BUDAPESTI MŰSZAKI
MATEMATIKA
ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI
INTÉZET
EGYETEM

Lineáris algebra mérnököknek

BMETE93BG20

Lineáris leképezések

Kf81 2018-11-06

Wettl Ferenc

ALGEBRA TANSZÉK

Célok

E lecke befejezése után a hallgató

- felismeri az absztrakt vektortereket,
- fel tudja írni végesdimenziós vektorterek közti lineáris leképezések mátrixát, köztük a 2- és 3-dimenziós tér legegyszerűbb geometriai leképezéseinek mátrixát,
- fel tudja írni egy altérre való merőleges vetítés mátrixát,
- ki tudja számolni lineáris egyenletrendszer optimális megoldásait a normálegyenlettel és azok közül a minimális abszolút értékűt,
- ki tudja számolni lineáris leképezés rangját, determinánsát, nullitását, nyomát,
- felismeri az ortogonális mátrixokat és leképezéseket,
- meg tudja határozni alterek összegét.

Vektortér

D **Vektortér**

A $\mathcal{V}$ halmazt $\mathbb{F}$ fölötti vektortérnek nevezzük (jel.: $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$), ha tartalmaz egy $\mathbf{0}$-val jelölt elemet, és értelmezve van rajta egy összeadás és egy skalárral szorzás művelet, melyekre tetszőleges $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ és $c, d \in \mathbb{F}$ esetén

(A1)	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$	az összeadás kommutatív
(A2)	$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$	az összeadás asszociatív
(A3)	$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$	az összeadás nulleleme
(M1)	$(cd)\mathbf{u} = c(d\mathbf{u})$	a két szorzás kompatibilis
(M2)	$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$	a test egységelemével
(M3)	$0\mathbf{u} = \mathbf{0}$	a test nullelemével
(D1)	$c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$	disztributív
(D2)	$(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$	disztributív.

Vektortér tulajdonságai

m Összeadáson egy $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}; (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} + \mathbf{v}$, míg skalárral való szorzáson egy $\mathbb{F} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}; (c, \mathbf{u}) \mapsto c\mathbf{u}$ leképezést értünk.

m (A2) $\rightsquigarrow$ többtagú összeget nem kell zárójelezni $\rightsquigarrow$ az $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$ jelölés egyértelmű.

Á (M3) kicserélhető a következő tulajsonsággal

(A4) $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}\ \exists \mathbf{v} \in \mathcal{V}\colon \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$ additív inverz létezése (J: $-\mathbf{u}$)

B (M3) $\Rightarrow$ (A4): tetszőleges $\mathbf{u}$-ra $\mathbf{0} = 0\mathbf{u} = (1-1)\mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, ahol $\mathbf{v} = (-1)\mathbf{u}$.

(A4) $\Rightarrow$ (M3): $0\mathbf{u} = (0+0)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{u} \rightsquigarrow$
$\mathbf{0} = 0\mathbf{u} + \mathbf{v} = (0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}) + \mathbf{v} = 0\mathbf{u} + (0\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 0\mathbf{u} + \mathbf{0} = 0\mathbf{u}$.

m A vektortér definíciójára (A1)–(A4), (M1)–(M2), (D1)–(D2) is használható (ált. így szokták).

Á A fenti definíció nem minimális: az (A1) bizonyítható a többiből.

B $(1+1)(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ kétféle kiszámításával.

Példák vektorterekre

Á $\mathcal{V} = \{\mathbf{0}\}$ bármely test fölött vektortér. Ezt nevezzük zérustérnek.

P $\mathbb{F}^n$ vektortér $\mathbb{F}$ fölött a szokásos elemenkénti összeadás és skalárral szorzás műveleteivel. Speciálisan $\mathbb{F}^1$ (azaz lényegében maga $\mathbb{F}$) is tekinthető $\mathbb{F}$ fölötti vektortérnek.

P $\mathbb{F}^{m\times n}$, $\mathbb{F}[x]$, $\mathbb{F}[x]_n = \{f \in \mathbb{F}[x] \mid \deg f \leqslant n\}$, $\mathbb{F}[[x]] = \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\}$ a formális hatványsorok

P $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, és $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ az $\mathbb{R}$-en folytonos, illetve diffható függvények

P $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, a végtelen valós sorozatok

P azon $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$-beliek, melyekben véges sok elemet kivéve $\forall$ elem 0

P $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$, azaz $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Q}$ fölött

D $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ altere $\mathcal{V}$-nek, ha nem üres és zárt a műveletekre nézve. Jelölés: $\mathcal{U} \leqslant \mathcal{V}$.

Á $\mathbb{F}[x]_n \leqslant \mathbb{F}[x] \leqslant \mathbb{F}[[x]]$, $\mathbb{Q}_{\mathbb{Q}} \leqslant \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$, $\{b\sqrt{2} \mid b \in \mathbb{Q}\} \leqslant \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$, $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \leqslant \mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$

Függvényterek*

T Függvényterek L! $X \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz, $\mathbb{F}$ test, $\mathcal{V}$ egy $\mathbb{F}$ fölötti vektortér, $\mathbb{F}^X := \{X \to \mathbb{F} \text{ függvények}\}$, $\mathcal{V}^X := \{X \to \mathcal{V} \text{ függvények}\}$. $\mathbb{F}^X$ és $\mathcal{V}^X$ vektortér $\mathbb{F}$ fölött a szokásos műveletekkel: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(cf)(x) = cf(x)$ minden $x \in X$-re, ahol a zérusfüggvény a nullelem.

B (A1) és (M1) bizonyítása: L! $f, g \in \mathcal{V}^X$, $c, d \in \mathbb{F}$, ekkor

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x) + g(x) && \text{definíció szerint} \\
&= g(x) + f(x) && \text{a } \mathcal{V}\text{-beli összeadás kommutatív} \\
&= (g+f)(x) && \text{definíció szerint.} \\
((cd)f)(x) &= (cd)f(x) && \text{definíció szerint} \\
&= c(df(x)) && \text{a } \mathcal{V}\text{-beli skalárral szorzás kompatibilitása} \\
&= c(df)(x) && \text{definíció szerint.}
\end{aligned}
$$

Lineáris kombináció

L! $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$ vektortér és $\mathcal{A} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n, \dots\}$ egy véges vagy végtelen vektorhalmaz.

D A lineáris kombináció véges $\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i$ alakú összeg, ahol $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathcal{V}$, $a_i \in \mathbb{F}$.

D AMH a véges vagy végtelen $\mathcal{A}$ vektorhalmaz lineárisan független, ha minden véges részhalmaza lineárisan független.

D AMH $\mathcal{A}$ generátorrendszer $\mathcal{V}$-ben (kifeszíti $\mathcal{V}$-t), ha bármely $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektor előáll véges sok $\mathcal{A}$-beli lineáris kombinációjaként.

D AMH $\mathcal{A}$ a $\mathcal{V}$ egy bázisa, ha lin. független generátorrendszer.

P $\mathbb{F}[x]$-nek nincs véges bázisa, de $\{1, x, x^2, \dots\}$ bázis.

P $\mathbb{F}[[x]]$-nek nem generátorrendszere $\{1, x, x^2, \dots\}$, mert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ nem áll elő véges lineáris kombinációként. Nincs megszámlálható generátorrendszere, van kontinuum független.

T Minden vektortérnek van bázisa (a zérustérnek az üreshalmaz).

Mátrix- és lineáris leképezések

A mátrixleképezés fogalma

D Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m\times n}$, az $A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m; \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Ax}$ leképezést az $\mathbf{A}$-hoz tartozó mátrixleképezésnek nevezzük.

D Képtér az A leképezés értékkészlete: $\mathrm{Im}(A)$ ($\mathrm{Im}(A) \leqslant \mathbb{F}^m$)
$\mathrm{Im}(A) = \mathcal{O}(\mathbf{A})$ (a leképezés képtere = a mátrix oszlopterével)

D Magtér (kernel): azoknak a vektoroknak az altere, melyet A a nullvektorba visz, jelölése $\mathrm{Ker}(A)$. ($\mathrm{Ker}(A) \leqslant \mathbb{F}^n$)
$\mathrm{Ker}(A) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$ (a leképezés magtere = a mátrix nullterével)

T* L! $\mathbb{F}$ test, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{F}^{m\times k}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{F}^{k\times n}$, $\mathbf{S}, \mathbf{T} \in \mathbb{F}^{n\times n}$, A, B, C, X, Y, S, T a hozzájuk tartozó mátrixleképezések, $c \in \mathbb{F}$. Ekkor

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} \iff A + B = C$, és
2. $c\mathbf{A} = \mathbf{C} \iff cA = C$.
3. $\mathbf{XY} = \mathbf{C} \iff X \circ Y = C$ (mátrixszorzás – fv. kompozíciója)
4. $\mathbf{S} = \mathbf{T}^{-1} \iff S = T^{-1}$ (mátrix inverze – függvény inverze)

A mátrixleképezés

P Legyen $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$, és legyen

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{x}.$$

Mutassuk meg, hogy az A mátrixleképezés, azaz létezik egy olyan $\mathbf{A}$ mátrix, hogy $A(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

M A vektori szorzás koordinátás alakja alapján

$$\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -a_3x_2 + a_2x_3 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ -a_2x_1 + a_1x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

A mátrixleképezés tulajdonságai

T Legyen $A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ egy tetszőleges mátrixleképezés, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{F}^n$, $c, d \in \mathbb{F}$.

1. $A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + dA(\mathbf{y})$, azaz A megőrzi a lineáris kombinációt.
2. Az A homogén és additív leképezés, azaz

$$A(c\mathbf{x}) = cA(\mathbf{x}), \qquad \text{(a leképezés homogén), és}$$
$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y}), \qquad \text{(a leképezés additív).}$$

3. $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
4. Tetszőleges altér képe altér.
5. Tetszőleges affin altér képe affin altér.

Lineáris leképezés

D H_1 és H_2 mindegyikének elemein értelmezve van egy asszociatív összeadás és egy „skalárral való szorzás” művelet (pl. vektortér).
Azt mondjuk, hogy egy $A : H_1 \to H_2$ leképezés lineáris, ha homogén és additív, azaz ha tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H_1$ elemre és c skalárra

$$A(c\mathbf{x}) = cA(\mathbf{x}) \qquad (A \text{ homogén,})$$

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} \qquad (A \text{ additív.})$$

$H_1 = H_2$ esetén lineáris transzformációnak is nevezzük.

P A síkbeli vektorok egy rögzített O pont körüli forgatása, egy egyenesre való tükrözése és merőleges vetítése lineáris leképezés.

P A $D : f \mapsto f'$ és az $I : f \mapsto \int_a^b f$ leképezések lineáris leképezések.

Lineáris leképezés ekvivalens definíciói

Á Egy tetszőleges $A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ leképezésre az alábbi állítások ekvivalensek:

1. A lineáris, azaz homogén és additív.
2. Tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{F}^n$ és $c, d \in \mathbb{F}$ esetén
$$A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + dA(\mathbf{y})$$
3. Tetszőleges $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{F}^n$ és $c \in \mathbb{F}$ esetén
$$A(c\mathbf{x} + \mathbf{y}) = cA(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$$
4. „Megőrzi” a lineáris kombinációt, azaz tetszőleges $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{F}^n$ vektorokra és $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{F}$ skalárra
$$A(c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k) = c_1A\mathbf{x}_1 + \cdots + c_kA\mathbf{x}_k.$$

Az $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ leképezések mátrixleképezések

T Legyen $A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ egy tetszőleges függvény. Az A pontosan akkor lineáris leképezés, ha létezik egy olyan $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix, hogy az A függvény megegyezik az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ leképezéssel. Ekkor

$$\mathbf{A} = [A\mathbf{e}_1 | A\mathbf{e}_2 | \ldots | A\mathbf{e}_n],$$

ahol $\mathbf{e}_i$ az i-edik standard egységvektor ($i = 1, 2, \ldots, n$).

B (A mátrixleképezés $\Rightarrow$ A lineáris) ✓

(A mátrixleképezés $\Leftarrow$ A lineáris)

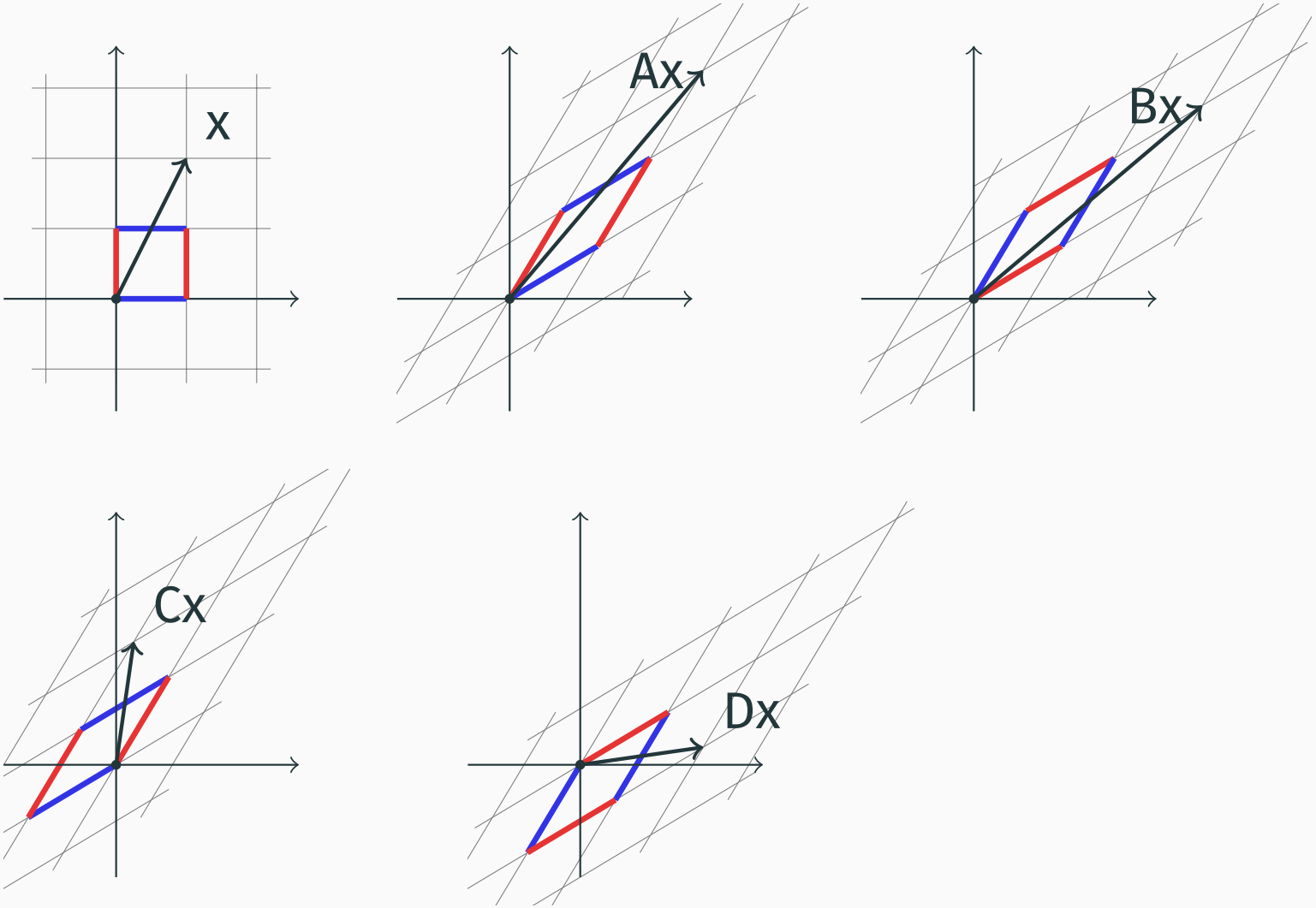
$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= A(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) \\ &= x_1 A\mathbf{e}_1 + x_2 A\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n A\mathbf{e}_n \\ &= \begin{bmatrix} A\mathbf{e}_1 & A\mathbf{e}_2 & \ldots & A\mathbf{e}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Megjegyzések

- Lineáris leképezésekről olyan esetben is beszélhetünk, amikor a leképezésnek nincs mátrixa (pl. végtelen dimenziós vektorterek esetén).
- Különbség van a lineáris leképezés és a mátrixleképezés közt $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ függvények esetén is:
  A lineáris leképezés független a bázistól, az csak maga a függvény, mely megadja, hogy melyik vektornak melyik vektor a képe.
  A mátrixleképezés mindig valamely bázisra vonatkozik. Egy lineáris leképezéshez minden bázisban tartozik egy mátrixleképezés, melynek mátrixa függ a bázistól.
- A lineáris $\mathbb{F} \to \mathbb{F}$ leképezések azonosak az $x \mapsto cx$ függvényekkel, ahol $c \in \mathbb{F}$ konstans.

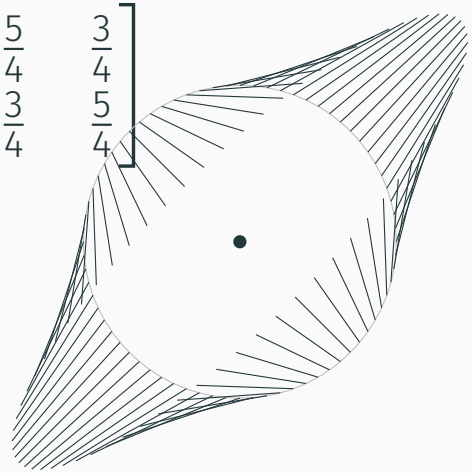
A mátrixleképezés szemléltetése négyzetráccsal

$$A = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

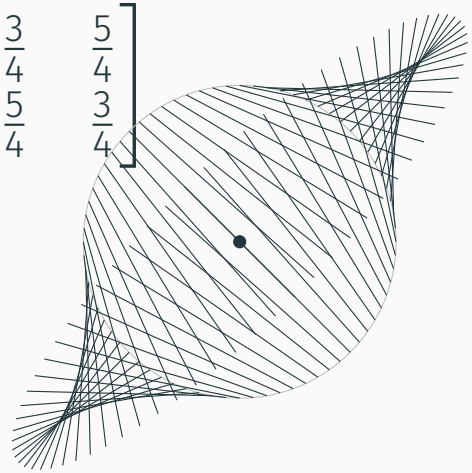


A mátrixleképezés szemléltetése egységkör-ábrával

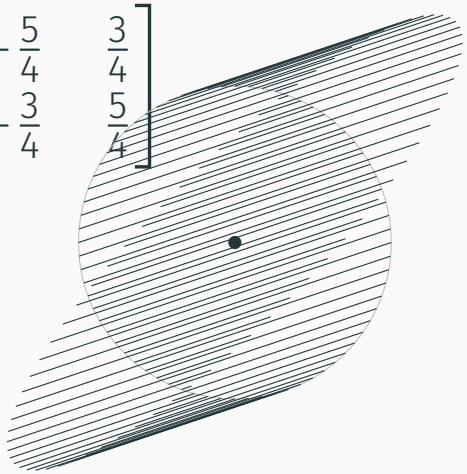
$$A = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$



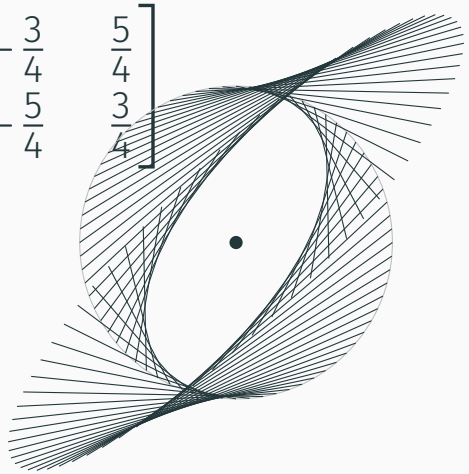
$$B = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$



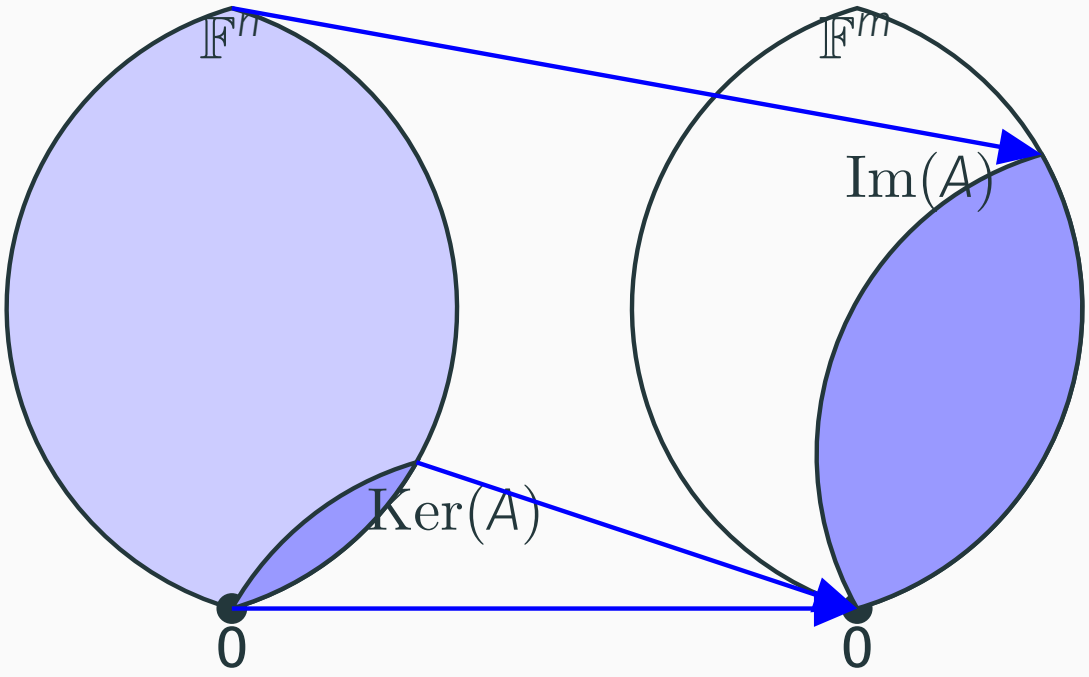
$$C = \begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$



$$D = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$



A lineáris leképezés szemléltetése levéldiagrammal



Mátrix nyoma

D Négyzetes mátrix nyomán főátlójában lévő elemeinek összegét értjük. jelölés: $\operatorname{trace}(\mathsf{A})$.

Á A nyom $\mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$ lineáris leképezés, mert

1. $\operatorname{trace}(\mathsf{A}+\mathsf{B}) = \operatorname{trace}\mathsf{A} + \operatorname{trace}\mathsf{B}$
2. $\operatorname{trace}(c\mathsf{A}) = c\operatorname{trace}\mathsf{A}$

T $\operatorname{trace}(\mathsf{AB}) = \operatorname{trace}(\mathsf{BA})$

B
$$\begin{aligned}\operatorname{trace}(\mathsf{AB}) &= \sum_{i=1}^{n} \mathsf{A}_{i*}\mathsf{B}_{*i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \mathsf{B}_{j*}\mathsf{A}_{*j} \\ &= \operatorname{trace}(\mathsf{BA}).\end{aligned}$$

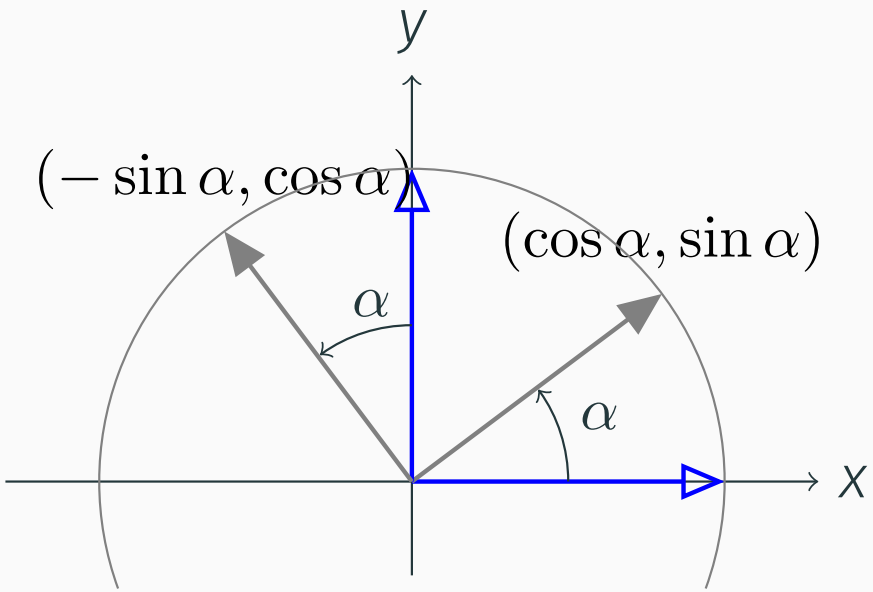
T $\operatorname{trace}(\mathsf{C}^\mathsf{T}\mathsf{C}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^2$

A 2D és 3D tér transzformációi

Forgatás

T A sík vektorait egy pont körül α szöggel elforgató leképezés mátrixa

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} A\mathbf{i} & A\mathbf{j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$



- A koordinátatengelyek körüli α szöggel való forgatás mátrixa:
- z-tengely körüli forgatásnál **i** és **j** vektorok fordulnak

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- x- és az y-tengely körüli forgatás mátrixai:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}\cos\alpha & 0 & \sin\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{bmatrix}.$$

- a síkot α szöggel elforgató mátrix invertálható, mert determinánsa 1,
- inverze geometriai és algebrai okoskodással is felírható:

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}\cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha)\\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}.$$

Merőleges vetítés

T A sík vagy a tér vektorait egy $\mathbf{b}$ irányvektorú egyenesre merőlegesen vetítő leképezés mátrixa

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{b}}\mathbf{b}\mathbf{b}^\mathsf{T}, \text{ speciálisan } \mathbf{P} = \mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T}, \text{ ha } \mathbf{e} \text{ egységvektor.}$$

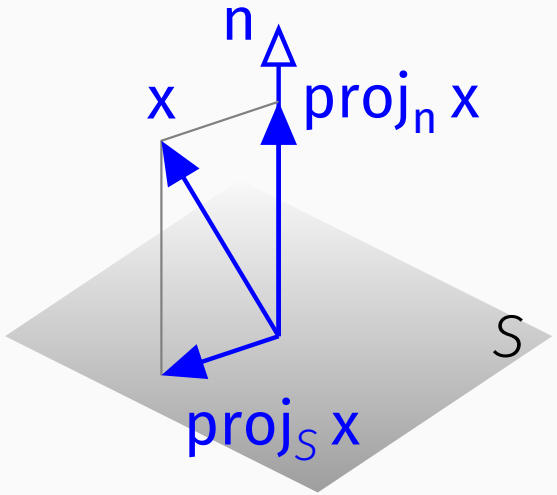
B $\mathbf{x}$-nek a $\mathbf{e}$ egységvektor egyenesére eső merőleges vetülete

$$\mathbf{proj}_\mathbf{e}\,\mathbf{x} = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e} = \mathbf{e}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{x}) = \mathbf{e}(\mathbf{e}^\mathsf{T}\mathbf{x}) = (\mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T})\mathbf{x} \rightsquigarrow \mathbf{P} = \mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T}.$$

Ha $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{e} = \mathbf{b}/|\mathbf{b}|$ jelölés mellett $\mathbf{P} = \mathbf{e}\mathbf{e}^\mathsf{T} = \mathbf{b}\mathbf{b}^\mathsf{T}/|\mathbf{b}|^2$.

T A tér vektorait az $\mathbf{n}$ egységnyi normálvektorú síkra merőlegesen vetítő leképezés mátrixa

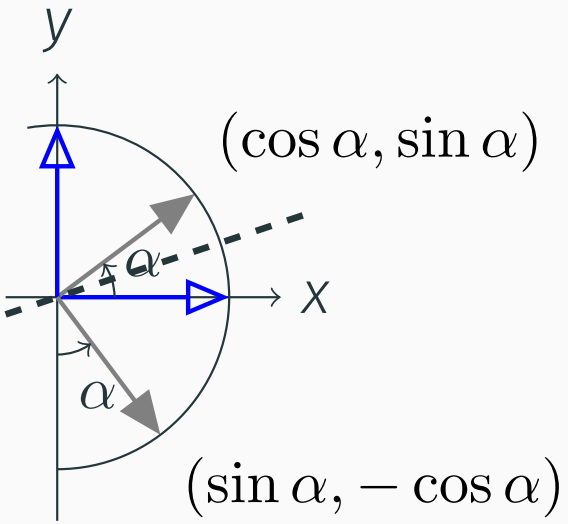
$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^\mathsf{T}.$$



Tükrözés

T A sík vektorait az x-tengellyel $\alpha/2$ szöget bezáró egyenesre tükröző lineáris leképezés mátrixa

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}.$$



T A tér vektorait az $\mathbf{n}$ egységnyi normálvektorú síkra tükröző leképezés mátrixa

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - 2\mathbf{n}\mathbf{n}^{\mathsf{T}}.$$

Vetítés hipersíkra és egyenesre $\mathbb{R}^n$-ben

m A tér síkra és egyenesre vonatkozó vetítő és tükröző mátrixai változtatás nélkül átvihetők $\mathbb{R}^n$ hipersíkra és egyenesre vonatkozó transzformációira.

P Írjuk fel az $\mathbb{R}^4$-beli $\mathbf{v} = (1, 0, 2, -2)$ vektorra való merőleges vetítés $\mathbf{P}$ mátrixát!

M $\mathbf{P} = \frac{1}{\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{v}}\mathbf{v}\mathbf{v}^\mathsf{T} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -4 \\ -2 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$

P Írjuk fel az $\mathbb{R}^4$-beli $x + 2z - 2w = 0$ egyenletű hipersíkra való merőleges vetítés $\mathbf{P}'$ mátrixát! (e sík normálvektora $\mathbf{v}$!)

M $\mathbf{P}' = \mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{v}^\mathsf{T}\mathbf{v}}\mathbf{v}\mathbf{v}^\mathsf{T} = \mathbf{I} - \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

Tükrözés hipersíkra és egyenesre $\mathbb{R}^n$-ben

P Írjuk fel az $\mathbb{R}^4$-beli $\mathbf{v} = (1, 0, 2, -2)$ vektorra való tükrözés $\mathbf{T}$ mátrixát, és számítsuk ki a $\mathbf{w} = (1, 1, 1, 1)$ vektor tükörképét!

M Az $\mathbf{x}$ vektor $\mathbf{v}$ egyenesére merőleges összetevője $(\mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{v}^\top\mathbf{v}}\mathbf{v}\mathbf{v}^\top)\mathbf{x}$, ennek 2-szeresét kell kivonni $\mathbf{x}$-ből, így a tükörkép mátrixa

$$\mathbf{T} = \mathbf{I} - 2(\mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{v}^\top\mathbf{v}}\mathbf{v}\mathbf{v}^\top) = \frac{2}{\mathbf{v}^\top\mathbf{v}}\mathbf{v}\mathbf{v}^\top - \mathbf{I} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -7 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & -8 \\ -4 & 0 & -8 & -1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{T}(1, 1, 1, 1) = \frac{1}{9}(-7, -9, -5, -13)$

P Írjuk fel az $x + 2z - 2w = 0$ egyenletű hipersíkra való tükrözés $\mathbf{T}'$ mátrixát, és számítsuk ki a $\mathbf{w} = (1, 1, 1, 1)$ vektor tükörképét!

M $$\mathbf{T}' = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{v}^\top\mathbf{v}}\mathbf{v}\mathbf{v}^\top = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 8 \\ 4 & 0 & 8 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}'\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 5 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Vetítés*

P Határozzuk meg annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, mely a tér összes pontját az $(1, -2, 1)$ vektorral párhuzamos irányban az $x + y + 2z = 0$ egyenletű síkra vetíti.

M A vetítés **P** mátrixára

$$\mathbf{P}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Egyetlen mátrixszorzásba foglalva:

$$\mathbf{P}\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}, \text{ ahonnan } \mathbf{P} = \begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 2 & 3 & 4\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}.$$

Vetítés*

P Határozzuk meg annak a lineáris leképezésnek a mátrixát, mely a tér összes pontját az $(1, -2, 1)$ vektorra vetíti az $x + y + 2z = 0$ egyenletű síkkal párhuzamosan.

M A vetítés **P** mátrixára

$$\mathbf{P}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}.$$

Egyetlen mátrixszorzásba foglalva:

$$\mathbf{P}\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \text{ ahonnan } \mathbf{P} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & -2 & -4\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

Eltolás homogén koordinákat használva**

- Az eltolás nem lineáris leképezés, de...
- Sík eltolása beágyazva a térbe: a $z = 1$ egyenletű síkot toljuk el:

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ez még mindig nem lineáris, de mivel $z = 1$, ezért a

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + az \\ y + bz \\ z \end{bmatrix}$$

leképezés már az, mátrixa

$$\mathbf{T} = T \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Merőleges vetítés, legjobb közelítés

D Egy $\mathcal{W}$ altér esetén $\mathcal{W}^\perp$ jelölte a $\mathcal{W}$-re merőleges vektorok alterét.

T Legyen $\mathcal{W}$ az n-dimenziós valós vagy komplex $\mathcal{U}$ vektortér egy altere. Ekkor

1. $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp = \{\mathbf{0}\}$,
2. $\mathcal{W} + \mathcal{W}^\perp = \mathcal{U}$,
3. $\mathcal{U}$ minden vektora egyértelműen előáll egy $\mathcal{W}$- és egy $\mathcal{W}^\perp$-beli vektor összegeként,
4. $(\mathcal{W}^\perp)^\perp = \mathcal{W}$.

Merőleges vetítés $\mathbb{R}^n$ egy alterére

D Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ vektornak a $\mathcal{W} \leqslant \mathcal{V}$ altérre eső merőleges vetülete a $\mathbf{w}$ vektor, ha $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$, és $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ merőleges a $\mathcal{W}$ altérre, azaz $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in \mathcal{W}^\perp$. A $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ vektort a $\mathbf{v}$ vektor $\mathcal{W}$ altérre merőleges összetevőjének nevezzük.

T Altérre való vetítés mátrixa: Ha $\mathcal{W}$ az $\mathbb{R}^n$ egy altere, és az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorai a $\mathcal{W}$ egy bázisát alkotják (tehát $\mathbf{A}$ teljes oszloprangú), akkor a $\mathcal{W}$ altérre való merőleges vetítés, azaz a $\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}$ leképezés mátrixa $\boxed{\mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}.}$

B L! $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{w} = \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{v}$.

$\mathcal{O}(\mathbf{A}) = \mathcal{W} \rightsquigarrow \exists \mathbf{x}\colon \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{w}$

$\mathcal{W}^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) \rightsquigarrow \mathbf{v} - \mathbf{w} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$

$\rightsquigarrow \mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{v} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{v}$.

$\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ invertálható, azaz $\mathbf{x} = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{v}$

$\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{v}$.

Példa

P Határozzuk meg a $(-2, 1, 3)$ vektornak az $(1, 0, 1)$ és a $(-1, 2, 0)$ vektorok által kifeszített síkra eső merőleges vetületét!

M Az altér bázisvektoraiból képzett mátrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ amiből } \mathbf{A}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

- Így a $(-2, 1, 3)$ vektor merőleges vetülete

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Merőleges vetítés mátrixai

T Egy P mátrix pontosan akkor merőleges vetítés mátrixa, ha $\mathsf{P} = \mathsf{P}^\mathsf{T} = \mathsf{P}^2$.

B ($\Longrightarrow$) Tfh P egy P merőleges vetítés mátrixa $\mathbb{R}^n$ standard bázisában. Legyenek A oszlopai az $\mathrm{Im}(P) = \mathcal{O}(\mathsf{P})$ egy tetszőleges bázisának vektorai.
Ekkor $\mathsf{P} = \mathsf{A}(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^\mathsf{T}$.

$$\mathsf{P}^2 = \left(\mathsf{A}(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^\mathsf{T}\right)^2 = \mathsf{A}(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^\mathsf{T} = \mathsf{A}(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^\mathsf{T} = \mathsf{P},$$

$$\mathsf{P}^\mathsf{T} = \left(\mathsf{A}(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^\mathsf{T}\right)^\mathsf{T} = \mathsf{A}\left((\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})^{-1}\right)^\mathsf{T}\mathsf{A}^\mathsf{T} = \mathsf{A}(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^\mathsf{T} = \mathsf{P}.$$

($\Longleftarrow$) Tfh $\mathsf{P} = \mathsf{P}^\mathsf{T} = \mathsf{P}^2$. (Biz: P az $\mathcal{O}(\mathsf{P})$-re merőlegesen vetít)
Elég megmutatni, hogy $\forall \mathsf{x}: \ \mathsf{x} - \mathsf{P}\mathsf{x} \perp \mathcal{O}(\mathsf{P})$
$\mathsf{P}^2 = \mathsf{P} \rightsquigarrow \mathsf{P}(\mathsf{x} - \mathsf{P}\mathsf{x}) = \mathsf{P}\mathsf{x} - \mathsf{P}^2\mathsf{x} = 0 \rightsquigarrow \mathsf{x} - \mathsf{P}\mathsf{x} \in \mathcal{N}(\mathsf{P})$
de $\mathsf{P} = \mathsf{P}^\mathsf{T} \rightsquigarrow \mathsf{x} - \mathsf{P}\mathsf{x} \in \mathcal{N}(\mathsf{P}^\mathsf{T}) \rightsquigarrow \mathsf{x} - \mathsf{P}\mathsf{x} \perp \mathcal{O}(\mathsf{P})$.

Példa

P Igazoljuk, hogy az

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrixok merőleges vetítés mátrixai! Hány dimenziós térre vetítenek?

Altértől való távolság

D $\mathbf{x}$-nek a $\mathcal{W} \leqslant \mathbb{R}^n$ altértől való távolságán a $\mathcal{W}$ altér $\mathbf{x}$-hez legközelebbi $\mathbf{w}$ vektorának tőle való távolságát értjük. E vektort az $\mathbf{x}$ vektor $\mathcal{W}$-beli legjobb közelítésének nevezzük.

T Legjobb közelítés tétele Adva van $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{W} \leqslant \mathbb{R}^n$. Az $\mathbf{x}$ vektornak egyetlen $\mathcal{W}$-beli legjobb $\hat{\mathbf{x}}$ közelítése van, nevezetesen $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x}$.

B L! $\mathbf{w} \in \mathcal{W}$: $\mathbf{x} - \mathbf{w} = (\mathbf{x} - \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x}) + (\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x} - \mathbf{w})$.
$\mathbf{x} - \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x} \in \mathcal{W}^{\perp}$, $\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x} - \mathbf{w} \in \mathcal{W}$
alkalmazható rájuk Pithagorász tétele:

$$|\mathbf{x} - \mathbf{w}|^2 = |\mathbf{x} - \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x}|^2 + |\,\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x} - \mathbf{w}|^2.$$

- Így $|\mathbf{x} - \mathbf{w}|^2 \geq |\mathbf{x} - \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x}|^2$, és egyenlőség csak akkor állhat fönn, ha $\mathbf{w} = \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x}$, ami egyúttal a legjobb közelítés egyértelműségét is bizonyítja.

Vektor felbontása merőleges összetevőkre

T $\mathsf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{W} \leqslant \mathbb{R}^n$. Az x vektor egyértelműen felbomlik egy $\mathcal{W}$-beli w és egy $\mathcal{W}$-re merőleges $\mathsf{w}^\perp$ vektor összegére, nevezetesen $\mathsf{w} = \mathsf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathsf{x}$ és $\mathsf{w}^\perp = \mathsf{x} - \mathsf{w}$.

B Tfh létezik két felbontás: $\mathsf{x} = \mathsf{w} + \mathsf{w}^\perp = \mathsf{v} + \mathsf{v}^\perp$

$$\rightsquigarrow \mathsf{v} - \mathsf{w} = \underbrace{\mathsf{w}^\perp}_{\in \mathcal{W}} - \underbrace{\mathsf{v}^\perp}_{\in \mathcal{W}^\perp}.$$

$$\rightsquigarrow \mathsf{v} - \mathsf{w} = 0 \rightsquigarrow \mathsf{v} = \mathsf{w}$$

Példa

P L! $\mathcal{W} = \mathrm{span}((1,-1,1,0),(0,1,-1,0)) \leqslant \mathbb{R}^4$, $\mathbf{x} = (8,4,2,1)$. Bontsuk fel az $\mathbf{x}$ vektort $\mathcal{W}$-be eső és $\mathcal{W}$-re merőleges vektorok összegére.

M A $\mathcal{W}$-re való merőleges vetítés mátrixa $\mathbf{P} = \mathbf{W}(\mathbf{W}^\mathsf{T}\mathbf{W})^{-1}\mathbf{W}^\mathsf{T}$, ahol $\mathbf{W}$ két oszlopa a megadott két bázisvektor, tehát

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{amiből} \quad \mathbf{Px} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Így $\mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x} = \mathbf{Px} = (8,1,-1,0)$ és $\mathbf{x} - \mathbf{proj}_{\mathcal{W}}\,\mathbf{x} = (0,3,3,1)$. Egyszerű számítással ellenőrizhető, hogy a $(8,1,-1,0) \in \mathcal{W}$ és hogy $(0,3,3,1) \in \mathcal{W}^\perp$, azaz $(0,3,3,1) \perp \mathcal{W}$, azaz merőleges a $\mathcal{W}$-t kifeszítő bázisvektorok mindegyikére.

A vetület gyorsabb kiszámítása a vetítő mátrix nélkül

- $\mathbf{W}^\mathsf{T}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$,
- $\mathbf{W}^\mathsf{T}\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$,
- $(\mathbf{W}^\mathsf{T}\mathbf{W})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$
- $(\mathbf{W}^\mathsf{T}\mathbf{W})^{-1}\mathbf{W}^\mathsf{T}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{W}(\mathbf{W}^\mathsf{T}\mathbf{W})^{-1}\mathbf{W}^\mathsf{T}\mathbf{b} = \mathbf{W}\begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

A véges test esete: Páratlanváros*

- Páratlanváros ügyeit hatékonyan intézi:
  1. minden bizottság páratlan sok tagból áll,
  2. bármely két bizottságnak csak páros sok közös tagja lehet.

Á Ha a lakók száma v, legföljebb v bizottságot tudnak létrehozni.

B Lakók: $\{1, 2, \ldots, v\}$, bizottságok: $\{B_1, \ldots, B_b\}$, és legyen

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i \in B_j, \\ 0, & \text{egyébként,} \end{cases} \qquad \mathbf{M} = [m_{ij}]_{v \times b}.$$

- a $b \times b$-es $\mathbf{M}^\top\mathbf{M}$-ben $[\mathbf{M}^\top\mathbf{M}]_{ij}$ eleme $B_i \cap B_j$ halmaz elemszámát adja, ami $i = j$ esetén páratlan, $i \neq j$ esetén páros.
- $\mathbb{F}_2$ fölött tekintjük: $\mathbf{M}^\top\mathbf{M} = \mathbf{I}_b$
- $\rightsquigarrow \mathrm{r}(\mathbf{M}^\top\mathbf{M}) = b \rightsquigarrow \mathrm{r}(\mathbf{M}) \geqslant b$
- $\mathbf{M} \in \mathbb{F}_2^{v \times b} \rightsquigarrow \mathrm{r}(\mathbf{M}) = b$, $\mathrm{r}(\mathbf{M}) \leqslant v$
- $\rightsquigarrow b \leqslant v$ (= pl. egyfős bizottságok esetén).

A véges test esete: Párosváros*

Párosváros ügyeit megfontoltan intézi:

1. minden bizottság páros sok tagból áll,
2. bármely két bizottságnak csak páros sok közös tagja lehet.

Á Ha a lakók száma v, legföljebb $2^{\lfloor v/2 \rfloor} - 1$ bizottságot tudnak létrehozni.

B $\mathbb{F}_2$ fölött: $\mathbf{M}^\top \mathbf{M} = \mathbf{O}$, azaz $\mathbf{M}$ minden oszlopvektora merőleges mindegyik másikra

- $\mathcal{W} = \mathrm{span}(\mathbf{M}_{*1}, \mathbf{M}_{*2}, \ldots, \mathbf{M}_{*b}\}$, így bármely $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{W}$-re:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (x_1 \mathbf{M}_{*1} + \ldots + x_b \mathbf{M}_{*b}) \cdot (y_1 \mathbf{M}_{*1} + \ldots + y_b \mathbf{M}_{*b}) = \sum_{i,j} x_i y_j \mathbf{M}_{*i} \mathbf{M}_{*j} = 0.$$

- $\rightsquigarrow \mathcal{W} \leqslant \mathcal{W}^\perp$, de $\dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^\perp = \dim \mathbb{F}_2^v = v \rightsquigarrow \dim \mathcal{W} \leqslant v/2$
- $\mathcal{W}$ elemszáma legföljebb $2^{\lfloor v/2 \rfloor} - 1$ (üres részhalmaz kizárva).
- A korlát el is érhető $\lfloor v/2 \rfloor$ házaspárral.

Optimális megoldás

Inkonzisztens egyenletrendszerek

- $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ pontosan akkor konzisztens, ha $\mathbf{b} \in \mathcal{O}(\mathbf{A})$. Inkonzisztens esetben mit tehetünk?

D Keressünk olyan $\mathbf{x}$ megoldást, melyre $\mathbf{Ax}$ a legközelebb van $\mathbf{b}$-hez (azaz $(\mathbf{b} - \mathbf{Ax})^2$ a legkisebb).

- E megoldásokat az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer optimális megoldásainak vagy a legkisebb négyzetek elve szerinti megoldásainak nevezzük.
- L! $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathbf{A})}\, \mathbf{b}$, és az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer helyett oldjuk meg az $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}}$ egyenletrendszert!

T Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer optimális megoldásai megegyeznek az $\boxed{\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}}$ egyenletrendszer megoldásaival. Ezek közül egyetlen egy esik az $\mathbf{A}$ mátrix sorterébe, a legkisebb abszolút értékű.

- Neve: normálegyenlet-rendszer vagy normálegyenlet.

B $\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b}$ opt. megoldásai = $\mathsf{A}\hat{\mathsf{x}} = \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathsf{A})}\,\mathsf{b}$ megoldásai

- ($\hat{\mathsf{x}}$ opt.mo. $\Rightarrow \mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}\hat{\mathsf{x}} = \mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{b}$) $\quad \mathsf{b} - \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathsf{A})}\,\mathsf{b} \perp \mathcal{O}(\mathsf{A}) \rightsquigarrow$
  $\mathsf{b} - \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathsf{A})}\,\mathsf{b} \in \mathcal{N}(\mathsf{A}^\mathsf{T}) \rightsquigarrow \mathsf{A}^\mathsf{T}(\mathsf{b} - \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathsf{A})}\,\mathsf{b}) = \mathsf{0}$.
  $\mathsf{A}\hat{\mathsf{x}} = \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathsf{A})}\,\mathsf{b} \rightsquigarrow \mathsf{A}^\mathsf{T}(\mathsf{b} - \mathsf{A}\hat{\mathsf{x}}) = \mathsf{0}, \rightsquigarrow \mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}\hat{\mathsf{x}} = \mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{b}$.
- ($\hat{\mathsf{x}}$: $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}\hat{\mathsf{x}} = \mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{b} \Rightarrow \hat{\mathsf{x}}$ opt.mo.)
  $\mathsf{A}^\mathsf{T}(\mathsf{b} - \mathsf{A}\hat{\mathsf{x}}) = \mathsf{0} \rightsquigarrow \mathsf{b} - \mathsf{A}\hat{\mathsf{x}} \in \mathcal{N}(\mathsf{A}^\mathsf{T}) \rightsquigarrow \mathsf{b} - \mathsf{A}\hat{\mathsf{x}} \perp \mathcal{O}(\mathsf{A})$
  $\mathsf{b} = \mathsf{A}\hat{\mathsf{x}} + (\mathsf{b} - \mathsf{A}\hat{\mathsf{x}})$ – felbontás két merőleges vektor összegére
  a $\perp$ vetület definíciója szerint $\mathsf{A}\hat{\mathsf{x}} = \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(\mathsf{A})}\,\mathsf{b}$, ($\hat{\mathsf{x}}$ opt.mo.)
- $\mathcal{S}(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}) = \mathcal{S}(\mathsf{A})$, mert $\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{0} \Leftrightarrow \mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{0}$, azaz $\mathcal{N}(\mathsf{A}) = \mathcal{N}(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})$
  ugyanis $\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{0} \rightsquigarrow \mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{0} \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mathsf{A}) \subseteq \mathcal{N}(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})$
  másrészt $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{0} \rightsquigarrow \mathsf{0} = \mathsf{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}\mathsf{x} = (\mathsf{A}\mathsf{x})^\mathsf{T}(\mathsf{A}\mathsf{x}) \rightsquigarrow \mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{0} \rightsquigarrow$
  $\mathcal{N}(\mathsf{A}) \supseteq \mathcal{N}(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})$, tehát $\mathcal{N}(\mathsf{A}) = \mathcal{N}(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})$.
- Egyetlen egy mo. van $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$ sorterében, így A sorterében is!

K Minden valós mátrixra $\mathrm{r}(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}) = \mathrm{r}(\mathsf{A})$. (ui. $\mathcal{S}(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}) = \mathcal{S}(\mathsf{A})$)

K Ha A teljes oszloprangú, akkor az $\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{b}$ egyenletrendszernek egyetlen optimális megoldása van. (ui. $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}$ invertálható)

Példa: egyenletrendszer optimális megoldásai

P Határozzuk meg az

$$\begin{aligned} y + z &= 3 \\ x + y + 2z &= 2 \\ x + z &= 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszert optimális megoldásait, és a min. absz. értékűt!

m Az egyenletrendszer inkonzisztens:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

M A normálegyenlet: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$.

Példa folytatása: a minimális abszolút értékű

- Az összes megoldás:
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{így} \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$
- A minimális abszolút értékű = sortérbe eső megoldás: az eredeti egyenletrendszer kiegészítésével:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
- A sortérbe eső megoldás $(0, 1, 1)$, azaz az összes megoldás ezzel fölírva:
$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t.$$

Lineáris regresszió

- $y = a + bx$ változóira méréseket végzünk, hogy meghatározzuk a és b értékét.
- n mérés után $\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$.
- normálegyenlet

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

- kifejtve $\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$
- Az $y = \hat{a} + \hat{b}x$ egyenest regressziós egyenesnek nevezzük, mely a megadott adatokra a legkisebb négyzetek elve szerinti

T Az (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \dots n)$ párokhoz tartozó, $y = \hat{a} + \hat{b}x$ egyenletű regressziós egyenes paraméterei kielégítik az

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \end{bmatrix}$$

egyenletet. Ez egyértelműen megoldható, ha van legalább két különböző x_i érték.

B még bizonyítandó az egyértelműség: ha van két különböző x_i érték, akkor az

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}$$

mátrix teljes oszloprangú, így $\mathrm{r}(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}) = 2$, és a normálegyenlet egyértelműen megoldható.

Polinomiális regresszió

- Keressünk az $a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k$ polinom együtthatóira optimális becslést a legkisebb négyzetek módszerével, ha az (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots n)$ párok sorozatát ismerjük.
- Keresendő az n egyenletből álló $k+1$-ismeretlenes

$$
\begin{aligned}
a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_k x_1^k &= y_1 \\
a_0 + a_1 x_2 + \ldots + a_k x_2^k &= y_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_k x_n^k &= y_n
\end{aligned}
$$

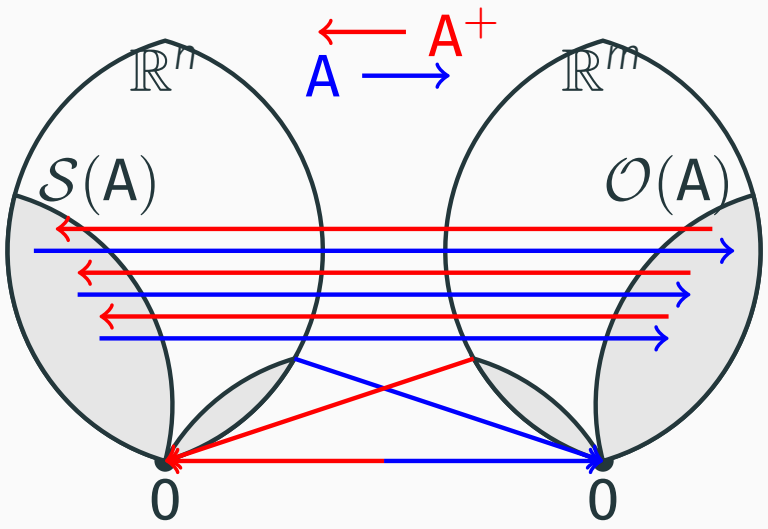
egyenletrendszer megoldása az a_0, a_1,..., a_k ismeretlenekre.

$$
\begin{bmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^k \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^k \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}
$$

, opt.mo. az $\mathbf{X}^\top \mathbf{X} \hat{\mathbf{a}} = \mathbf{X}^\top \mathbf{y}$ -ből.

Pszeudoinverz

Pszeudoinverz – általánosított inverz



- $Ax = b$ sortérbe eső optimális megoldása megkapható egy $\hat{x} = A^+ b$ képlettel?
- $Ax = \hat{b} (= \mathbf{proj}_{\mathcal{O}(A)}\, b)$ egyenlet mindig megoldható, sortérbe eső $\hat{x}$ megoldására $\hat{x} = A^+ b = A^+ \hat{b}$ kéne!
  $\rightsquigarrow A^+(b - \hat{b}) = 0 \rightsquigarrow z \in \mathcal{N}(A^\top) \Rightarrow A^+ z = 0.$
- Az inverz fogalmának sokféle általánosítása van.

Moore – Penrose-féle pszeudoinverz

D **A Moore – Penrose-féle pszeudoinverz**

Legyen A egy $m \times n$-es valós mátrix. Pszeudoinverzén vagy Moore – Penrose-féle pszeudoinverzén azt az A^+-szal jelölt mátrixot értjük, amellyel

1. A^+ hatása $\mathcal{O}(\mathsf{A})$-n: a sortér minden $\mathbf{x}$ vektorára $\mathsf{A}^+(\mathsf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{x}$,
2. A^+ hatása $\mathcal{O}(\mathsf{A})^\perp$-én: minden $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathsf{A}^\mathsf{T})$ vektorra $\mathsf{A}^+\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

- $m \times n$-es mátrix pszeudoinverze $n \times m$-es
- A^+-hoz tartozó mátrixleképezés hatását ismerjük az $\mathcal{O}(\mathsf{A})$ altéren és merőleges kiegészítő alterén, ezeken definíció alapján lineáris $\rightsquigarrow$ az egész térre kiterjeszthető lineárisan $\rightsquigarrow$ létezik és egyértelmű!
- $\mathcal{N}(\mathsf{A}^+) = \mathcal{N}(\mathsf{A}^\mathsf{T})$, és $\mathcal{S}(\mathsf{A}^+) = \mathcal{N}(\mathsf{A}^+)^\perp$, így $\mathcal{S}(\mathsf{A}^+) = \mathcal{S}(\mathsf{A}^\mathsf{T}) = \mathcal{O}(\mathsf{A})$.

Néhány pszeudoinverz

- $\mathsf{A}^+ = \mathsf{A}^{-1}$, ha A invertálható,
- $\mathsf{O}^+_{m\times n} = \mathsf{O}_{n\times m}$,
- $[a]^+ = [1/a]$, ha $a \neq 0$, és $[0]^+ = [0]$,
- $(\mathsf{A}^+)^+ = \mathsf{A}$,
- ha $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, akkor

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & 0 & \ldots & 0 & \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \mathsf{O} \\ 0 & 0 & \ldots & a_{rr} & \\ \hline & & \mathsf{O} & & \mathsf{O} \end{array}\right]^+_{m\times n} = \left[\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \ldots & 0 & \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \ldots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \mathsf{O} \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{a_{rr}} & \\ \hline & & \mathsf{O} & & \mathsf{O} \end{array}\right]_{n\times m}$$

T

A pszeudoinverz mátrixa

Ha a valós $\mathbf{A}$ mátrix teljes oszloprangú, akkor

$$\mathbf{A}^{+} = (\mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathsf{T}}, \tag{1}$$

ha teljes sorrangú, akkor

$$\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathsf{T}})^{-1}. \tag{2}$$

Ha $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}$, ahol $\mathbf{B}$ egy teljes oszloprangú, $\mathbf{C}$ egy teljes sorrangú mátrix, akkor

$$\mathbf{A}^{+} = \mathbf{C}^{+}\mathbf{B}^{+} = \mathbf{C}^{\mathsf{T}}(\mathbf{C}\mathbf{C}^{\mathsf{T}})^{-1}(\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^{\mathsf{T}} \tag{3}$$

$$= \mathbf{C}^{\mathsf{T}}(\mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}\mathbf{C}^{\mathsf{T}})^{-1}\mathbf{B}^{\mathsf{T}}. \tag{4}$$

Bizonyítás

- A teljes oszloprangú $\rightsquigarrow$ értelmezési tartomány = sortér

$$(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{x}.$$

  $\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{z} = \mathsf{0} \Rightarrow \mathsf{A}^+\mathsf{z} = \mathsf{0}$, mert $(\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})^{-1}\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{z} = (\mathsf{A}^\mathsf{T}\mathsf{A})^{-1}\mathsf{0} = \mathsf{0}$.
- A teljes sorrangú $\rightsquigarrow$ oszloptér = egész tér $\rightsquigarrow$ $\mathsf{A}\mathsf{x} = \mathsf{y}$ konzisztens $\hat{\mathsf{x}}$ az egyetlen sortérbe eső megoldás, akkor minden más x megoldás esetén $\mathbf{proj}_{\mathcal{S}(\mathsf{A})}\,\mathsf{x} = \hat{\mathsf{x}} \rightsquigarrow \mathsf{A}^+\mathsf{y} = \hat{\mathsf{x}}$, ugyanis

$$\mathbf{proj}_{\mathcal{S}(\mathsf{A})}\,\mathsf{x} = \mathsf{A}^\mathsf{T}(\mathsf{A}\mathsf{A}^\mathsf{T})^{-1}\mathsf{A}\mathsf{x} = \left(\mathsf{A}^\mathsf{T}(\mathsf{A}\mathsf{A}^\mathsf{T})^{-1}\right)(\mathsf{A}\mathsf{x}) = \mathsf{A}^+\mathsf{y}.$$

- $\mathsf{A} = \mathsf{B}\mathsf{C}$, $\mathsf{y} = \mathsf{A}\mathsf{x}$, $\mathsf{w} = \mathsf{C}\mathsf{x}$ és $\mathsf{y} = \mathsf{B}\mathsf{w}$

  B teljes oszloprangú, C teljes sorrangú $\rightsquigarrow$ $\mathsf{C}^+\mathsf{B}^+\mathsf{y} = \mathsf{C}^+\mathsf{w} = \mathsf{x}$ *a)* ✓

  A és B oszloptere azonos $\rightsquigarrow$ $\mathsf{B}^+\mathsf{z} = \mathsf{0}$, tehát $\mathsf{C}^+\mathsf{B}^+\mathsf{z} = \mathsf{0}$ *b)* ✓

Példák

- Számítsuk ki a következő mátrixok pszeudoinverzét!

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ \text{és} \ \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{B}$ teljes oszloprangú, használjuk az (1) képletet

$$\mathbf{B}^+ = (\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

- A $\mathbf{C}$ mátrix teljes sorrangú, így a (2) képlet szerint

$$\mathbf{C}^+ = \mathbf{C}^\mathsf{T}(\mathbf{C}\mathbf{C}^\mathsf{T})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

- M bázisfelbontása BC:

$$\mathsf{M}^+ = \mathsf{C}^+\mathsf{B}^+ = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- A (4) képlettel

$$\begin{aligned} \mathsf{M}^+ &= \mathsf{C}^\mathsf{T}(\mathsf{B}^\mathsf{T}\mathsf{M}\mathsf{C}^\mathsf{T})^{-1}\mathsf{B}^\mathsf{T} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

T **Moore – Penrose-tétel**

A valós $\mathbf{A}$ mátrixnak $\mathbf{X}$ pontosan akkor pszeudoinverze, ha az alábbi négy feltétel mindegyike fennáll:

$$a)\ \mathbf{AXA} = \mathbf{A}, \quad b)\ \mathbf{XAX} = \mathbf{X}, \quad c)\ (\mathbf{AX})^\mathsf{T} = \mathbf{AX}, \quad d)\ (\mathbf{XA})^\mathsf{T} = \mathbf{XA}.$$

- ($\mathbf{A}^+$ teljesíti e feltételeket)

$$\begin{aligned}
\mathbf{AA}^+\mathbf{A} &= \mathbf{AR}^\mathsf{T}(\mathbf{RR}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{A} \\
&= \mathbf{BRR}^\mathsf{T}(\mathbf{RR}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{BR} = \mathbf{BR} = \mathbf{A} \\
\mathbf{A}^+\mathbf{AA}^+ &= \mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{RR}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{BRR}^\mathsf{T}(\mathbf{RR}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T} \\
&= \mathbf{R}^\mathsf{T}(\mathbf{RR}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T} = \mathbf{A}^+
\end{aligned}$$

- $A^+A = (R^T(RR^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T)(BR) = R^T(RR^T)^{-1}R,$
  $AA^+ = (BR)(R^T(RR^T)^{-1}(B^TB)^{-1}B^T) = B(B^TB)^{-1}B^T.$
- $(A^+A)^T = (R^T(RR^T)^{-1}R)^T = R^T(RR^T)^{-1}R = A^+A$
  $(AA^+)^T = (B(B^TB)^{-1}B^T)^T = B(B^TB)^{-1}B^T = AA^+.$

- (Egyértelműség) Tfh X és Y is teljesíti a 4 feltételt:

$$\begin{aligned} AY &\overset{a)}{=} AXAY \overset{c)}{=} (AX)^T(AY)^T = X^TA^TY^TA^T \\ &= X^T(AYA)^T \overset{a)}{=} X^TA^T = (AX)^T \overset{c)}{=} AX \qquad (5) \\ YA &\overset{a)}{=} YAXA \overset{d)}{=} (YA)^T(XA)^T = A^TY^TA^TX^T \\ &= (AYA)^TX^T \overset{a)}{=} A^TX^T = (XA)^T \overset{d)}{=} XA \qquad (6) \\ Y &\overset{b)}{=} YAY \overset{(5)}{=} YAX \overset{(6)}{=} XAX \overset{b)}{=} X. \end{aligned}$$

T

A^+A és AA^+ merőleges vetítés

Tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix esetén

$$A^+A = \mathrm{proj}_{\mathcal{S}(A)} \quad \text{és} \quad AA^+ = \mathrm{proj}_{\mathcal{O}(A)}\,.$$

Tehát A^+A az $\mathbb{R}^n$ teret merőlegesen vetíti A sorterére, míg AA^+ az $\mathbb{R}^m$ teret merőlegesen vetíti A oszlopterére.

- Az előzőekben bizonyítottuk, hogy $A^+A = R^T(RR^T)^{-1}R$, ami épp az R^T oszlopvektorai által kifeszített térre – azaz a sortérre – való merőleges vetítés mátrixa.
- Az előzőekben bizonyítottuk, hogy $AA^+ = B(B^TB)^{-1}B^T$, ami a B oszlopvektorai által kifeszített térre – azaz az oszloptérre – való merőleges vetítés mátrixa.

A minimális abszolút értékű optimális megoldás

T **Optimális megoldás pszeudoinverzzel**

Legyen $\mathbf{A}$ egy valós mátrix. Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek az $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$ a minimális abszolút értékű optimális megoldása.

- ($\mathbf{A}^+\mathbf{b}$ optimális megoldás), azaz megoldása az $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$ normálegyenlet-rendszernek
- Igazolni kell, hogy $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{b} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$.
- Elég ezt: $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^T$
- $\mathbf{A} = \mathbf{BR}$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{A}^+ &= (\mathbf{R}^T\mathbf{B}^T)(\mathbf{B}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T)\\ &= \mathbf{R}^T(\mathbf{B}^T\mathbf{B})(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{B}^T = \mathbf{A}^T\end{aligned}$$

- $\mathbf{A}^+\mathbf{b}$ a sortérben van, és a sortérbe csak egyetlen optimális megoldás esik

P Adjuk meg az

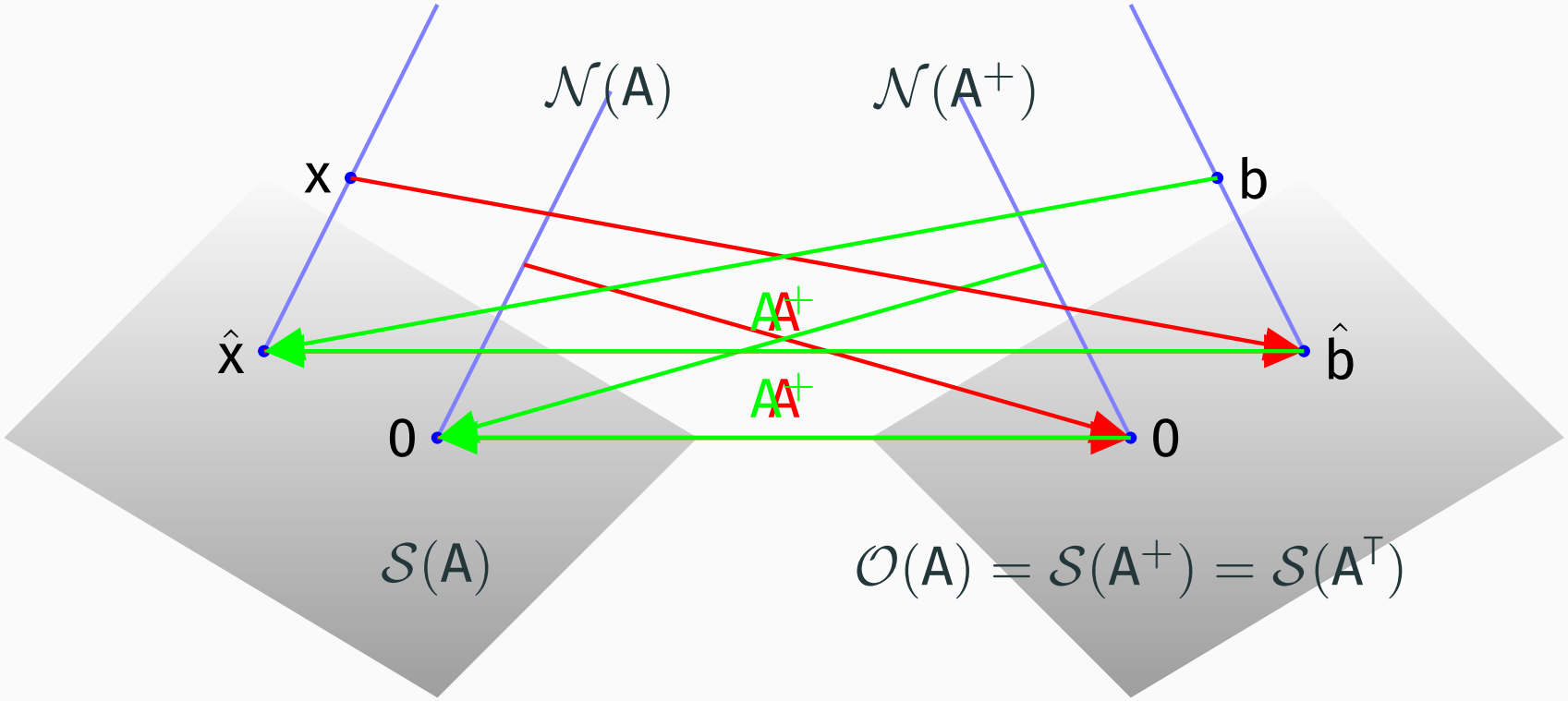
$$\begin{aligned} y + z &= 3 \\ x + y + 2z &= 2 \\ x + z &= 2 \end{aligned}$$

egyenletrendszer minimális abszolút értékű optimális megoldását!

M Az egyenletrendszer inkonzisztens, ami bővített mátrixának redukált lépcsős alakjából leolvasható.

A minimális abszolút értékű optimális megoldás

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{b} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$


$\mathcal{N}(\mathsf{A})$
$\mathcal{N}(\mathsf{A}^+)$
x
b
$\hat{\mathsf{x}}$
$\hat{\mathsf{b}}$
$\mathsf{A}\mathsf{A}^+$
$\mathsf{A}\mathsf{A}^+$
0
0
$\mathcal{S}(\mathsf{A})$
$\mathcal{O}(\mathsf{A}) = \mathcal{S}(\mathsf{A}^+) = \mathcal{S}(\mathsf{A}^\mathsf{T})$

Hasonlóság

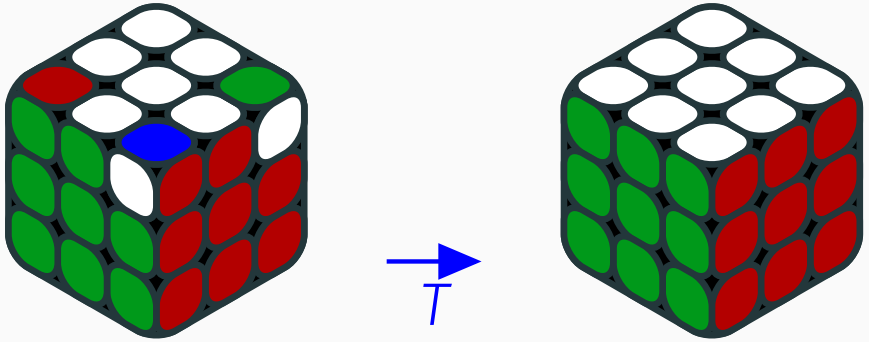
Lineáris leképezés mátrixa különböző bázisokban

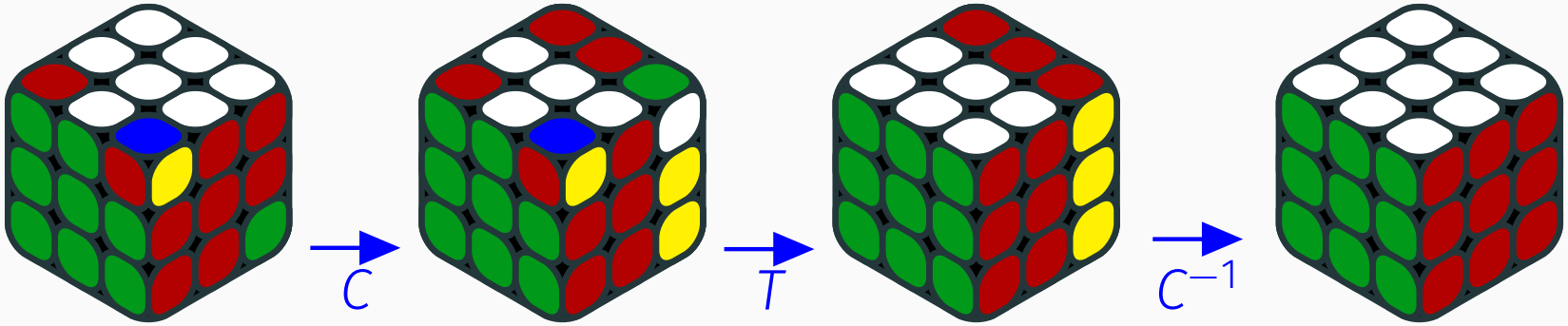
$$\begin{tikzcd}
{[\mathsf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "\mathsf{L}_{\mathcal{B}}"] & {[L\mathsf{x}]_{\mathcal{B}}} \\
{[\mathsf{x}]_{\mathcal{A}}} \arrow[u, "\mathsf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"] \arrow[r, "\mathsf{L}_{\mathcal{A}}"'] & {[L\mathsf{x}]_{\mathcal{A}}} \arrow[u, "\mathsf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{[\mathsf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "\mathsf{L}_{\mathcal{B}}"] & {[L\mathsf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[d, "\mathsf{C}_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathsf{C}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"] \\
{[\mathsf{x}]_{\mathcal{A}}} \arrow[u, "\mathsf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"] \arrow[r, "\mathsf{L}_{\mathcal{A}}"'] & {[L\mathsf{x}]_{\mathcal{A}}}
\end{tikzcd}$$

$$\mathsf{L}_{\mathcal{B}}\mathsf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}} = \mathsf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathsf{L}_{\mathcal{A}}$$

$\mathsf{L}_{\mathcal{A}} = \mathsf{C}_{\mathcal{A}\leftarrow\mathcal{B}}\mathsf{L}_{\mathcal{B}}\mathsf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$, illetve

$\mathsf{L}_{\mathcal{A}} = \mathsf{C}^{-1}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}\mathsf{L}_{\mathcal{B}}\mathsf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}$





$C^{-1}TC$

Hasonlóság

D Azt mondjuk, hogy az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix hasonló a $\mathbf{B}$ mátrixhoz, ha létezik olyan invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}.$$

J Jelölés: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

M Ha $\mathbf{A}$ hasonló $\mathbf{B}$-hez, akkor $\mathbf{B}$ is hasonló $\mathbf{A}$-hoz.

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1} = (\mathbf{C}^{-1})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1} = \hat{\mathbf{C}}^{-1}\mathbf{B}\hat{\mathbf{C}}.$$

P $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$, ui. $\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$,

vagy $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ -9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

D A $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ alakú kifejezést az $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{C}$-vel való konjugáltjának nevezzük.

Hasonlóság

T Két mátrix pontosan akkor hasonló, ha van két olyan bázis, melyekben e két mátrix ugyanannak a lineáris leképezésnek a mátrixa.

B $(L \text{ lin.lek.} \Rightarrow \mathsf{A} = \mathsf{L}_{\mathcal{A}} \sim \mathsf{B} = \mathsf{L}_{\mathcal{B}})$ ✓

$(\exists L \text{ lin.lek.} \Leftarrow \mathsf{A} \sim \mathsf{B})$

$\mathsf{A} \sim \mathsf{B} \rightsquigarrow \mathsf{B} = \mathsf{C}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{C}$

Legyen $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n\}$, ekkor

$$\mathsf{B} = \mathsf{C}^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}\mathsf{A}\mathsf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}.$$

L az A mátrixhoz tartozó mátrixleképezés a standard bázisban, B az L mátrixa a $\mathcal{C}$ bázisban.

Hasonlóságra invariáns tulajdonságok

T Ha $\mathsf{A} \sim \mathsf{B}$, akkor

1. $\mathrm{r}(\mathsf{A}) = \mathrm{r}(\mathsf{B})$,
2. $\dim(\mathcal{N}(\mathsf{A})) = \dim(\mathcal{N}(\mathsf{B}))$,
3. $\det(\mathsf{A}) = \det(\mathsf{B})$,
4. $\mathrm{trace}(\mathsf{A}) = \mathrm{trace}(\mathsf{B})$.

B

1. $\mathrm{r}(\mathsf{A}) = \dim(\mathcal{O}(\mathsf{A})) = \dim(\mathrm{Im}(L)) = \dim(\mathcal{O}(\mathsf{B})) = \mathrm{r}(\mathsf{B})$
2. $\dim(\mathcal{N}(\mathsf{A})) = \dim(\mathrm{Ker}(L)) = \dim(\mathcal{N}(\mathsf{B}))$
3. $\det(\mathsf{A}) = \det(\mathsf{C}^{-1}\mathsf{B}\mathsf{C}) = \det(\mathsf{C}^{-1})\det(\mathsf{B})\det(\mathsf{C}) = \det(\mathsf{B})$, mivel $\det(\mathsf{C})\det(\mathsf{C}^{-1}) = 1$.
4. Legyen $\mathsf{C} = [c_{ij}]$, $\mathsf{C}^{-1} = [d_{ij}]$, ekkor

$$\mathrm{trace}\,\mathsf{B} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d_{ij}a_{jk}c_{ki}\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ki}d_{ij}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\delta_{jk} = \mathrm{trace}\,\mathsf{A}$$

Lineáris leképezés mátrixa különböző bázispárokban*

- Legyen a $\mathcal{U}$ vektortér két bázisa $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$, a $\mathcal{V}$ pi vektortér két bázisa $\mathcal{A}'$ és $\mathcal{B}'$.

  Az $L : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ lineáris leképezés mátrixa az $\{\mathcal{A}, \mathcal{A}'\}$ bázispárban $\mathsf{L}_{\mathcal{A}' \leftarrow \mathcal{A}}$, a $\{\mathcal{B}, \mathcal{B}'\}$ bázispárban $\mathsf{L}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$,

  a bázisok közti áttérések mátrixai $\mathsf{C}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{A}}$, illetve $\mathsf{D}_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{A}'}$.

Lineáris leképezés mátrixa különböző bázispárokban*

$$\begin{tikzcd}
{[\mathsf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "\mathsf{L}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}"] & {[L\mathsf{x}]_{\mathcal{B}'}} \arrow[d, "\mathsf{D}^{-1}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{A}'}"] \\
{[\mathsf{x}]_{\mathcal{A}}} \arrow[u, "\mathsf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"] \arrow[r, "\mathsf{L}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{A}}"'] & {[L\mathsf{x}]_{\mathcal{A}'}}
\end{tikzcd}
\qquad \mathsf{D}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{B}'} =$$

$$\begin{tikzcd}
{[\mathsf{x}]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, "\mathsf{L}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}"] & {[L\mathsf{x}]_{\mathcal{B}'}} \arrow[d, "\mathsf{D}^{-1}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{A}'}"] \\
{[\mathsf{x}]_{\mathcal{A}}} \arrow[u, "\mathsf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}"] \arrow[r, "\mathsf{L}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{A}}"'] & {[L\mathsf{x}]_{\mathcal{A}'}}
\end{tikzcd}
\qquad \mathsf{D}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{B}'} =$$

- Áttérések: $[\mathsf{x}]_{\mathcal{B}} = \mathsf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}[\mathsf{x}]_{\mathcal{A}}, \quad [L\mathsf{x}]_{\mathcal{B}'} = \mathsf{D}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{A}'}[L\mathsf{x}]_{\mathcal{A}'},$
- Az $\mathsf{L}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{A}}$ és $\mathsf{L}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}$ mátrixok hatásai:

$$[L\mathsf{x}]_{\mathcal{A}'} = \mathsf{L}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{A}}[\mathsf{x}]_{\mathcal{A}}, \quad [L\mathsf{x}]_{\mathcal{B}'} = \mathsf{L}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}[\mathsf{x}]_{\mathcal{B}}.$$

- Lineáris leképezés mátrixai közti kapcsolat

$$\mathsf{D}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{A}'}\mathsf{L}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{A}} = \mathsf{L}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}\mathsf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}, \text{ azaz}$$

$$\mathsf{L}_{\mathcal{A}'\leftarrow\mathcal{A}} = \mathsf{D}^{-1}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{A}'}\mathsf{L}_{\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}}\mathsf{C}_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{A}}.$$

Lineáris leképezés mátrixa különböző bázispárokban*

- Lineáris leképezések mátrixai Ha A és B ugyanannak az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezésnek két mátrixa különböző bázispárokban, akkor
  1. a két mátrix rangja megegyezik,
  2. a két mátrix nullitása megegyezik.
- ha valamely invertálható C és D mátrixszal $\mathsf{A} = \mathsf{D}^{-1}\mathsf{BC}$ és átrendezve $\mathsf{B} = \mathsf{DAC}^{-1}$, akkor a szorzatmátrix rangjára vonatkozó állítás szerint $\mathrm{r}(\mathsf{A}) = \mathrm{r}(\mathsf{D}^{-1}\mathsf{BC}) \leqslant \mathrm{r}(\mathsf{B})$ és $\mathrm{r}(\mathsf{B}) = \mathrm{r}(\mathsf{DAC}^{-1}) \leqslant \mathrm{r}(\mathsf{A})$. Így $\mathrm{r}(\mathsf{A}) = \mathrm{r}(\mathsf{B})$.

  Innen $\dim(\mathcal{N}(\mathsf{A})) = n - \mathrm{r}(\mathsf{A}) = n - \mathrm{r}(\mathsf{B}) = \dim(\mathcal{N}(\mathsf{B}))$.

Rang, nullitás, determináns, nyom fogalmának kiterjesztése

D A lineáris $L : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ leképezés rangján képterének dimenzióját értjük, azaz $\mathrm{r}(L) = \dim(\mathrm{Im}(L))$. A magtér dimenzióját, azaz a $\dim(\mathrm{Ker}(L))$ számot a lineáris leképezés nullitásának nevezzük.

D A lineáris $L : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ transzformáció $\det L$-lel jelölt determinánsán (illetve $\mathrm{trace}\, L$-lel jelölt nyomán) az L leképezés bármely bázisban fölírt mátrixának determinánsát (illetve nyomát) értjük. A definíció értelmes, hisz e két érték mindegyike független a bázis választásától.

T Dimenziótétel lineáris leképezésekre – rang-nullitási tétel
Legyen $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ egy lineáris leképezés. Ekkor

$$\mathrm{r}(L) + \dim(\mathrm{Ker}(L)) = n.$$

Példák

- Határozzuk meg a rangját, nullitását, determinánsát, nyomát a sík
  1. α szögű elforgatásának,
  2. egy egyenesre való tükrözésének,
  3. egy egyenesre való merőleges vetítésének,

  a tér
  4. egy egyenes körül való α-szögű elforgatásának,
  5. egy egyenesre való merőleges vetítésének,
  6. egy síkra való merőleges vetítésének,
  7. egy síkra való merőleges tükrözésének!
- Legyen $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ egy lineáris transzformáció. A $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ vektorok és az $\{A\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_n\}$ által kifeszített paralelepipedonok térfogata hogyan viszonyul egymáshoz?

Lineáris leképezések néhány tulajdonsága**

D Egy $f : V \to W$ függvény

1. szürjektív, ha „ráképezés”, azaz $\operatorname{Ran} f = W$,
2. injektív (egy-egyértelmű), ha $u \neq v \in V$ esetén $f(u) \neq f(v)$,
3. bijektív (kölcsönösen egyértelmű), ha injektív és szürjektív.

D A bijektív $\mathcal{V} \to \mathcal{W}$ lineáris leképezéseket izomorfizmusnak nevezzük, és amh. a $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ vektorterek izomorfak, ha van köztük egy izomorfizmus. Jelölés $\mathcal{V} \simeq \mathcal{W}$.

P Legyen $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \subset \mathbb{R}^3$ független vektorrendszer, és $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ legyen az a lineáris leképezés, melyre $A : (1, 0) \mapsto \mathbf{u}$, $A : (0, 1) \mapsto \mathbf{v}$. Mit mondhatunk az $\mathbb{R}^2$ és a $\mathcal{V} = \operatorname{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ vektortérről?

Á 0. Ha $\mathcal{U} \xrightarrow{A} \mathcal{V} \xrightarrow{B} \mathcal{W}$, A és B lin.lek, akkor $B \circ A$ lin.lek.

1. Ha $\mathcal{U} \xrightarrow{A} \mathcal{V} \xrightarrow{B} \mathcal{W}$, A és B izomorfizmus, akkor $B \circ A$ izomorfizmus.

2. Ha $A : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ izom., akkor $\exists A^{-1} : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ inverz és az izom..

B $(B \circ A)(c\mathbf{u}+\mathbf{v}) = B(A(c\mathbf{u}+\mathbf{v})) = cB(A\mathbf{u})+B(A\mathbf{v}) = c(B\circ A)\mathbf{u}+(B\circ A)\mathbf{v}$

2. A bijekció $\rightsquigarrow \forall \mathbf{w}\, \exists^1 \mathbf{v}$: $A\mathbf{v} = \mathbf{w} \rightsquigarrow A^{-1}\mathbf{w} := \mathbf{v}$ bijekció.

A^{-1} lineáris: $A^{-1}(c\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = A^{-1}(cA\mathbf{v}_1 + A\mathbf{v}_2) = A^{-1}(A(c\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)) = c\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = cA^{-1}\mathbf{w}_1 + A^{-1}\mathbf{w}_2$.

K A vektorterek izomorfiája ekvivalenciareláció.

Véges dimenziós terek jellemzése

T Ha $\mathcal{V}_{\mathbb{F}}$-nek van n-elemű bázisa, akkor $\mathcal{V} \simeq \mathbb{F}^n$.

B L! $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ bázis $\mathcal{V}$-ben, és a koordinátázó leképezés $k : \mathcal{V} \to \mathbb{F}^n; \mathbf{v} \mapsto [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = (v_1, \ldots, v_n)$, ha $\mathbf{v} = \sum v_i \mathbf{b}_i$.

k lineáris: $\mathbf{u} = \sum u_i \mathbf{b}_i$, $\mathbf{v} = \sum v_i \mathbf{b}_i$:
$k(c\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k(c \sum u_i \mathbf{b}_i + \sum v_i \mathbf{b}_i) = k(\sum (cu_i + v_i)\mathbf{b}_i) =$
$(cu_1 + v_1, \ldots, cu_n + v_n) = c(u_1, \ldots, u_n) + (v_1, \ldots, v_n) = ck(\mathbf{u}) + k(\mathbf{v})$

k injektív: $k(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \rightsquigarrow \mathbf{v} = \sum 0\mathbf{b}_i \rightsquigarrow \operatorname{Ker} k = \{\mathbf{0}\}$.

k szürjektív: $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$-re $k(\sum x_i \mathbf{b}_i) = (x_1, \ldots, x_n)$.

Ortogonális mátrixok és leképezések

Ortogonális transzformációk

D $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ortogonális, ha $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ és T távolságtartó.

T Ha T ortogonális tranformáció, akkor

1. hossztartó: $|T(\mathbf{v})| = |\mathbf{v}|$,
2. additív (összegtartó): $T(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = T(\mathbf{v}) + T(\mathbf{w})$,
3. homogén: $T(\lambda\mathbf{v}) = \lambda T(\mathbf{v})$,
4. skalárszorzattartó: $T(\mathbf{v}) \cdot T(\mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$,
5. szögtartó: $(T(\mathbf{v}), T(\mathbf{w}))_\angle = (\mathbf{v}, \mathbf{w})_\angle$,
6. bázist bázisba visz,
7. ortonormált bázist ortonormált bázisba visz.

K Az ortogonális transzformációk lineárisak, mivel additív és homogén transzformációk.

Ortogonális transzformációk 2

B

1. $|T(\mathbf{v})| = |T(\mathbf{v}) - \mathbf{0}| = |T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{0})| = |\mathbf{v} - \mathbf{0}| = |\mathbf{v}|$;
2. parallelogrammát egybevágó parallelogrammába visz;
3. trivi
4. $(\mathbf{v}+\mathbf{w})^2 = \mathbf{v}^2 + 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{w}^2$, $\rightsquigarrow \mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \frac{1}{2}(|\mathbf{v}+\mathbf{w}|^2 - |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{w}|^2)$;
5. az előzőkből;
6. $\mathbf{0} = \sum_i \lambda_i T(\mathbf{v}_i) = T(\sum_i \lambda_i \mathbf{v}_i) \rightsquigarrow |\sum_i \lambda_i \mathbf{v}_i| = |T(\sum_i \lambda_i \mathbf{v}_i)| = 0 \rightsquigarrow$ $\lambda_i = 0$ minden i-re;
7. 1-, 4-, 6-ból.

Ortogonális mátrix

D Egy $\mathbf{A}$ mátrixot ortogonálisnak nevezünk, ha az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ leképezés ortogonális.

T Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra ekvivalensek:

1. $\mathbf{A}$ ortogonális,
2. $\mathbf{A}$ oszlopvektorai ortonormált rendszert alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben,
3. $\mathbf{A}$ sorvektorai ortonormált rendszert alkotnak $\mathbb{R}^n$-ben,
4. $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$.

Ortogonális mátrix

B (1. $\Rightarrow$ 2.) Ortogonális leképezés az $\mathbf{e}_1$,..., $\mathbf{e}_n$ ortonormált bázist ortonormált bázisba viszi, ami az $\mathbf{A}$ oszlopvektoraiból áll.

(2. $\Rightarrow$ 4.) $(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})_{ij} = (\mathbf{A}^\mathsf{T})_{i*}(\mathbf{A})_{*j} = (\mathbf{A})_{*i} \cdot (\mathbf{A})_{*j} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j, \\ 0, & \text{ha } i \neq j. \end{cases}$

(4. $\Rightarrow$ 1.) Tetszőleges $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$-re:

$$|\mathbf{A}\mathbf{x}|^2 = (\mathbf{A}\mathbf{x})^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2,$$

$\rightsquigarrow$ az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$ hossztartó $\rightsquigarrow$ ortogonális.

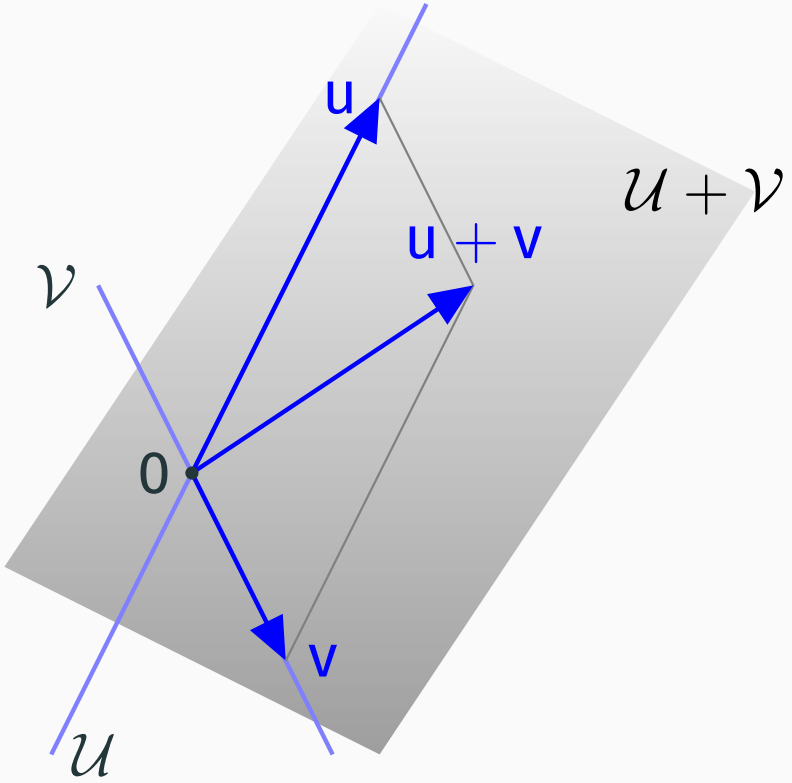
(2. $\Leftrightarrow$ 3.) Az eddigek szerint $\mathbf{A}$ ortogonális $\iff$ $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ $\iff$ $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{I}$ $\iff$ $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ oszlopvektorai ONB-t alkotnak $\iff$ $\mathbf{A}$ sorvektorai ONB-t alkotnak

Alterek összege és direkt összege

Alterek összege

D Ha $\mathcal{U}$ és $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ altér két altere, akkor az egyesítésük által generált altér a kettejük összege, amit $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ jelöl.

Á Az $\mathcal{U} + \mathcal{V}$ altér pontosan azokból a vektorokból áll, melyek egy $\mathcal{U}$- és egy $\mathcal{V}$-beli vektor összegeként előállnak.



Alterek direkt összege

D Ha $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$,..., $\mathcal{V}_k$ alterei $\mathcal{W}$-nek, és $\mathcal{W}$ minden vektora egyértelműen áll elő $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_k$ alakban ($\mathbf{v}_i \in \mathcal{V}_i$), akkor amh $\mathcal{W}$ vektortér a $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$,..., $\mathcal{V}_k$ terek direkt összege. Jelölése: $\mathcal{W} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_k$

T L! $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_k \leqslant \mathcal{V}$, $\dim \mathcal{V} = n$. Ekkor ekvivalensek:

1. $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{V}_k$
2. $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus (\mathcal{V}_2 \oplus (\mathcal{V}_3 \oplus \ldots \oplus \mathcal{V}_k))$
3. $\sum_{i=1}^{k} \mathcal{V}_i = \mathcal{V}$, $\mathbf{v}_i \in \mathcal{V}_i$ és $\sum_{i=1}^{k} \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, $i = 1, \ldots, k$
4. $\sum_{i=1}^{k} \mathcal{V}_i = \mathcal{V}$ és $\mathcal{V}_i \cap \left(\sum_{j \neq i} \mathcal{V}_j\right) = \{\mathbf{0}\}$, és
5. $\mathcal{V}_1$,..., $\mathcal{V}_k$ egy-egy bázisának egyesítése a $\mathcal{V}$ bázisát adja.

m 3.-ban nem elég kikötni, hogy $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \{\mathbf{0}\}$ bármely $i \neq j$-re: L! $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ fggtln, $\mathcal{V}_1 = \operatorname{span}(\mathbf{a})$, $\mathcal{V}_2 = \operatorname{span}(\mathbf{b})$, $\mathcal{V}_3 = \operatorname{span}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ $\mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j = \{\mathbf{0}\}$, de $\mathbb{R}^2 \neq \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \mathcal{V}_3$, $(\mathbf{0} + \mathbf{0} + (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{0})$.

m Ha a $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ alterek $\mathcal{U}$ kiegészítő alterei, akkor $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ alterek direkt összege.

Összeg és direkt összeg

P Határozzuk meg a $\mathcal{V} = \mathrm{span}((2,-1,0,-1),(-1,2,-1,0))$ és a $\mathcal{W} = \mathrm{span}((0,-1,2,-1),(-1,0,-1,2))$ terek $\mathcal{U}$ összegét (azaz adjuk meg az $\mathcal{U} = \mathcal{V} + \mathcal{W}$ tér egy bázisát)! Direkt összeg-e a két tér összege, azaz igaz-e, hogy $\mathcal{U} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$?

B A $\mathcal{V}$ és $\mathcal{W}$ tereket kifeszítő vektorok által kifeszített tér bázisát a tanult módon meghatározzuk: akár sorvektorokként, akár oszlopvektorokként mátrixot képzünk belőlük, majd annak redukált lépcsős alakjából leolvassuk az $\mathcal{U}$ valamelyik bázisát: $\mathcal{U} = \mathrm{span}((1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,-1)) = \mathrm{span}((2,-1,0,-1),(-1,2,-1,0),(0,-1,2,-1))$.

- $\mathcal{U} \neq \mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$, mert $\dim \mathcal{U} = 3 \neq 4 = \dim \mathcal{V} + \dim \mathcal{W}$.