Vektorok

1. Melyek egyenlőek az alábbi vektorok közül? *(a)* $(1,2,0)$, *(b)* az $(1,0,1)$ pontból a $(2,2,1)$ pontba mutató vektor, *(c)* $(-2,1,1)\times(-2,1,2)$, *(d)* $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\end{bmatrix}$, *(e)* $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$.

2. Írjuk fel az $x+y+2z=0$ és az $x-y+z=0$ egyenletű síkok metszésvonalának explicit vektoregyenletét és egyenletrendszerét! Adjunk megoldást egyenletrendszerek megoldása segítségével és adjunk egy másikat vektori szorzat segítségével!

3. Írjuk fel az $x+y+2z=1$ és az $x-y+z=2$ egyenletű síkok metszésvonalának explicit vektoregyenletét és egyenletrendszerét!

4. Határozzuk meg az $(1,1,0)$, $(-1,1,2)$ és $(2,3,4)$ vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát és orientációját!

5. Határozzuk meg az $(3,5)$ és a $(2,3)$ vektorok által kifeszített paralelogramma területét és orientációját!

6. Írjuk fel a $(2,3)$ ponton átmenő, $(3,1)$ irányvektorú egyenes explicit és implicit vektoregyenletét és egyenlet(rendszer)eit!

7. Írjuk fel a $(2,3)$ ponton átmenő, $(3,1)$ normálvektorú egyenes explicit és implicit vektoregyenletét!

8. Írjuk fel a $(2,3,0)$ ponton átmenő, $(3,1,1)$ irányvektorú egyenes explicit és implicit vektoregyenletét és egyenlet(rendszer)eit!

9. Írjuk fel a $(2,3,0)$, $(3,4,1)$ és $(3,1,1)$ pontokon átmenő sík explicit és implicit vektoregyenletét és egyenlet(rendszer)eit!

10. Melyek igazak, melyek hamisak az $\mathbb{R}^3$ térben?
    a) Ha három vektor a térben lineárisan összefüggő, akkor bármelyikük a másik kettő lineáris kombinációja.
    b) Megadható a térben három vektor, hogy egyikük sem lineárisan független a többitől.
    c) Megadható a térben három vektor, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$, hogy $\mathbf{a}$ független a $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektoroktól, de $\mathbf{b}$ nem független az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ vektoroktól.
    d) A tér bármely legalább 4 vektora lineárisan összefüggő.
    e) Megadható a térben 5 olyan vektor, melyek közül pontosan kettőre igaz az, hogy független a többi négy vektortól.

Az $\mathbb{R}^n$ vektortér

11. Melyek igazak, melyek hamisak?
    a) Ha az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok hajlásszöge α, akkor $\mathbf{a}$ és $-\mathbf{b}$ hajlásszöge $\pi-\alpha$.
    b) Ha A és B két adott pont, akkor az $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ vektor független az O megválasztásától.
    c) Ha A és B két adott pont, akkor az $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ vektor független az O megválasztásától.
    d) Ha két vektor egyirányú, akkor egyikük a másik skalárszorosa.
    e) Ha két vektor egyike a másik skalárszorosa, akkor egyirányúak.
    f) Ha két vektor egyike a másik skalárszorosa, akkor párhuzamosak.

12. Határozzuk meg az alábbi vektorok összegét, skalárszorzatát, és hajlásszögét!
    a) $\mathbf{u}=(1,1,2,2)$, $\mathbf{v}=(0,1,2,0)$
    b) $\mathbf{x}=(1,1,2,2)$, $\mathbf{y}=(0,-1,-2,0)$
    c) $\mathbf{u}=(1,0,1,0,\dots),\mathbf{v}=(1,-1,1,-1,\dots)\in\mathbb{R}^n$, n páros

13. Bontsuk fel a $\mathbf{b}$ vektort $\mathbf{a}$-val párhuzamos és rá merőleges összetevőkre. Határozzuk meg a $\mathbf{b}$ vektor $\mathbf{a}$ egyenesére eső merőleges vetületének hosszát!
    a) $\mathbf{a}=(1,2,-2)$, $\mathbf{b}=(4,6,-1)$,
    b) $\mathbf{a}=(2,3,6)$, $\mathbf{b}=(5,-3,8)$,
    c) $\mathbf{a}=(1,1,1,1)$, $\mathbf{b}=(1,4,0,3)$,
    d) $\mathbf{a}=(1,2,2,4)$, $\mathbf{b}=(4,3,6,7)$.

14. Legyenek $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$.
    a) Mit állíthatunk a vektorokról, ha $|\mathbf{u}|=3$, $|\mathbf{v}|=2$ és $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=7$?
    b) Mennyi $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, ha $|\mathbf{u}|=2$, $|\mathbf{v}|=3$ és $|\mathbf{u}+\mathbf{v}|=6$?
    c) Mennyi $d(\mathbf{u},\mathbf{v})$ értéke, ha $|\mathbf{u}|=8$, $|\mathbf{v}|=15$, és $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0$?

Testek

15. Alakítsuk át az alábbi komplex számokat algebraiból trigonometriaiba vagy trigonometriai alakból algebraiba. *a)* $-\mathrm{i}$, *b)* -1, *c)* $1-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i}$, *d)* $4(\cos\frac{11\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{6})$.

16. Legyen $z=3+4\mathrm{i}$, $w=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$. Végezzük el az alábbi műveleteket! *a)* $z+2w$, *b)* zw, *c)* z/w, *d)* w/z, *e)* w^{10}, *f)* $\sqrt[5]{w}$.

17. Végezzük el az alábbi műveleteket a megadott struktúrában:
    a) $4^{100}\cdot 3^2+2\cdot(2-4)$, $\mathbb{Z}_5$,
    b) $(1,0,0,1,1)\cdot(1,1,1,1,0)$, $\mathbb{Z}_2^5$.

18. Jelölje $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ az összes $a+b\sqrt{2}$ alakú számok halmazát, ahol a és b racionális számok, azaz $a,b\in\mathbb{Q}$. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ a szokásos összeadás és szorzás műveletekkel testet alkot.

Egyenletrendszerek

19. Melyek igazak, melyek hamisak? Válaszunkat indokoljuk!
    a) Az $Ax+By=C$ lehet egy sík egyenlete!
    b) Az $Ax+By=C$ egyenletű sík normálvektora (A,B,C).
    c) Az $x+y=0$, $z+w=0$ egyenletrendszer egy $\mathbb{R}^4$-beli sík egyenletrendszere.
    d) Az $x=0$, $y=0$ egyenletrendszer egy $\mathbb{R}^4$-beli sík egyenletrendszere.
    e) Az $x_1+3x_3+5x_5=2$ egyenletű $\mathbb{R}^5$-beli hipersík normálvektora $(1,0,3,0,5)$.

f) $\mathbb{R}^4$-ben van olyan két sík, melyek egyetlen pontban metszik egymást!

g) A bővített mátrixon végrehajtott elemi sorműveletek közben az egyenletrendszer megoldáshalmaza nem változik.

h) Egy lineáris egyenletrendszer nem konzisztens, ha több egyenletből áll, mint ahány ismeretlenes.

i) Ha egy valósegyütthatós lineáris egyenletrendszernek van két különböző megoldása, akkor végtelen sok is van.

j) Egy homogén lineáris egyenletrendszer mindig konzisztens.

20. Melyek lineáris egyenletek az x, y és z változókban az alábbiak közül? *a)* $3x-(\ln 2)y+e^3z=0.4$, *b)* $a^2x-b^2y=0$, *c)* $xy-yz-zx=0$, *d)* $(\sin 1)x+y-\pi z=0$, *e)* $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, *f)* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$.

21. Rajzoljuk fel a következő két egyenletrendszerhez tartozó sormodell és oszlopmodell szerinti ábrát!

a) $\begin{aligned} 2x+3y&=7\\ 3x-2y&=4 \end{aligned}$ *b)* $\begin{aligned} 2x+4y&=3\\ 3x+6y&=4 \end{aligned}$

22. A három elemi sorművelet egyike elvégezhető a másik kettő segítségével is. Melyik és hogyan?

23. Használjuk a Gauss-módszert:

a) $\begin{aligned} 7x+14y-21z&=7\\ x+2y-3z&=1\\ 5x+10y+15z&=5\\ 3x+6y-9z&=3 \end{aligned}$ *b)* $\begin{aligned} 7x+14y-21z&=0\\ x+2y-3z&=0\\ 5x+10y+15z&=0\\ 3x+6y-9z&=0 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=4\\ -x_1+x_2-x_3&=2\\ 2x_1+x_2+2x_3&=1\\ 4x_1+4x_2+4x_3&=1 \end{aligned}$ *d)* $\begin{aligned} x_1+x_2+4x_4&=3\\ x_2-x_3+3x_4&=1\\ x_1-2x_2+3x_3-5x_4&=0\\ 3x_1-x_2+4x_3&=5 \end{aligned}$

24. Oldjuk meg az alábbi szimultán egyenletrendszereket Gauss–Jordan-módszerrel:

a) $\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=1\\ x+2y+3z=4\\ x+2y+2z=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=0\\ x+2y+3z=5\\ x+2y+2z=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=1\\ x+2y+3z=4\\ x+2y+\ \ z=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=1\\ x+2y+3z=5\\ x+2y+\ \ z=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x+\ \ y+\ \ z=0\\ x+2y+3z=6\\ x+2y+\ \ z=2 \end{cases}$

25. Fogalmazzunk meg olyan feladatokat, melyekben vektorok függetlenségét vagy összefüggőségét kell eldönteni, vagy amelyben egy vektort más vektorok lineáris kombinációjaként kell előállítani és amelyre a választ a fenti egyenletrendszerek megoldása adja.

26. Melyek igazak, melyek hamisak az alábbi állítások közül?

a) Ha egy 10-ismeretlenes egyenletrendszer 6 egyenletből áll, akkor végtelen sok megoldása van.

b) Ha egy 10-ismeretlenes egyenletrendszer 20 egyenletből áll, akkor nem oldható meg!

c) Ha egy 10-ismeretlenes egyenletrendszer 20 egyenletből áll, akkor nem lehet végtelen sok megoldása.

d) $\mathbb{R}^n$ bármely három alterének metszete altér.

e) Ha az $\mathcal{U}$ altér altere a $\mathcal{V}$ és a $\mathcal{W}$ altérnek is, akkor altere metszetüknek is.

f) Alterek egyesítése altér.

g) Minden altérnek eleme a zérusvektor.

h) Minden altérnek van legalább egy nemzérus vektora.

i) Egy lineáris egyenletrendszer megoldásai vektorteret alkotnak.

j) Egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai vektorteret alkotnak.

k) Rögzített $\mathbf{A}$ mátrix mellett vektorteret alkotnak azok a $\mathbf{b}$ vektorok, melyekre az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ egyenletrendszer konzisztens.

l) Egy egyenletrendszer megoldásvektorainak különbségeként kapott vektorok halmaza vektorteret alkot.

m) Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathbf{b}$ előáll $\mathbf{A}$ oszlopainak lineáris kombinációjaként.

n) Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer bármely két megoldásának különbsége megoldása a homogén $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ egyenletrendszernek.

o) Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer bármely megoldása előáll a homogén $[\mathbf{A}|\mathbf{0}]$ mátrixú egyenletrendszer két megoldásának különbségeként.

p) Az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \le \mathrm{r}(\mathbf{A})$.

q) Az n-ismeretlenes $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ mátrixú egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha $\mathrm{r}(\mathbf{A})=n$.

27. Mennyi lehet az $\mathrm{r}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ rang, ha az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ bővített mátrixú egyenletrendszerről tudjuk, hogy

a) 2-ismeretlenes és megoldásainak száma végtelen;

b) inkonzisztens, és $\mathrm{r}(\mathbf{A})=4$;

c) egyetlen megoldása van és $\mathbf{A}$ 5×3-as;

d) inkonzisztens, n-ismeretlenes és 2 egyenletből áll.

28. Határozzuk meg az alábbi mátrixok kitüntetett altereinek bázisát! $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1\\ 1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

29. Keressünk bázist az alábbi vektortérhez a megadott vektorok közül, majd írjuk fel a vektorok e bázisra vonatkozó koordinátás alakjait!

a) $\mathrm{span}((1,2,3),(-2,-4,-6),(1,1,1),(0,1,2),(2,1,0))$,

b) $\mathrm{span}((1,2,3,4),(0,1,2,3),(3,1,-1,1),(2,0,4,0))$,

c) $\mathrm{span}((1,2,3,4),(0,1,2,3),(1,1,1,1),(-1,0,1,2))$.

30. Keressük meg az alábbi egyenletrendszerek sortérbe eső egyetlen megoldását, és annak segítségével írjuk fel összes megoldását!

a) $\begin{aligned} x+\ \ y+z&=3\\ 2x+\ \ y-z&=2\\ 3x+2y\qquad &=5 \end{aligned}$ *b)* $x+4y+8z+12w=225$