Felsőbb matematika informatikusoknak – Alkalmazott algebra – 18/19/1

(1.01 változat)

Algebrai struktúrák • test (véges ($\mathbb{Z}_p$ ha p prím, $\mathbb{F}_q = GF(q)$ ha q prímhatvány, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$), gyűrű ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_m$, mátrixok $\mathbb{F}^{m\times n}$ gyűrűje, polinomok gyűrűje) • vektortér (tetszőleges test fölött, függvényterek), vektorterek direkt összege, lineáris kombináció (üres halmazé is), bázis, lineáris leképezés, képtér, magtér, altér, affin altér, mátrix 4 kitüntetett altere • valós és komplex euklideszi tér (a skalárszorzat absztrakt definíciójával), terek izomorfiája

Mátrixon végzett manipulációk • redukált lépcsős alak • (Hermite-féle) adjungált • pszeudoinverz • műveletek blokkmátrixokkal • norma

Speciális mátrixok definíciói és tulajdonságaik • elemi, permutáló • ortogonális (hossz-, távolság-, szög-, skalárszorzat-tartás, sajátértékei, determinánsa), (ferdén) szimmetrikus és nilpotens mátrixok (sajátértékei) • önadjungált, unitér, normális • pozitív/negatív (szemi)definit, indefinit • nemnegatív, pozitív, primitív, irreducibilis, reducibilis • sztochasztikus

Egyenletrendszerek megoldhatósága • megoldása redukált lépcsős alakkal, a minimális abszolút értékű megoldás • optimális megoldás és meghatározása normálegyenlettel, QR-felbontással, pszeudoinverzzel, lineáris és polinomiális regresszió • homogén/inhomogén egyenletrendszek megoldásainak terei

Hasonlóság, (ortogonális) diagonalizálhatóság • hasonlóságra invariáns tulajdonságok (rang, nullitás, determináns, nyom, karakterisztikus polinom, sajátértékek és azok algebrai és geometriai multiplicitásai) • diagonalizálhatóság feltételei • diagonalizálhatóság mint a tér sajátalterek direkt összegére bonthatósága • ortogonális diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltétele • unitér diagonalizálhatóság szükséges és elégséges feltétele • ortogonális/unitér triangularizálhatóság: Schur-felbontás • „majdnem-diagonalizálhatóság”: Jordan-normálalak, azaz a tér sajátalterek helyett invariáns alterek direkt összegére való bonthatósága • ortogonális diagonalizálhatóság bázispárban: SVD

Mátrixfelbontások • bázisfelbontás, LU-, PLU-, QR-, Schur-, saját-, spektrál-, polár-, Cholesky-, Jordan-felbontás, SVD

Kvadratikus alak • főtengelytranszformáció, definitség, főminorok, kongruencia, tehetetlenség • pozitív szemidefinit és definit mátrixok faktorizációi • pozitív szemidefinit mátrix egyetlen pozitív szemidefinit négyzetgyöke

Gyakorlati feladatok 1. ZH-ra • sortérbe eső (azaz a min.absz.értékű) megoldás meghatározása • LU-felbontás és használata egyenletrendszer megoldásához • áttérés másik bázisra • lineáris transzformáció (pl. vetítés, tükrözés, forgatás, Givens-forgatás, Householder-tükrözés) mátrixa • altérre való merőleges vetítés mátrixa • egyenletrendszer optimális megoldásainak kiszámítása • pszeudoinverz kiszámítása (itt kellhet a bázisfelbontás), és használata a min.absz.értékű megoldáshoz • Gram–Schmidt-ortogonalizáció • QR-felbontás G–S-ortogonalizációból és egyenletrendszer megoldása QR-felbontással

Gyakorlati feladatok ZH után • sajátfelbontás, spektrálfelbontás, algebrai és geometriai multiplicitás kiszámítása • pozitív szemidefinit és definit mátrixok faktorizációi, Cholesky-felbontás • szinguláris érték, jobb és bal szinguláris vektorok meghatározása, szinguláris felbontás • vektornormák és mátrix 1-, 2- ∞- és Frobenius-normájának kiszámítása • Jordan-bázis keresése 3×3-as mátrixokra • az $\mathbf{A}$ Jordan-normálalakjának meghatározása az $\mathrm{r}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^k$ értékekből • mátrixfüggvény a Jordan-alakból és az Hermite-polinomból • a Perron-vektorok és a Perron–Frobenius-tételekben szereplő mátrixhatványok kiszámítása • nemnegatív mátrix reducibilitásának és primitívségének eldöntése

Kiemelt tételek • a lineáris algebra alaptétele • a legjobb közelítés tétele • a diagonalizálhatóságra valamint az ortogonális és unitér diagonalizálhatóságra vonatkozó feltételek • Sylvester-féle tehetetlenségi törvény • Cayley–Hamilton-tétel • Jordan-féle normálalak • Perron- és Perron–Frobenius-tételek