilpotens),
- diagonális alakra tudja hozni az egyszerűbb diagonalizálható mátrixokat, ill. fel tudja írni sajátfelbontásukat,
- $\mathbb{R}^{2\times 2}$ és $\mathbb{R}^{3\times 3}$ szimmetrikus mátrixaihoz olyan ortonormált bázist tud adni, melyben annak alakja diagonális.

Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér

Jó bázis választása

P Tükrözzük a 3-dimenziós tér vektorait a tér egy megadott síkjára! Válasszunk e lineáris leképezés leírásához egy megfelelő bázist, majd írjuk fel a tükrözés e bázisra vonatkozó mátrixát!

M A sík egy bázisa $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, a rá merőleges altér egy bázisa $\{\mathbf{c}\}$.

A T leképezés hatása e vektorokon: $T\mathbf{a} = \mathbf{a}$, $T\mathbf{b} = \mathbf{b}$ és $T\mathbf{c} = -\mathbf{c}$.

Az $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ bázisban T mátrixa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

E bázisban egy tetszőleges (x, y, z) vektor tükörképe $(x, y, -z)$.

Lineáris transzformációk sajátvektorai

D L! $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ vektortér, $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris transzformáció. Amh az $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor az L trafó sajátvektora, ha $L\mathbf{x} \parallel \mathbf{x}$, azaz ha van olyan $\lambda \in \mathbb{F}$ szám, melyre $L\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.
Az ilyen λ számot az L lineáris transzformáció sajátértékének nevezzük.

m Ha $\mathbf{x}$ sajátvektor, akkor minden $c\mathbf{x}$ ($c \neq 0$) is:

$$L(c\mathbf{x}) = cL\mathbf{x} = c\lambda\mathbf{x} = \lambda(c\mathbf{x}),$$

azaz $L(c\mathbf{x}) = \lambda(c\mathbf{x})$.

Á A sajátvektorok alterei: Ha az L lin.trafónak λ egy sajátértéke, akkor a λ-hoz tartozó sajátvektorok a nullvektorral együtt alteret alkotnak, mely megegyezik a $\mathrm{Ker}(L - \lambda I)$ altérrel.

B $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ sv. $\iff L\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \iff L\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff (L - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ $\iff \mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(L - \lambda I)$.

Sajátaltér

D Az L lin.trafó λ sajátértékhez tartozó sajátvektorai és a **0** alkotta alteret a λ s.é.-hez tartozó sajátaltérnek nevezzük.

P

1. L! $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ vektortér, I az identikus leképezés. Ekkor a tetszőleges $c \in \mathbb{F}$ számra a cI leképezésnek a $\mathcal{V}$ tér minden nemnulla vektora a c számhoz tartozó sajátvektora.
2. L! $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ a valósok halmazán akárhányszor diffható valós függvények tere és $D : \mathcal{V} \to \mathcal{V}; f \mapsto f'$. D sajátvektora $\mathrm{e}^{\lambda x}$, ami épp a λ sajátértékhez tartozik, mert $(\mathrm{e}^{\lambda x})' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}$.
3. A sík $\alpha \neq k\pi$ szöggel való elforgatásának nincs sajátvektora.

F Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér?

1. a sík vektorainak tükrözése egy egyenesre;
2. a sík vektorainak merőleges vetítése egy egyenesre;
3. a tér vektorainak forgatása egyenes körül $\alpha \neq k\pi$ szöggel;
4. a tér vektorainak merőleges vetítése egy síkra;
5. a tér vektorainak tükrözése egy síkra.

Mátrixleképezés sajátértéke, sajátvektora, sajátaltere

D L! $\mathbb{F}$ test. Amh a $\lambda \in \mathbb{F}$ szám az $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ mátrix sajátértéke, ha létezik olyan $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektor, melyre $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

Az ilyen $\mathbf{x}$ vektorokat az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó sajátvektorainak, az általuk a $\mathbf{0}$ vektorral alkotott alteret az $\mathbf{A}$ sajátalterének, a $(\lambda, \mathbf{x})$ párokat az $\mathbf{A}$ sajátpárjainak nevezzük.

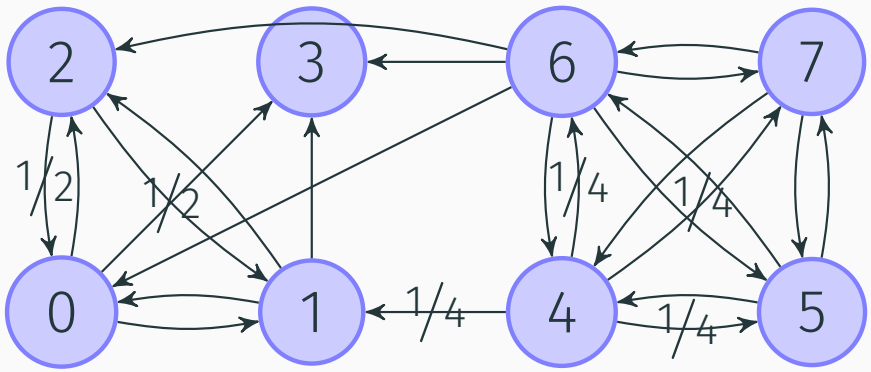
$\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ bal sajátvektor, ha $\mathbf{y}^\top\mathbf{A} = \lambda\mathbf{y}^\top$, azaz ha $\mathbf{y}$ az $\mathbf{A}^\top$ sajátvektora.

P $(-1, (2, 1))$ és $(2, (1, 2))$ egy-egy sajátpárja a $\left[\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ mátrixnak, mert

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

Egy híres alkalmazás: a 25 000 000 000$-os sajátvektor*

? Rangsoroljuk a dokumentumokat a hivatkozások gráfja alapján aszerint, hogy ha véletlenül bolyongunk a dokumentumok közt, akkor az legyen rangosabb, ahol többször járunk.



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

- Módosítás, hogy minden dokumentumból kiléphessünk:

$$[\mathbf{A}]_{ij} = \begin{cases} 1/k, & \text{ha megy i-ből j-be él és i ki-foka k,} \\ 1/n, & \text{ha i ki-foka 0 és n a csúcsok száma,} \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

- Módosítás, hogy ne ragadjunk be dokumentumok egy csoportjába:

$$\mathbf{M} = (1-d)\mathbf{A} + d\frac{1}{n}\mathbf{J},$$

ahol $\mathbf{J}$ a csupa 1-esből álló mátrix, n e négyzetes mátrixok rendje, és $d \in (0,1)$.
Empírikus $d \in (0.1, 0.2)$ a jó választás, pl. $d = 0.15$, így $1 - d = 0.85$. Ekkor kerekített jegyekkel

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0.019 & 0.302 & 0.302 & 0.302 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 \\ 0.302 & 0.019 & 0.302 & 0.302 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 \\ 0.444 & 0.444 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 \\ 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 \\ 0.019 & 0.231 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.231 & 0.231 & 0.231 \\ 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.302 & 0.019 & 0.302 & 0.302 \\ 0.160 & 0.019 & 0.160 & 0.160 & 0.160 & 0.160 & 0.019 & 0.160 \\ 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.019 & 0.302 & 0.302 & 0.302 & 0.019 \end{bmatrix}$$

- Ha $\mathbf{x}$ a bolyongás kiindulópontjának valószínűségeloszlását megadó vektor, akkor az első lépés után a gráf i pontjában $[\mathbf{x}^\top \mathbf{M}]_i$ valószínűséggel leszünk, az m-edik lépés után $[\mathbf{x}^\top \mathbf{M}^m]_i$ valószínűséggel.

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{x}^\top \mathbf{M}^m = \mathbf{v}^\top.$$

- (A pozitív mátrixok elmélete, Markov-láncok) $\rightsquigarrow$ $\mathbf{v}^\top$ az ún. stacionárius eloszlás, melyre $\mathbf{v}^\top = \mathbf{v}^\top \mathbf{M}$, és amely megadja, hogy egy-egy pontban aszimptotikusan mekkora valószínűséggel vagyunk a bolyongás során.
- $\mathbf{v} = (0.151, 0.157, 0.137, 0.137, 0.106, 0.100, 0.112, 0.100)$.
- Tehát a dokumentumok sorrendje: 1, 0, 2 & 3, 6, 4, 5 & 7 (két holtversennyel).

Sajátérték és sajátaltér meghatározása

Hogyan találjuk meg a sajátértékeket?

Á λ pontosan akkor sajátértéke $\mathbf{A}$-nak, ha $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

B $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ sv. $\iff$ $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ $\iff$ $\mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$ $\iff$ $\mathbf{x}$ megoldása $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletnek $\iff$ $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ $\iff$ $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

D L! $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$. A $\chi(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ polinomot az $\mathbf{A}$ mátrixhoz tartozó karakterisztikus polinomnak, a $\chi(\lambda) = 0$ egyenletet az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus egyenletének nevezzük.

m Néhol a kar. pol. $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$, ami mindig 1-főegyütthatójú, de a konstans tag nem mindig a determináns.

T Racionális gyökteszt: Ha az $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ egészegyütthatós polinomnak van egyszerűsített alakjában $\frac{p}{q}$ alakú gyöke, akkor $p \mid a_0$, $q \mid a_n$. Ha $a_n = 1$, akkor minden racionális gyök egész!

B $a_n(\frac{p}{q})^n + \ldots + a_0 = 0 \rightsquigarrow a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_0 q^n = 0$

Horner-módszer (Horner-séma) a gyök ellenőrzésére

T Horner-módszer: Tekintsük az $\mathbb{F}$ test fölötti $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ polinomot. Legyen

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n, \\ b_{k-1} &= cb_k + a_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \\ r &= cb_0 + a_0. \end{aligned}$$

Táblázatban:

	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_1	a_0
c	b_{n-1}	b_{n-2}	$\ldots$	b_0	r

(a) Ekkor $p(x) = (x-c)(b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0) + r$, azaz leolvasható a $p(x)/(x-c)$ osztás hányadosa és maradéka.
(b) $r = p(c)$ *(c)* $r = p(c) = 0 \Rightarrow x - c \mid p(x)$

B A $p(x) = (x-c)(b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0) + r$, egyenlőséget a zárójel felbontása és a b_i értékek behelyettesítése igazolja. Az $x = c$-t helyettesítésből $p(c) = r$.

P Számítsuk ki $p(5)$ értékét, ha $p(x) = x^5 - 3x^4 - 6x^3 - 90x + 3$.

M Ne feledkezzünk meg a 0 együtthatókról! Kezdő lépés: a második sor első oszlopába írjuk azt az értéket, amelyben ki akarjuk számítani p értékét, esetünkben ez 5. Majd bemásoljuk a p polinom főegyütthatóját a második sor második oszlop első helyére:

	1	−3	−6	0	−90	3
5	1					

Ezután minden lépésben egy szorzás és egy összeadás következik a tételbeli $c \cdot b_k + a_k$ képlet szerint.

	1	−3	−6	0	−90	3
5	1					

$$5 \cdot 1 - 3 = 2$$

	1	−3	−6	0	−90	3
5	1	2				

$$5 \cdot 2 - 6 = 4$$

	1	-3	-6	0	-90	3
5	1	2	4			

$$5 \cdot 4 + 0 = 20$$

	1	-3	-6	0	-90	3
5	1	2	4	20		

$$5 \cdot 20 - 90 = 10$$

	1	-3	-6	0	-90	3
5	1	2	4	20	10	

$$5 \cdot 10 + 3 = 53$$

	1	-3	-6	0	-90	3
5	1	2	4	20	10	53

Tehát $p(5) = 53$.

Karakterisztikus polinom felírása

P Határozzuk meg az

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathsf{C} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

mátrixok karakterisztikus polinomját!

M Minden 2×2-es mátrixra:

$$\begin{aligned} \det(\mathsf{A} - \lambda \mathsf{I}) &= \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc \\ &= \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) \\ &= \lambda^2 - \operatorname{trace}(\mathsf{A})\lambda + \det \mathsf{A}. \end{aligned}$$

nyom, determináns!

Karakterisztikus polinom felírása (folyt)

$$\det(\mathsf{B} - \lambda \mathsf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & b \\ 0 & 1-\lambda & c \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

$$\begin{aligned} \det(\mathsf{C} - \lambda \mathsf{I}) &= \begin{vmatrix} a-\lambda & b & c \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (a-\lambda)\lambda^2 + b\lambda + c \\ &= -\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c. \end{aligned}$$

Háromszögmátrixok sajátértékei

T A háromszögmátrixok és így a diagonális mátrixok sajátértékei megegyeznek a főátló elemeivel.

B A háromszögmátrix $\rightsquigarrow$ $\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I}$ is $\rightsquigarrow$

$$\det(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I}) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\dots(a_{nn} - \lambda) = 0,$$

aminek a gyökei a_{ii} $(i = 1, \dots, n)$. Így ezek az A sajátértékei.

Determináns, nyom és a sajátértékek

T Ha az n-edrendű A mátrix sajátértékei λ_1,..., λ_n, akkor

$$\det(\mathsf{A}) = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$$

$$\mathrm{trace}(\mathsf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

A determináns a konstans tag, a nyom a $(-\lambda)^{n-1}$ együtthatója a karakterisztikus polinomban.

B A karakterisztikus polinom gyöktényezős alakja:

$$\det(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I}) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\ldots(\lambda_n - \lambda)$$

$\lambda = 0$ behelyettesítése után kapjuk, hogy $\det(\mathsf{A}) = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$.

- $(-\lambda)^{n-1}$ szorzat a determináns kígyók determinánsainak összegére bontása alapján csak az $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\ldots(a_{nn} - \lambda)$ szorzatból kapható, onnan pedig az épp $\sum_i a_{ii} = \mathrm{trace}(\mathsf{A})$.

Sajátaltér meghatározása

P Adjuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix 2-höz és a 10-hez tartozó sajátalterét.

M a 2 sajátérték $\iff$ $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszernek van nemtriviális megoldása.

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -6s - t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

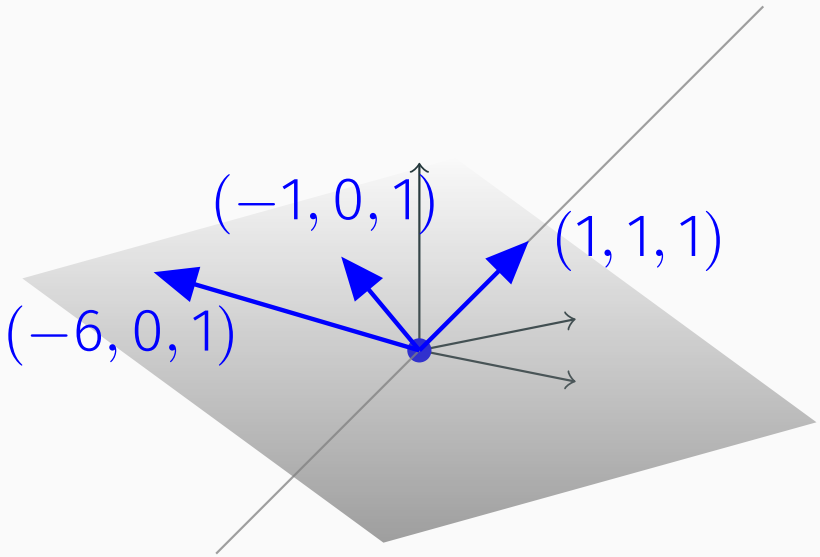
A sajátaltér egy bázisa $\{(-6, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

Sajátaltér meghatározása (folyt)

A 10 is sajátérték:

$$\mathbf{A} - 10\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -7 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & -7 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. A sajátalteret az $(1, 1, 1)$ vektor feszíti ki.



2×2-es mátrixok sajátvektorainak szemléltetése

P Határozzuk meg a következő mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait.

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathsf{C} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathsf{D} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

M

$$|\mathsf{D} - \lambda \mathsf{I}| = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} - \lambda & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

$$\lambda_1 = \mathrm{i}: \quad \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} - \mathrm{i} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} - \mathrm{i} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ amiből } \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix},$$

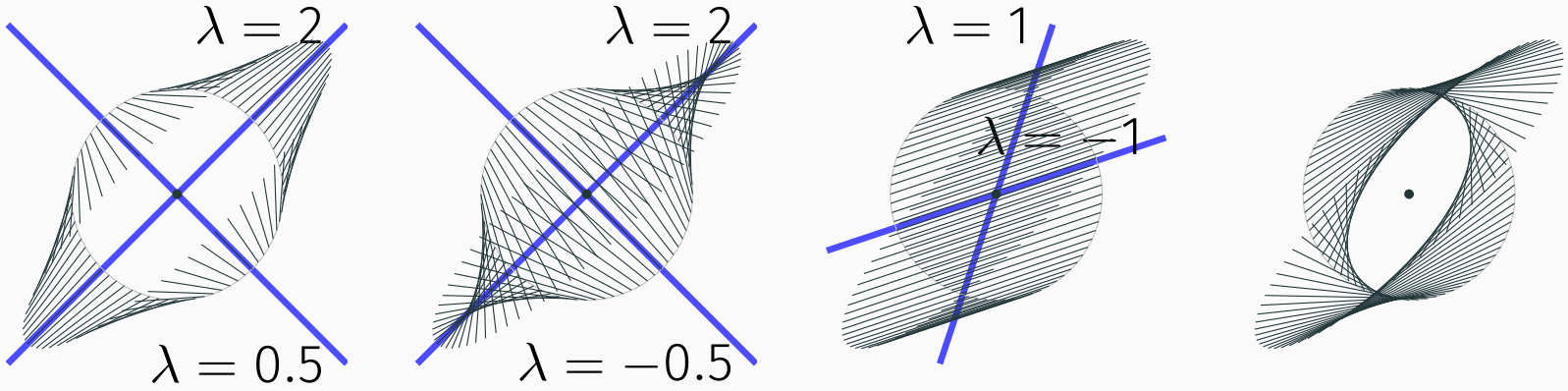
$$\lambda_2 = -\mathrm{i}: \quad \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} + \mathrm{i} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} + \mathrm{i} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ amiből } \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\chi_{\mathsf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1, \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \frac{1}{2}, \qquad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\chi_{\mathsf{B}}(\lambda) = \lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda - 1, \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\chi_{\mathsf{C}}(\lambda) = \lambda^2 - 1, \qquad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\chi_{\mathsf{D}}(\lambda) = \lambda^2 + 1, \qquad \lambda_1 = \mathrm{i},\ \lambda_2 = -\mathrm{i}, \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix}.$$



Sajátértékek és sajátvektorok meghatározása

m Tankönyvi módszer:

1. $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ gyökeinek meghatározása (sajátértékek)
2. $\forall\ \lambda$: $\mathcal{N}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ bázisának meghatározása (a nulltér nemzérus vektorai a sajátvektorok)

P

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

M

1. felső háromszögmátrix: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$
2. $\lambda = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \rightsquigarrow t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = \lambda_3 = 2$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow 2x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} (s+t)/2 \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tehát a két sajátaltér $\mathrm{span}((1,0,0))$ és $\mathrm{span}((1/2,1,0),(1/2,0,1))$.

Karakterisztikus polinom és a racionálisgyök-tétel

P $\quad \mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

M $\quad \mathsf{A} - \lambda \mathsf{I} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -(\lambda^3 - 4\lambda^2 - 11\lambda - 6)$

racionálisgyök-tétellel: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ és $\lambda_3 = 6$.

$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$:

$$\mathsf{A} + \mathsf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$\lambda_3 = 6$:

$$\mathbf{A} - 6\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \\ 3 & 3 & -4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{aligned} x_1 \qquad - \frac{2}{3}x_3 &= 0 \\ x_2 - \frac{2}{3}x_3 &= 0. \end{aligned}$$

$x_3 = 3t$ paraméterválasztással

$$\begin{bmatrix} 2t \\ 2t \\ 3t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

A karakterisztikus egyenlet komplex gyökei

P Határozzuk meg a sajátértékeit és sajátvektorait

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

M A karakterisztikus egyenlet

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \lambda^2 - \lambda + 1 \rightsquigarrow \lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

- $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$:

$$\mathsf{A} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) \mathsf{I} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} i & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} i \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow x - iy = 0.$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} it \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$:

$$\mathbf{A} - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}i & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow x + iy = 0.$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -it \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Többszörös gyökök: algebrai és a geometriai multiplicitás

D Algebrai multiplicitás: a λ sajátérték multiplicitása a karakterisztikus polinomban.

D Geometriai multiplicitás: a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér dimenziója.

P $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

M $(4-\lambda)^3$, a 4 algebrai multiplicitása 3.

$$\mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A $\lambda = 4$ sajátérték geometriai multiplicitása tehát 1.

Többszörös gyökök: algebrai és a geometriai multiplicitás

P $\quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $(1-\lambda)^2(2-\lambda)^2$, gyökei 1 és 2

$$\lambda = 1\colon\ \mathbf{B} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

geometriai multiplicitás = algebrai multiplicitás = 2

$$\lambda = 2\colon\ \mathbf{B} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

geometriai multiplicitás = 1, algebrai multiplicitás = 2

Algebrai és geometriai multiplicitás kapcsolata

T Egy mátrix minden λ sajátértékére:

$$1 \leqslant \lambda \text{ geometriai multiplicitása} \leqslant \lambda \text{ algebrai multiplicitása}$$

Speciális mátrixok

Mátrix hatványainak sajátértékei

T A invertálható $\iff$ a 0 nem sajátértéke.

B A invertálható $\iff \det(\mathsf{A}) \neq 0 \iff \det(\mathsf{A} - 0\mathsf{I}) \neq 0 \iff 0$ nem sajátértéke A-nak.

T Ha (λ, x) az A sajátpárja, $n \in \mathbb{Z}$, akkor (λ^n, x) az A^n sajátpárja, amennyiben λ^n és A^n is értelmezve van.

B $n = 0$: $\lambda^0 = 1$ és $\mathsf{A}^0 = \mathsf{I} \rightsquigarrow$ minden vektor sv. ✓

$n > 0$: $\mathsf{A}^2\mathsf{x} = \mathsf{A}(\mathsf{A}) = \mathsf{A}(\lambda\mathsf{x}) = \lambda\mathsf{A}\mathsf{x} = \lambda^2\mathsf{x}$.

és így tovább:

$$\mathsf{A}^k\mathsf{x} = \mathsf{A}(\mathsf{A}^{k-1}\mathsf{x}) = \mathsf{A}(\lambda^{k-1}\mathsf{x}) = \lambda^{k-1}(\mathsf{A}\mathsf{x}) = \lambda^{k-1}(\lambda\mathsf{x}) = \lambda^k\mathsf{x}.$$

A invertálható: $\mathsf{A}\mathsf{x} = \lambda\mathsf{x} \rightsquigarrow \frac{1}{\lambda}\mathsf{x} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{x}$, azaz $\lambda^{-1}\mathsf{x} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{x}$.

$n < 0$: $\mathsf{A}^k\mathsf{x} = \lambda^k\mathsf{x} \rightsquigarrow \lambda^{-k}\mathsf{x} = \mathsf{A}^{-k}\mathsf{x}$.

Mátrix hatványainak hatása

T Ha $(\lambda_i, \mathbf{x}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ az $\mathbf{A}$ sajátpárjai, $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{x}_i$, akkor $\mathbf{A}^m \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{k} c_i \lambda_i^m \mathbf{x}_i$.

B trivi

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^m \mathbf{v} &= \mathbf{A}^m (c_1 \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + c_k \mathbf{x}_k) \\
&= c_1 \mathbf{A}^m \mathbf{x}_1 + c_2 \mathbf{A}^m \mathbf{x}_2 + \ldots + c_k \mathbf{A}^m \mathbf{x}_k \\
&= c_1 \lambda_1^m \mathbf{x}_1 + c_2 \lambda_2^m \mathbf{x}_2 + \ldots + c_k \lambda_k^m \mathbf{x}_k.
\end{aligned}$$

K Találunk-e mindig sajátvektorokból álló bázist?

Speciális valós mátrixok sajátértékei

T **Szimmetrikus, ferdén szimmetrikus, ortogonális, nilpotens**

$\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, λ egy tetszőleges sajátértéke

1. A szimmetrikus $\Rightarrow \lambda$ valós,
2. A ferdén szimmetrikus $\Rightarrow \lambda$ imaginárius,
3. A ortogonális $\Rightarrow |\lambda| = 1$,
4. A nilpotens $\iff$ minden $\lambda = 0$ (azaz $\chi_{\mathsf{A}}(x) = x^n$).

B 1., 2.: $\mathsf{x}^{\mathsf{H}}\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{x}^{\mathsf{H}}\lambda\mathsf{x} = \lambda|\mathsf{x}|^2$ mindkét oldal adjungáltját véve:
$\mathsf{x}^{\mathsf{H}}\mathsf{A}^{\mathsf{T}}\mathsf{x} = \bar{\lambda}|\mathsf{x}|^2$.
L! $\lambda = a + ib$. $\mathsf{A}^{\mathsf{T}} = \mathsf{A} \rightsquigarrow \lambda = \bar{\lambda}$, azaz $a + ib = a - ib \rightsquigarrow \Im(\lambda) = 0$.
$\mathsf{A}^{\mathsf{T}} = -\mathsf{A} \rightsquigarrow a + ib = -a + ib$, azaz $\Re(\lambda) = 0$.
3.: A ortogonális $\rightsquigarrow |\mathsf{x}| = |\mathsf{A}\mathsf{x}| = |\lambda\mathsf{x}| = |\lambda||\mathsf{x}| \rightsquigarrow |\lambda| = 1$

Hasonlóság, diagonalizálhatóság

Hasonló mátrixok sajátértékei

T Sajátérékhez kapcsolódó invariánsok Ha $\mathsf{A} \sim \mathsf{B}$, akkor $\chi_{\mathsf{A}} = \chi_{\mathsf{B}}$, így sajátértékei, azok algebrai és geometriai multiplicitásai is megegyeznek.

1B A lineáris leképezés sajátértékének definíciójából világos.

2B $\mathsf{A} = \mathsf{C}^{-1}\mathsf{BC}$:

$\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I} = \mathsf{C}^{-1}\mathsf{BC} - \lambda\mathsf{C}^{-1}\mathsf{IC} = \mathsf{C}^{-1}(\mathsf{BC} - \lambda\mathsf{IC}) = \mathsf{C}^{-1}(\mathsf{B} - \lambda\mathsf{I})\mathsf{C}$

$\rightsquigarrow \mathsf{A} - \lambda\mathsf{I} \sim \mathsf{B} - \lambda\mathsf{I} \rightsquigarrow \det(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I}) = \det(\mathsf{B} - \lambda\mathsf{I})$

$\rightsquigarrow$ megegyeznek sajátértékeik, és azok (algebrai) multiplicitásai

$\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I} \sim \mathsf{B} - \lambda\mathsf{I} \rightsquigarrow \dim(\mathcal{N}(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I})) = \dim(\mathcal{N}(\mathsf{B} - \lambda\mathsf{I})) \rightsquigarrow$ a geometriai multiplicitások is megegyeznek.

m Van értelme lineáris transzformáció karakterisztikus polinomjáról beszélni (véges dimenziós esetben).

Mátrixok diagonalizálhatósága

D Amh az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz, azaz ha létezik egy olyan diagonális Λ és egy invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy

$$\Lambda = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}. \tag{1}$$

D A $\Lambda = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ átírható

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^{-1}$$

alakba, amit az $\mathbf{A}$ mátrix sajátfelbontásának nevezünk.

Mátrixok diagonalizálhatósága

T **Diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltétele**

Az $n \times n$-es A mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha A-nak van n lineárisan független sajátvektora. Ekkor Λ az A sajátértékeiből, C a sajátvektoraiból áll.

B $\Lambda = \mathsf{C}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{C} \iff \mathsf{C}\Lambda = \mathsf{A}\mathsf{C}$ és C invertálható

L! $\mathsf{C} = [\mathsf{x}_1\ \mathsf{x}_2\ \dots\ \mathsf{x}_n]$, $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

$$[\mathsf{x}_1\ \mathsf{x}_2\ \dots\ \mathsf{x}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathsf{A}[\mathsf{x}_1\ \mathsf{x}_2\ \dots\ \mathsf{x}_n]. \tag{2}$$

$\iff \mathsf{A}\mathsf{x}_i = \lambda_i \mathsf{x}_i$

de C invertálható, így oszlopvektorai lineárisan függetlenek.

P Diagonalizálható-e a következő mátrix?

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

M $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, a sajátvektorok $(1, 0, 0)$, $(1/2, 1, 0)$ és $(1/2, 0, 1)$, és ezek függetlenek

$\rightsquigarrow \mathsf{A} \sim \Lambda$, ahol

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathsf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ellenőrzés: $\mathsf{C}\Lambda = \mathsf{AC}$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bal sajátvektorok

D Az $\mathbf{y}^\mathsf{T}\mathsf{A} = \lambda\mathbf{y}^\mathsf{T}$ egyenlet $\mathbf{y}^\mathsf{T} \neq \mathbf{0}^\mathsf{T}$ feltételnek megfelelő sorvektorait az A mátrix bal sajátvektorainak nevezzük.

m ezek a transzponált sajátvektorai: $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$.

m $\det(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I}) = \det((\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I})^\mathsf{T}) = \det(\mathsf{A}^\mathsf{T} - \lambda\mathsf{I}) \rightsquigarrow \mathsf{A}$ és A^T karakterisztikus polinomja azonos $\rightsquigarrow$ bal és jobb sajátértékek közt nincs különbség

m $\Lambda = \mathsf{C}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{C} \rightsquigarrow \Lambda\mathsf{C}^{-1} = \mathsf{C}^{-1}\mathsf{A} \rightsquigarrow \mathsf{C}^{-1}$ sorvektorai A bal sajátvektorai, ugyanis

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{y}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n^\mathsf{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{y}_2^\mathsf{T} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n^\mathsf{T} \end{bmatrix} \mathsf{A}$$

tehát $\lambda_i\mathbf{y}_i^\mathsf{T} = \mathbf{y}_i^\mathsf{T}\mathsf{A}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

A sajátfelbontás diadikus alakja

m

$$
\begin{aligned}
\mathsf{A} = \mathsf{C}\Lambda\mathsf{C}^{-1} &= [\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2\ \ldots\ \mathbf{x}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^\top \\ \mathbf{y}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{y}_n^\top \end{bmatrix} \\
&= \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1^\top + \lambda_2 \mathbf{x}_2 \mathbf{y}_2^\top + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}_n \mathbf{y}_n^\top
\end{aligned} \tag{3}
$$

D Ezt nevezzük a sajátfelbontás diadikus alakjának.

A sajátfelbontás diadikus alakja

P $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ bal sajátvektorai, sajátfelbontása, diadikus alakja?

M Bal sajátvektor: „a transzponált sajátvektorainak transzponáltjai”, vagy „a $\mathbf{C}^{-1}$ sorvektorai”. A sajátfelbontás:

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Különböző sajátértékek sajátalterei

T Ha $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ különböző sajátértékei az $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ mátrixnak, akkor a hozzájuk tartozó $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots \mathbf{x}_k$ sajátvektorok lineárisan függetlenek.

K Ha különböző sajátértékekhez tartozó sajátalterek mindegyikéből lineárisan független vektorokat választunk, akkor még ezek egyesítése is lineárisan független lesz.

K Különböző sajátértékekhez tartozó sajátalterek mindegyikéből egy bázist választva, azok egyesítése is lineárisan független vektorrendszert ad.

K Ha az n-edrendű $\mathbf{A}$ mátrixnak n darab különböző sajátértéke van, akkor diagonalizálható.

B n különböző sajátértékhez n független sajátvektor tartozik $\rightsquigarrow$ diagonalizálható.

Diagonalizálhatóság és a geometriai multiplicitás

T Egy n-edrendű négyzetes mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha a sajátértékeihez tartozó geometriai multiplicitások összege n.

B ($\Rightarrow$) Ha a mátrix diagonalizálható, akkor a sajátvektoraiból álló bázis elemszáma épp a geometriai multiplicitások összege, hisz egyetlen sajátvektor sem lehet két sajátaltérben.
($\Leftarrow$) Ha a geometriai multiplicitások összege n, akkor minden sajátaltérből kiválasztva egy bázist, és véve ezek egyesítését, egy n sajátvektorból álló független vektorrendszert kapunk.

T Ha az $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ minden sajátértéke $\mathbb{F}$-beli (pl. mert $\mathbb{F}$ algebrailag zárt test), akkor $\mathbf{A}$ pontosan akkor diagonalizálható, ha minden sajátértékének algebrai és geometriai multiplicitása megegyezik.

Alterek direkt összege

D L! $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ véges dimenziós vt., $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots, \mathcal{V}_k \leqslant \mathcal{V}$. Amh a $\mathcal{V}$ tér a $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$,..., $\mathcal{V}_k$ alterek direkt összege, jelölése $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{V}_k = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{V}_i$, ha $\mathcal{V}$ minden vektora egyértelműen felbomlik egy $\mathcal{V}_1$-, egy $\mathcal{V}_2$-... és egy $\mathcal{V}_k$-beli vektor összegére.

T L! $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_k \leqslant \mathcal{V}$, $\dim \mathcal{V} = n$. Ekkor ekvivalensek:

1. $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{V}_k$
2. $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus (\mathcal{V}_2 \oplus (\mathcal{V}_3 \oplus \ldots \oplus \mathcal{V}_k))$
3. Mindegyik altér metszete a többi összegével csak a nullvektorból áll, és az alterek összege az egész tér, azaz $\sum_{i=1}^{k} \mathcal{V}_i = \mathcal{V}$ és $\mathcal{V}_i \cap \left(\sum_{j \neq i} \mathcal{V}_j\right) = \{\mathbf{0}\}$, és
4. $\mathcal{V}_1$,..., $\mathcal{V}_k$ egy-egy bázisának egyesítése a $\mathcal{V}$ bázisát adja.

m 3.-ban nem elég kikötni, hogy $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \{\mathbf{0}\}$ bármely $i \neq j$-re!

L! $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ fggtln, $\mathcal{V}_1 = \mathrm{span}(\mathbf{a})$, $\mathcal{V}_2 = \mathrm{span}(\mathbf{b})$, $\mathcal{V}_3 = \mathrm{span}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$

$\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \{\mathbf{0}\}$, de $\mathbb{R}^2 \neq \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \mathcal{V}_3$, $(\mathbf{0} + \mathbf{0} + (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{0})$.

Sajátalterek direkt összege

T L! $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ vektortér és $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ az $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lin. leképezés különböző sajátértékei. Jelölje $\mathcal{V}_{\lambda_i}$ a λ_i-hez tartozó sajátalteret. Ekkor

$$\mathcal{V}_{\lambda_1} + \ldots + \mathcal{V}_{\lambda_k} = \mathcal{V}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{V}_{\lambda_k}.$$

K Ha $\mathcal{V}$ véges dimenziós, akkor az $L : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ lineáris leképezésekre a következők ekvivalensek:

1. L diagonalizálható
2. $\mathcal{V} = \bigoplus_i \mathcal{V}_{\lambda_i}$
3. $\dim \mathcal{V} = \sum_i \dim \mathcal{V}_{\lambda_i}$

Ortogonális diagonalizálhatóság

D **Ortogonális diagonalizálhatóság**

Azt mondjuk, hogy a négyzetes, valós $\mathbf{A}$ mátrix ortogonálisan diagonalizálható, ha van olyan diagonális Λ és ortogonális $\mathbf{Q}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^\mathsf{T}$ (azaz $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^{-1}$, mivel $\mathbf{Q}$ ortogonális).

T **Valós főtengelytétel**

Az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor diagonalizálható ortogonálisan, ha szimmetrikus.

B ($\Rightarrow$) ha $\mathbf{A}$ ortogonálisan diagonalizálható, akkor $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^\mathsf{T}$, Λ diagonális tehát $\Lambda = \Lambda^\mathsf{T}$, így $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{Q}\Lambda^\mathsf{T}\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^\mathsf{T} = \mathbf{A}$.
($\Leftarrow$) ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus és $(\lambda, \mathbf{x})$, $(\mu, \mathbf{y})$ két sajátpár, ahol $\lambda \neq \mu$, akkor $\lambda\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = (\lambda\mathbf{x})^\mathsf{T}\mathbf{y} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mu\mathbf{y} = \mu\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$, azaz $(\lambda-\mu)\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$, így $\lambda \neq \mu$ miatt $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$, azaz $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$. Így a sajátvektorokból kiválasztható egy ortonormált bázis!

Ortogonális diagonalizálhatóság

P Adjunk meg a következő mátrixhoz egy olyan ortonormált bázist, melyben diagonális alakú.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

M A mátrix szimmetrikus, így ortogonálisan diagonalizálható. Karakterisztikus polinomja és sajátértékei:

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27.$$

Ha e polinomnak van racionális gyöke, akkor a racionális gyökteszt miatt az csak ± 1, ± 3, ± 9 vagy ± 27 lehet.

- A Horner-módszerrel számolva

	1	−3	−9	27
3	1	0	−9	0
3	1	3	0	

- Tehát $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27 = (\lambda - 3)^2(\lambda + 3)$, azaz a sajátértékek $\lambda_{1,2} = 3$, $\lambda_3 = -3$.
- A sajátvektorok:

$$\lambda = 3\colon \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

ahonnan $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2t - s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} s$, tehát a $\lambda = 3$-hoz tartozó sajátalteret a $(2, 1, 0)$ és a $(-1, 0, 1)$ vektorok feszítik ki.

$\lambda = -3$: $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

ahonnan $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ -2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t$, tehát a $\lambda = -3$-hoz tartozó sajátalteret az $(1, -2, 1)$ vektor feszítik ki. E vektor merőleges az előző két sajátvektorra, azok azonban egymásra nem.

- A $(1, -2, 1)$ sv. mellé válasszuk a $(-1, 0, 1)$ vektort, így a harmadik lehet az $(1, -2, 1) \times (-1, 0, 1) = (-2, -2, -2)$.
- Osztva a vektorokat a hosszukkal kapjuk a következő ortonormált rendszert:

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A diagonalizálás alkalmazásai

Diagonalizálható mátrixok polinomjai

D Mátrix polinomja $\forall\, p(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ polinomra és $\forall$ négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixra értelmezhető p-nek $\mathbf{A}$-ban fölvett értéke: $p(\mathbf{A}) = c_n\mathbf{A}^n + c_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + c_1\mathbf{A} + c_0\mathbf{I}$.

m $\mathbf{A} = \mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^{-1} \rightsquigarrow \mathbf{A}^2 = \mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\Lambda^2\mathbf{C}^{-1}$, általában tetszőleges nemnegatív k egészre $\mathbf{A}^k = \mathbf{C}\Lambda^k\mathbf{C}^{-1}$.

$\rightsquigarrow$ bármely $p(x)$ polinomra $p(\mathbf{A}) = \mathbf{C}p(\Lambda)\mathbf{C}^{-1}$, ahol

$$p\left(\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\right) = \operatorname{diag}\left(p(\lambda_1), p(\lambda_2), \ldots, p(\lambda_n)\right).$$

Á Diagonalizálható mátrix polinomja Legyen $\mathbf{A} = \mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^{-1}$, ahol $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, és $p(x)$ egy tetszőleges polinom. Ekkor

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{C}\begin{bmatrix} p(\lambda_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p(\lambda_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & p(\lambda_n) \end{bmatrix}\mathbf{C}^{-1}.$$

Példa

P Számítsuk ki az $\mathbf{A}^{10}$ mátrixot!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

M Sajátfelbontása $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Így $\mathbf{A}^{10} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot (-1)^{10} - 2^{10} & -2 \cdot (-1)^{10} + 2 \cdot 2^{10} \\ (-1)^{10} - 2^{10} & -(-1)^{10} + 2 \cdot 2^{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1022 & 2046 \\ -1023 & 2047 \end{bmatrix}$$

Fibonacci-sorozat explicit alakja*

T A Fibonacci-sorozatra ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, első néhány tagja: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987,...) igaz a következő:

$$F_n = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \right)_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

B Az első egyenlőség teljes indukcióval bizonyítható. Jelölés:

$$\mathsf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$n = 1$-re trivi, $n \Rightarrow n+1$:

$$\mathsf{F}^{n+1} = \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} + F_n \\ F_{n+1} & F_n + F_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{bmatrix}.$$

Fibonacci-sorozat (1. bizonyítás)*

B $\chi_{\mathsf{F}}(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$, F sajátértékei $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$, a hozzájuk tartozó sajátvektorok $\mathbf{x}_{1,2} = (1, \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}))$.

F^n sajátfelbontásával:

$$\mathsf{F}^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

ahonnan

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Fibonacci-sorozat (2. bizonyítás)*

B Vegyük észre

$$\begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix} = \mathbf{F}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Az $\mathbf{x}_1$ és $\mathbf{x}_2$ sajátvektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^2$-ben, így a $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ előáll azok lineáris kombinációjaként:

$\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 = 1/\sqrt{5}\mathbf{x}_1 - 1/\sqrt{5}\mathbf{x}_2$.

$\mathbf{F}^n\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] = c_1\lambda_1^n\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_2^n\mathbf{x}_2$, behelyettesítés után ezt kapjuk:

$$\mathbf{F}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}.$$

Itt csak az első koordinátát kiszámolva, a tételbeli állítást igazoltuk.

A sajátérték kiszámítása

Hatványmódszer*

D Egy sajátérték szigorúan domináns, ha egyszeres multiplicitású, és abszolút értékben nagyobb az összes többinél. (szigorúan domináns sajátvektor, sajátaltér, sajátpár)

M $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, λ_1 szigorúan domináns sajátérték, $(\lambda_i, \mathbf{v}_i)$ sajátpár, $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_m|$, ($\lambda_1$ valós, egyébként $\overline{\lambda_1}$ is sé. lenne).

L! $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m$, $k > 0$ egész:

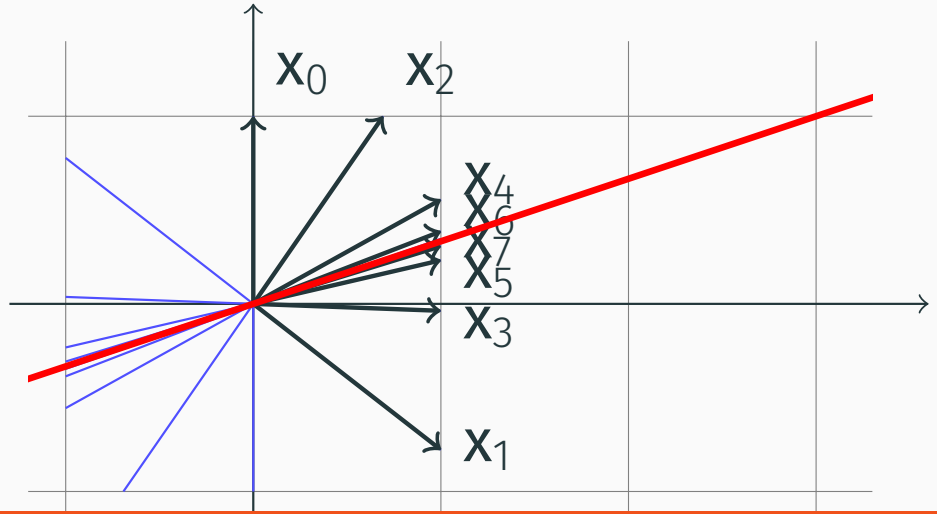
$$\begin{aligned}\mathbf{A}^k\mathbf{x} &= c_1\mathbf{A}^k\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{A}^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{A}^k\mathbf{v}_m \\ &= c_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\lambda_m^k\mathbf{v}_m.\end{aligned}$$

Ekkor λ_1^k-val való osztás után $k \to \infty$ esetén

$$\frac{1}{\lambda_1^k}\mathbf{A}^k\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{v}_m \to c_1\mathbf{v}_1,$$

Ha $c_1 \neq 0$, akkor $\mathbf{A}^k\mathbf{x}$ iránya tart a domináns sajátvektor irányához.

T Hatványmódszer: Ha λ_1 az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix szigorúan domináns sajátértéke, akkor létezik olyan $\mathbf{x}_0$ vektor, hogy az $\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0$ vektorok által kifeszített alterek sorozata a domináns sajátaltérhez konvergál, míg $\frac{\mathbf{x}_k^\top \mathbf{A}\mathbf{x}_k}{\mathbf{x}_k^\top \mathbf{x}_k} \to \lambda$ (ún. Rayleigh hányadosok).

P Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.7 & 0.9 \\ 0.9 & -0.7 \end{bmatrix}$.

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbf{A}^k\mathbf{x}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.9 \\ -0.7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.9 \\ 1.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.7 \\ -0.1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9.9 \\ 2.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 18.9 \\ 7.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 38.7 \\ 11.9 \end{bmatrix}$