1	2	3	4	5	6	$\sum$

Alkalmazott algebra PZH 18-11-22 Neptun: ____________ **Név:** ______________________________

A dolgozat feladatainak eredményeit mind erre az oldalra kell írni, de a mellékszámítások is beadandók! Minden további papírlap jobb felső sarkára mindenki írja föl a saját nevét és a Neptun-kódját! A feladatok megoldásához semmilyen segédeszköz nem használható! Egymásról másolni, megoldást bármilyen módon átadni, beszélgetni a ZH közben nem szabad!

1. *(3 pont)* Írja az I vagy H betűt a négyzetbe aszerint, hogy az állítás igaz vagy hamis! Állításpáronként 0 vagy 1 pont.

a) Unitér $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixokra $|\det(\mathbf{AB})| = 1$. $\boxed{\text{I}}$
Unitér $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixokra $|\det(\mathbf{A}+\mathbf{B})| \le 2$. $\boxed{\text{H}}$

b) Két $n\times n$-es mátrix összeszorzásához n^3 szorzás elvégzése szükséges. $\boxed{\text{H}}$
Ha az egészegyütthatós $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer konzisztens $\mathbb{F}_7$ felett, akkor $\mathbb{Q}$ felett is. $\boxed{\text{H}}$

c) Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ és $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$, akkor $\mathbf{A} = \mathbf{O}$. $\boxed{\text{H}}$
Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ és $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} = \mathbf{O}$, akkor $\mathbf{A} = \mathbf{O}$. $\boxed{\text{I}}$

2. Húzzuk alá a helyes válaszokat a következő kérdésekre!

a) *(1 pont)* Melyek alkotnak vektorteret az alábbiak közül?
(1) konzisztens $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldásai
$\underline{(2)}$ azok a $\mathbf{b}$ vektorok, melyekre $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ konzisztens
$\underline{(3)}$ egy sajátértékhez tartozó sajátvektorok a $\mathbf{0}$-val
$\underline{(4)}$ egy végtelen vektorhalmaz összes lineáris kombinációinak halmaza

b) *(1 pont)* Melyek nullosztómentes gyűrűk a következők közül? $\underline{\mathbb{Z}}$, $\mathbb{N}$, $\underline{\mathbb{Z}_5}$, $\mathbb{Z}_8$, $\underline{\mathbb{F}_8 = GF(8)}$, $\underline{\mathbb{C}}$, $\mathbb{R}^{n\times n}$

3. Válaszoljunk az alábbi kérdésre, illetve fejezzük be a mondatot valamely tétel alapján!

a) *(1 pont)* Egy $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{p\times q}$ mátrix esetén
$\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) + \dim(\mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{H})) = q$,
$\dim(\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{H})) + \dim(\mathcal{O}(\mathbf{A}^\mathsf{H})) = p$

b) *(1 pont)* Hogyan ellenőrizhetjük, hogy az $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}$ mátrix normális-e? És normális?
normális, ha $\mathbf{M}^\mathsf{H}\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathbf{M}^\mathsf{H}$, és ez normális, mert

$$\begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(vagy: $\mathbf{M}\mathbf{M}^\mathsf{H} = \mathbf{I} \rightsquigarrow \mathbf{M}$ unitér $\rightsquigarrow \mathbf{M}$ normális)

c) *(1 pont)* Legyen $\mathcal{B} = \{(1,2,3),(0,1,2),(0,0,1)\}$ és $\hat{\mathcal{B}} = \{(3,2,1),(2,1,0),(1,0,0)\}$ két bázis. A $\mathbf{v}$ vektor koordinátás alakja $\mathcal{B}$-ben $\mathbf{v}_\mathcal{B}$. Fejezzük ki $\mathbf{v}_{\hat{\mathcal{B}}}$ koordinátás alakját! (csak jelöljük a műveletet, kiszámolni nem kell)

$$\mathbf{v}_{\hat{\mathcal{B}}} = \mathbf{T}_{\hat{\mathcal{B}}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{v}_\mathcal{B} = \mathbf{T}_{\hat{\mathcal{B}}\leftarrow\mathcal{E}}\mathbf{T}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{v}_\mathcal{B} = \mathbf{T}^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\hat{\mathcal{B}}}\mathbf{T}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}\mathbf{v}_\mathcal{B}$$
$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{v}_\mathcal{B}$$

d) *(1 pont)* Az $(0,1,2,2)$ vektort a $(3,0,0,0)$ vektorba vivő Householder-tükrözés mátrixa: $\mathbf{a} = (3,-1,-2,-2) \rightsquigarrow$

$$\mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{a}^\mathsf{T}\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^\mathsf{T} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & 6 \\ 3 & 8 & -2 & -2 \\ 6 & -2 & 5 & -4 \\ 6 & -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

4. Határozzuk meg az

$$x + 2y - 2z = 5$$
$$2x + 4y - 4z = 5$$

egyenletrendszer összes optimális megoldását a minimális abszolút értékűvel kifejezve! *(5 pont)*

$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ optimális megoldásai $\equiv \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$ megoldásai:

$$\operatorname{rref}\left[\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A} \mid \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}\right] = \operatorname{rref}\left[\begin{array}{rrr|r} 5 & 10 & -10 & 15 \\ 10 & 20 & -20 & 30 \\ -10 & -20 & 20 & -30 \end{array}\right] = [1\ 2\ -2 \mid 3]$$

$$\rightsquigarrow x + 2y - 2z = 3 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}s + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}t$$

Min.absz.értékű: **1.mo**: a sortér vektorai $c(1,2,-2)$ alakúak $\rightsquigarrow$ a mo. $(1/3, 2/3, -2/3)$. **2.mo**: Az egyetlen sortérbe eső megoldás mátrixa $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ **3. mo**: $\mathbf{A}^+ = \frac{1}{45}\mathbf{A}^\mathsf{T}$.

Összes mo. a min.absz.ért-vel $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}s + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}t$

5. Legyen a $\mathcal{V}$ euklideszi tér a legföljebb másodfokú polinomok tere a következő skalárszorzattal:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ortogonalizáljuk a legföljebb elsőfokúak alterének $\{1, x\}$ bázisát, és számítsuk ki az x^2 polinomnak e térre eső merőleges vetületét e skalárszorzat mellett. *(4 pont)*

Ortogonalizáció:

$$e_1(x) = 1, \quad x - \frac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}1 = x - \frac{\int_0^1 x\,dx}{\int_0^1 1\,dx}1 = x - \frac{1}{2}$$

Normálás: $\|x - \frac{1}{2}\|^2 = \langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2}\rangle = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2\,dx = \frac{1}{12}$
$\rightsquigarrow e_2(x) = \sqrt{3}(2x - 1)$.
x^2 vetülete $\langle x^2, e_1\rangle e_1 + \langle x^2, e_2\rangle e_2 = \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{\sqrt{3}}{6}(\sqrt{3}(2x-1)) =$
$x - \frac{1}{6}$

6. Számítsuk ki az

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix pszeudoinverzét! *(2 pont)*

a megoldás az $\mathbf{A} = \mathbf{BR}$ bázisfelbontással $\mathbf{A}^+ = \mathbf{R}^+\mathbf{B}^+$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$