1	2	3	4	5	6	$\sum$

FelsMatInf_AlkAlg 3. vizsga 19-01-15 Neptun: ________ **Név:** ________________

A vizsga feladatainak eredményeit mind erre az oldalra kell írni, de a mellékszámítások is beadandók! Minden papírlap jobb felső sarkán legyen rajta a név és a Neptun-kód! A feladatok megoldásához semmilyen segédeszköz nem használható! Sikeres a vizsga ha az elért pontok száma legalább 12.

1. *Igaz–Hamis I/H (4 pont – minden hiba −1)*

a) Egy lineáris $A : \mathcal{V}_{\mathbb{R}} \to \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ transzformáció pontosan akkor diagonalizálható, ha minden $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}$ vektor egyértelműen előáll A különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorainak összegeként. I

b) Egyetlen zérusmátrixtól különböző nilpotens mátrix sem diagonalizálható! I

c) Ha két 5×5-ös mátrix mindegyikének $\{-1, 0, 1\}$ a spektruma, akkor kongruensek. H

d) Minden valós pozitív szemidefinit mátrixnak egyetlen négyzetgyöke van. H

e) Ha $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, akkor $\mathbb{C}^n$ előáll annyi $\mathbf{A}$-invariáns altér direkt összegeként, ahány különböző sajátértéke van. I

2. Válaszoljunk az alábbi kérdésre, illetve egészítsük ki a mondatot valamely tétel vagy definíció alapján!

a) A Cayley–Hamilton-tétel szerint bármely $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$ mátrixra

$\chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$, ahol $\chi_{\mathbf{A}}$ az $\mathbf{A}$ karakterisztikus polinomja

b) Mi a diagonális alakja az $\mathbb{R}^n$-et az $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ hipersíkra merőlegesen tükröző transzformációnak?

$\mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1, -1)$

c) Legyen $\mathbb{F}$ egy test. Melyek az $\mathbb{F} \to \mathbb{F}$ lineáris leképezések?

Az $x \mapsto cx$, ahol $c \in \mathbb{F}$ konstans.

d) *(2 pont)* Az alábbi táblázatban párosítsuk össze a bal felében található mátrixtulajdonságokat a jobb oldalán található hasonlóság-típusokkal, ahol néhol a diagonális alak elemeire is adunk további feltételt. A választ a számok szerint növekvő sorrendben adjuk meg, pl. 1E 2B 3C 4A 5D.

mátrix	hasonlóság	diagonálisok
1: valós szimmetrikus	A: unitér	egységnyi absz.ért.
2: önadjungált	B: unitér	
3: normális	C: unitér	imaginárius
4: ferdén önadjungált	D: ortogonális	
5: unitér	E: unitér	valós

1D, 2E, 3B, 4C, 5A

e) Azt mondjuk, hogy a valós $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok kongruensek ($\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$), ha

van olyan invertálható $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{B} = \mathbf{C}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{C}$.

f) *(2 pont)* Számítsuk ki az $e^{\mathbf{A}}$ mátrixot, ahol $\mathbf{A}$ Jordan-felbontása $\mathbf{A} = \mathbf{C}\begin{bmatrix}3&1&0\\0&3&1\\0&0&3\end{bmatrix}\mathbf{C}^{-1}$.

$$\mathbf{C}\begin{bmatrix}e^3&e^3&\frac{e^3}{2}\\0&e^3&e^3\\0&0&e^3\end{bmatrix}\mathbf{C}^{-1}$$

3. Adjuk meg a következő egyenletrendszer sortérbe eső egyetlen optimális megoldását: *(4 pont)*

$$\begin{cases}3x - 6y = 2\\2x + 3y = 3\\6x + 2y = -2\end{cases}$$

Az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$ normálegyenlet alakja ez esetben

$$\begin{cases}49x = 0\\49y = -7\end{cases}$$

Ennek egyetlen megoldása: $x = 0$, $y = -\frac{1}{7}$, ami így szükségképpen a sortérbe esik.

4. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&-3\\-3&1\end{bmatrix}$ mátrix Frobenius-, 2- és ∞-normáját! *(4 pont)*

$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, $\|\mathbf{A}\|_2 = \|\mathbf{A}\|_\infty = 4$ (2-norma a legnagyobb szinguláris érték, ami az $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}$ legnagyobb sajátértékének négyzetgyöke)

5. Határozzuk meg az $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&1\\4&1\end{bmatrix}$ mátrix Perron-vektorait és az

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\mathbf{A}\right)^n$$

határértéket! *(6 pont)*

Sajátértékek 3 és −1. A 3-hoz tartozó jobb és bal sajátvektorok osztva a koordináták összegével (azaz lenormálva 1-normával) adják a Perron-vektorokat:
$\mathbf{p} = (1/3, 2/3)$, $\mathbf{q} = (2/3, 1/3)$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\mathbf{A}\right)^n = \frac{\mathbf{p}\mathbf{q}^\mathsf{T}}{\mathbf{p}^\mathsf{T}\mathbf{q}} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}2&1\\4&2\end{bmatrix}.$$

6. Adjuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-alakját és egy Jordan-bázisát, ahol *(4 pont)*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$

Az 1-hez tartozó sajátaltér 1-dimenziós, így egyetlen J-blokk tartozik hozzá. (Az ált.s.v-hoz: keresünk egy vektort, amit $(\mathbf{A} - \mathbf{I})^2$ nem a $\mathbf{0}$-ba visz (pl. $(1, 0, 0)$)):

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix} \quad \text{J-lánc: } \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.$$